МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 2003

УДК 533.72

 С. А. САВКОВ

ОБ УЧЕТЕ АККОМОДАЦИИ ЭНЕРГИИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПОТОКА ТЕПЛА МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Получена зависимость потока тепла между коаксиальными цилиндрами от коэффициента аккомодации энергии. Проведено сравнение известных методов решения кинетического уравнения.

Ключевые слова: теплоперенос, аккомодация энергии, физическая кинетика.

Изучение процесса переноса тепла между коаксиальными цилиндрами необходимо, в частности, для определения характера взаимодействия газа с твердой поверхностью и вычисления коэффициентов аккомодации. Достаточно подробный обзор публикаций по этому вопросу приведен в [1–4]. Однако при анализе результатов эксперимента как правило, используется метод Лиза [5], не дающий реальных распределений температуры и концентрации молекул газа. В [6] используется вариационный метод решения кинетического уравнения, но расчеты проведены лишь для конкретных значений коэффициента аккомодации, что затрудняет использование полученных результатов для обработки эксперимента.

Рассмотрим два соосных цилиндра с радиусами $R_1 < R_2$, на поверхности которых поддерживаются постоянные температуры $T_s^1 > T_s^2$. Введем цилиндрическую систему координат, ось z которой совпадает с осью цилиндров. Полагая, что разность $\Delta T_s = T_s^1 - T_s^2$ достаточно мала, представим функцию распределения молекул газа в виде

$$f = f_0(1+\varphi), \quad f_0 = n_0(m/2\pi kT_0)\exp(-C^2), \quad \mathbf{C} = \mathbf{V}\sqrt{m/2kT_0}$$

Здесь f_0 – равновесная (максвелловская) функция распределения; $\mathbf{V}$ – собственная скорость теплового движения молекул газа; T_0 и n_0 – некоторые, принятые за равновесные значения температуры и концентрации.

Функция φ должна удовлетворять условиям

$$\varphi|_{r = R_k,\, C_n > 0} = \Phi_r^k = \frac{\Delta n_r^k}{n_0} + \left(C^2 - \frac{3}{2}\right)\frac{\Delta T_r^k}{T_0}$$

$$\Delta T_r^k = T_r^k - T_0, \quad \Delta n_r^k = n_r^k - n_0$$

где T_r^k и n_r^k – температура и концентрация молекул, отразившихся от поверхности k-го цилиндра; C_n означает нормальную к поверхности k-го цилиндра составляющую вектора $\mathbf{C}$.

Значения T_r^k и n_r^k определяются требованием отсутствия массового движения газа

$$\int C_r \varphi \exp(-C^2) d^3C = 0 \tag{1}$$

и характером аккомодации энергии. Коэффициент аккомодации энергии при отражении молекул от поверхности k-го цилиндра определяется как

$$\alpha_k = \frac{E_i^k - E_r^k}{E_i^k - E_s^k} \tag{2}$$

$$E_i^k = -\int\limits_{C_n<0} C_r C^2 \varphi(R_k) \exp(-C^2) d^3C \tag{3}$$

$$E_r^k = \int\limits_{C_n>0} C_r C^2 \Phi_r^k \exp(-C^2) d^3C \tag{4}$$

$$E_s^k = \int\limits_{C_n>0} C_r C^2 \Phi_s^k \exp(-C^2) d^3C$$

$$\Phi_s^k = \frac{\Delta n_s^k}{n_0} + \left(C^2 - \frac{3}{2}\right)\frac{\Delta T_s^k}{n_0}$$

где E_i^k и E_r^k – обезразмеренные потоки энергии, приносимой падающими и уносимой отразившимися от поверхности k-го цилиндра молекулами; E_s^k – энергия, которую уносили бы молекулы, если бы отражались с температурой T_s^k.

В линейном по перепаду температуры приближении любая из характеристик газа может быть представлена в виде $F = F^*\Delta T_r/T_0$, $\Delta T_r = T_r^1 - T_r^2$. Здесь и далее индексом "*" отмечены величины, отнесенные к $\Delta T_r/T_0$. Для внутреннего цилиндра из условий (1), (3) и (4) находим

$$\frac{\Delta n_r^1}{n_0} = -\frac{1+4I_0^1}{2}\frac{\Delta T_r}{T_0}, \quad \frac{\Delta n_s^1}{n_0} = -\frac{1}{2}\frac{T_s^1 - T_0}{T_0} - 2I_0^1\frac{\Delta T_r}{T_0}$$

$$E_i^1 = -\frac{I_1^1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Delta T_r}{T_0}, \quad E_r^1 = \frac{1-2I_0^2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Delta T_r}{T_0}, \quad E_s^1 = \frac{\Delta T_r}{T_0} - \frac{2I_0^1}{\sqrt{\pi}}\frac{T_s^1 - T_0}{T_0} \tag{5}$$

$$I_i^1 = \pi^{-1} \int\limits_{C_r<0} C_r C^{2i} \varphi^*(R_1) \exp(-C^2) d^3C$$

