

УДК 532.526.4:536.24

© 2003 г. В. А. АЛЕКСИН

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА НА ТЕПЛООБМЕН НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Представлен вариант двухпараметрической модели турбулентности, позволяющий непрерывным образом рассчитывать область течения от ламинарного до турбулентного режимов, включая переход, в условиях высокой интенсивности турбулентности набегающего потока. Показана возможность теоретического описания свойств теплового перехода квазистационарной моделью турбулентности при периодических распределениях скорости набегающего потока. Численные результаты сопоставляются с экспериментальными и теоретическими данными. Предлагаемый подход развит для определения совместного влияния параметров гармонических колебаний внешней скорости и турбулентности набегающего потока на характеристики теплопереноса на плоской пластине с различными граничными условиями для энтальпии.

*Ключевые слова:* пограничный слой, турбулентность, теплообмен, нестационарность, численный метод.

Нестационарные процессы характерны для турбулентных течений, и часто возникает необходимость их учета в практических приложениях. Так, в течениях через решетки турбомашин экспериментально показано, что в ряде случаев нестационарные эффекты значительны и оказывают заметное влияние на развитие гидродинамических и тепловых полей в целом. В частности, периодические изменения во времени параметров потока на границах исследуемой области могут привести к колебательному характеру протекающих в ней процессов [1]. Одновременное воздействие нескольких таких нестационарных факторов еще более осложняет решение поставленной задачи.

Для течений в турбомашинах следы от лопаток предыдущей ступени, расположенных вверх по потоку, повышают интенсивность турбулентности набегающего потока на решетку профилей, делая его неоднородным и нестационарным. Вследствие этого флуктуации с большой амплитудой из внешнего потока диффундируют непосредственно в пограничный слой на профиле лопатки, меняя характер ламинарного режима и переходных процессов, и вызывают переход значительно раньше, чем в случаях малых значений степени турбулентности, и без стадии возникновения волн [2].

В условиях повышенной интенсивности турбулентности наряду с нестационарностью параметров набегающего потока актуальное значение приобретает учет влияния масштаба турбулентности  $L_\infty$  на ламинарно-турбулентный переход [3, 4]. Уровень интенсивности турбулентности имеет определяющее воздействие на теплопередачу лопаток во всех областях течения, что связано с пространственной переменностью и нестационарностью характеристик турбулентности вдоль внешней границы пограничного слоя [2, 5]. Отмечается также влияние на режимы и структуру потока в пограничных слоях начальных профилей скорости и температуры [6].

С увеличением амплитуды колебаний скорости внешнего невязкого потока, обезразмеренной на среднее за период значение от малых значений до близких к единице, в нестационарном пограничном слое образуются зоны возвратного течения [7–9] и, согласно экспериментальным данным, течение имеет существенно нестационарный характер [10]. Для таких течений становятся актуальными вопросы контроля и управ-

ления пограничным слоем посредством распределенного на поверхности нестационарного параметра проницаемости или условия для температуры [11, 12]. Так, периодический отсос через проницаемую поверхность, уменьшающий интенсивность возвратных течений, положительно сказывается на аэродинамических характеристиках [9].

В численных расчетах при анализе нестационарных эффектов используются квазистационарные модели турбулентности, в которых учитываются нестационарные члены только в уравнениях для параметров турбулентности. Нестационарность учитывается также через зависимость от времени параметров турбулентности на внешней границе пограничного слоя, даже если они постоянны в набегающем потоке [13].

Для турбулизированных пристеночных течений введение дополнительных эмпирических функций в коэффициенты модельных уравнений позволило получить согласованные численные результаты с экспериментальными данными [14–16] для описания переходной структуры потока в пограничном слое при изменении от малых до больших значений локальных турбулентных чисел Рейнольдса. Возможность использования модифицированной квазистационарной модели при высокой интенсивности турбулентности и гармонических колебаниях скорости внешнего потока для расчета характеристик течения неустановившегося пограничного слоя на плоской пластине показана в [17].

В настоящем исследовании на основе модифицированной двухпараметрической  $K - \varepsilon$ -модели изучается влияние параметров турбулентности набегающего потока на развитие тепловых переходных процессов как в стационарном, так и в нестационарном пограничных слоях на плоской пластине. Для турбулизированного набегающего потока численные решения стационарной задачи сопоставляются с экспериментальными данными и служат начальными условиями для расчета характеристик нестационарного пограничного слоя. Дается анализ совместного влияния параметров гармонических колебаний скорости внешнего невязкого потока и турбулентности набегающего потока на нестационарные характеристики теплопереноса.