Подставляя полученные выражения в условие (2), находим

$$\alpha_1(T_s^1 - T_0) = (T_r^1 - T_r^2)(1 + (1-\alpha_1)(I_1^1 - 2I_0^1)) \tag{6}$$

С другой стороны, в силу закона сохранения, поток тепла между цилиндрами

$$q = \int V_r \frac{mV^2}{2} f_0 \varphi d^3V$$

может быть представлен в виде

$$q = n_0\sqrt{\frac{2k^3T_0^3}{m}}\frac{R_1}{r}Q, \quad Q = E_r^1 - E_i^1 = Q^*\frac{\Delta T_r}{T_0}$$

Величина

$$Q^* = \frac{1 - 2I_0^1 + I_1^1}{\sqrt{\pi}} \tag{7}$$

представляет собой безразмерное значение потока тепла с единицы поверхности внутреннего цилиндра, вычисленное в случае полной аккомодации энергии при $\Delta T_s = T_0$.

С учетом (7) соотношение (6) принимает вид

$$\alpha_1(T_s^1 - T_0) = (\sqrt{\pi}(1-\alpha_1)Q^* + \alpha_1)(T_r^1 - T_r^2) \tag{8}$$

Рассмотрим внешний цилиндр. Принимая в качестве равновесных температуру и концентрацию молекул, отразившихся от его поверхности, т.е. полагая

$$T_0 = T_r^2, \quad n_0 = n_r^2 \tag{9}$$

получим

$$\Phi_r^2 = 0, \quad E_r^2 = 0, \quad E_i^2 = -\frac{I_1^2}{\sqrt{\pi}}\frac{T_r^1 - T_r^2}{T_r^2}, \quad E_s^2 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{T_s^2 - T_r^2}{T_r^2}$$

$$\alpha_2(T_s^2 - T_r^2) = -I_1^2(1-\alpha_2)(T_r^1 - T_r^2)$$

$$I_1^2 = \pi^{-1}\int\limits_{C_r > 0} C_r C^{2i}\varphi^*(R_2)\exp(-C^2)d^3C$$

Причем, в силу закона сохранения энергии

$$E_i^2 = -Q^*\frac{R_1}{R_2}\frac{T_r^1 - T_r^2}{T_r^2}$$

Отсюда следует, что $I_1^2 = \sqrt{\pi}\, Q^*(R_1/R_2)$. В результате имеем

$$\alpha_2(T_s^1 - T_r^2) = -\sqrt{\pi}(1-\alpha_2)Q^*\frac{R_1}{R_2}(T_r^1 - T_r^2) \tag{10}$$

Сравнивая (8) и (10) с учетом (9) находим

$$T_s^1 - T_s^2 = \left(\sqrt{\pi}Q^*\left(\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right) + \frac{R_1}{R_2}\left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right)\right) - 1\right)(T_r^1 - T_r^2)$$

$$Q = \left(\sqrt{\pi}\left(\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right) + \frac{R_1}{R_2}\left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right)\right) + \frac{1}{Q^*}\right)^{-1}\frac{\Delta T_s}{T_0}$$

Очевидно, что в свободномолекулярном режиме (т.е., в случае, когда расстояние между цилиндрами много больше, а радиус внутреннего цилиндра много меньше длины свободного пробега молекул газа) влиянием внутреннего цилиндра можно пренебречь и считать функцию распределения φ^* в области интегрирования (5) и сами интегралы I_i^k равными нулю. Таким образом, в указанном пределе

$$Q^* = Q_{fm}^* = \pi^{-1/2}, \quad Q = Q_{fm} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Delta T_s}{T_0}$$

Таблица 1

r_1	1	2	3
0.05	0.8874	0.8844	0.9369
0.075	0.8490	0.8361	0.8989
0.1	0.8143	0.7928	0.8615
0.2	0.6946	0.6568	0.7288
0.3	0.5994	0.5606	0.6252
0.4	0.5345	0.4889	0.5448
0.5	0.4650	0.4336	0.4815
0.75	0.3608	0.3379	0.3711
1	0.2941	0.2768	0.3008
1.5	0.2141	0.2033	0.2173
2	0.1680	0.1606	0.1698
3	0.1172	0.1131	0.1179
5	0.0729	0.0711	0.0731
7	0.0533	0.0518	0.0529
10	0.0374	0.0369	0.0374

Таблица 2

r_1	1	1*	2	3
0.05	0.9391	0.9149	0.9126	0.9530
0.075	0.9065	0.8847	0.8744	0.9239
0.1	0.8749	0.8568	0.8393	0.8946
0.2	0.7634	0.7563	0.7231	0.7858
0.3	0.6743	0.6713	0.6351	0.6948
0.4	0.6029	0.6104	0.5663	0.6203
0.5	0.5431	0.5426	0.5109	0.5589
0.75	0.4357	0.4351	0.4105	0.4460
1	0.3632	0.3625	0.3431	0.3699
1.5	0.2721	0.2710	0.2582	0.2748
2	0.2173	0.2160	0.2071	0.2182
3	0.1548	0.1534	0.1483	0.1543
5	0.0980	0.0969	0.0946	0.0971
7	0.0716	0.0713	0.0694	0.0708
10	0.0507	0.0504	0.0496	0.0504

В результате имеем

$$\frac{q}{q_{fm}} = \frac{Q}{Q_{fm}} = \left(1 - \alpha_1 + \alpha_1\left(\frac{R_1}{R_2}\left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right) + \frac{Q^*_{fm}}{Q^*}\right)\right)^{-1} \tag{11}$$

Для конкретного анализа рассмотрим $R_1/R_2 = 0.0030598$, что соответствует опытам [7]. Как следует из (11), вклад коэффициента аккомодации на поверхности внешнего цилиндра в этом случае не превышает 0.3% и им можно пренебречь, что эквивалентно $\alpha_2 = 1$.

В табл. 1–4 представлены значения q/q_{fm} полученные при $\alpha_1 = 1$, 0.7328, 0.4670, 0.2831 соответственно; $r_1 = R_1(n\sqrt{2mkT_0})/(3\mu)$ – принятое в [6] обезразмереное значе-

Таблица 3

r_1	1	1*	2	3
0.05	0.9603	0.9441	0.9425	0.9695
0.075	0.9384	0.9233	0.9162	0.9501
0.1	0.9165	0.9038	0.8912	0.9302
0.2	0.8350	0.8296	0.8038	0.8520
0.3	0.7646	0.7621	0.7320	0.7813
0.4	0.7043	0.7109	0.6720	0.7194
0.5	0.6509	0.6505	0.6211	0.6654
0.75	0.5478	0.5472	0.5221	0.5582
1	0.4723	0.4715	0.4504	0.4795
1.5	0.3696	0.3684	0.3533	0.3729
2	0.3034	0.3019	0.2906	0.3046
3	0.2232	0.2214	0.2146	0.2225
5	0.1456	0.1441	0.1408	0.1444
7	0.1049	0.1076	0.1048	0.1068
10	0.0774	0.0768	0.0757	0.0768

Таблица 4

r_1	1	1*	2	3
0.05	0.9756	0.9653	0.9643	0.9813
0.075	0.9617	0.9521	0.9474	0.9692
0.1	0.9477	0.9394	0.9311	0.9565
0.2	0.8930	0.8893	0.8711	0.9047
0.3	0.8427	0.8409	0.8184	0.8549
0.4	0.7971	0.8022	0.7717	0.8087
0.5	0.7547	0.7543	0.7300	0.7664
0.75	0.6664	0.6660	0.6432	0.6758
1	0.5962	0.5954	0.5748	0.6031
1.5	0.4918	0.4904	0.4740	0.4952
2	0.4181	0.4163	0.4033	0.4194
3	0.3214	0.3192	0.3106	0.3207
5	0.2193	0.2174	0.2128	0.2178
7	0.1662	0.1659	0.1619	0.1648
10	0.1215	0.1207	0.1191	0.1207

ние радиуса внутреннего цилиндра, μ – коэффициент динамической вязкости газа; первая колонка цифр – результаты вариационного метода [6]; вторая – метода Лиза [5]; третья – предложенного в [8] варианта моментного метода. Для сравнения в колонке 1* приведены результаты расчетов по формуле (11) и представленным в таблице 1 (1) данным.

Заключение. Для определения потока тепла при произвольном значении α_k достаточно вычислить искомый поток в случае полной аккомодации энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коленчиц О.А.* Тепловая аккомодация систем газ – твердое тело. Минск: Наука и техника, 1977. 126 с.
2. *Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А.* Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
3. *Semyonov Yu.G., Borisov S.F., Suetin P.E.* Investigation of heat transfer in rarefied gases over a wide range of Knudsen nambers // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1984. V. 27. № 10. P. 1789–1799.
4. *Борисов С.Ф., Балахонов Н.Ф., Губанов В.А.* Взаимодействие газов с поверхностью твердых тел. М.: Наука, 1988. 200 с.
5. *Lees L., Liu Chung-Yen.* Kinetic theory description of conductive heat transfer from a fine wire // Phys. Fluids. 1962. V. 5. № 10. P. 1137–1148.
6. *Bassanini P., Cercignani C., Pagani C.D.* Influence of the accommodation coefficient on the heat transfer in a rarefied gas // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1968. V. 11. № 9. P. 1359–1369.
7. *Dybbs A., Springer G.S.* Heat conduction experiments in rarefied gases between concentric cylinders // Phys. Fluids. 1965. V. 8. № 11. P. 1946–1950.
8. *Савков С.А., Юшканов А.А.* К вопросу о вычислении потока тепла между коаксиальными цилиндрами при произвольных числах Кнудсена // Журн. техн. физики. 2000. Т. 70. № 11. С. 9–14.

Орел

Поступила в редакцию
23.V.2002