**1. Постановка задачи.** При обычных предположениях теории пограничного слоя и в пренебрежении членами с нормальными напряжениями Рейнольдса система уравнений для осредненных характеристик нестационарного двумерного пограничного слоя в сжимаемом однородном потоке совершенного газа в системе  $\xi, \zeta$ , связанной с поверхностью пластины  $\zeta = 0$ , имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\rho v) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \rho \langle u'v' \rangle \right]$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial \xi} + v \frac{\partial h}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \lambda \frac{\partial h}{\partial \zeta} - \rho \langle h'v' \rangle \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 - \langle u'v' \rangle \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0, \quad p = \rho RT$$

$$\mu = \mu_e (h/h_e)^\omega, \quad \lambda = \lambda_e (h/h_e)^\omega, \quad \omega = 0.75$$

Здесь  $u, v$  – продольная и нормальная компоненты скорости в системе координат  $\xi, \zeta$ , направленные вдоль поверхности и по нормали к ней,  $p$  – статическое давление,  $\rho$  – плотность,  $T$  – температура,  $h$  – энтальпия,  $\mu, \lambda$  – коэффициенты вязкости и теплопроводности,  $c_p$  – теплоемкость при постоянном давлении,  $R$  – газовая постоянная, нижние индексы  $e$  и  $w$  относятся к значениям на внешней границе пограничного слоя и стенке,  $t$  – к турбулентному режиму, штрих – к пульсационным величинам.

В уравнениях (1.1) использовано предположение о малости членов, содержащих флуктуации плотности, вязкости и теплопроводности по сравнению с членами, в которые входят их средние значения. Статическое давление  $p$  – функция  $t, \xi$ .

Граничные условия задаются на поверхности и внешней границе пограничного слоя

$$\zeta = 0 : u = 0, \quad \rho v = (\rho v)_w = F(t, \xi), \quad h_w H_0^{-1} = i_w(t, \xi) \quad \text{или} \quad q_w = q_w^0(t, \xi) \quad (1.2)$$

$$\zeta \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow u_e, \quad h \rightarrow h_e \quad (1.3)$$

Распределения продольной составляющей скорости  $u_e(t, \xi)$  и энтальпии  $h_e(t, \xi)$  предполагаются известными из решения уравнений газовой динамики или из экспериментальных данных. Рассматривается нестационарный пограничный слой, в котором в начальный момент времени  $t = 0$  поля течения и теплообмена определяются из стационарных условий; при  $t > 0$  внешняя скорость  $u_e(t, \xi)$  начинает колебаться от стационарной скорости  $u_0(\xi)$  по гармоническому закону

$$u_e(t, \xi) = u_0(\xi)(1 + A_0 \cos \omega t) \quad (1.4)$$

В начальный момент времени  $t = 0$  задаются условия

$$t = 0, \quad u(0, \xi, \zeta) = u_0(\xi, \zeta), \quad h(0, \xi, \zeta) = h_0(\xi, \zeta)$$

Начальные условия по времени находятся из решения стационарной задачи при  $t = 0$ .

Начальные условия по продольной координате для профилей скорости  $u$  и энтальпии  $h$  задаются в некоторой области, например при  $\xi = \xi_0$

$$u(t, \xi_0, \zeta) = u_{00}(t, \zeta), \quad h(t, \xi_0, \zeta) = h_{00}(t, \zeta)$$

Для их определения в плоскости  $\xi = \xi_0$  решается нестационарная задача с распределением (1.4).

**2. Моделирование турбулентности.** При турбулентном режиме течения осредненные уравнения нестационарного пограничного слоя замыкаются с использованием моделей турбулентности, основанных на понятии турбулентной вязкости и на гипотезах Колмогорова – Прандтля [8, 18].

Введение турбулентных коэффициентов вязкости и теплопроводности, так же как использование гипотезы Буссинеска о градиентном механизме переноса для турбулентного напряжения ( $-\rho \langle u'v' \rangle$ ) и вид закона Фурье для турбулентного теплового потока ( $-\rho \langle h'v' \rangle$ ), позволяет представить полное напряжение трения  $\tau$  и полный тепловой поток  $q$  как [18]

$$\begin{aligned} \tau &= \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \rho \langle u'v' \rangle = \mu_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad q = \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \zeta} - \rho \langle h'v' \rangle = \frac{\lambda_\Sigma}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \zeta} \\ \tau_t &= -\rho \langle u'v' \rangle = \mu_t \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad q_t = -\rho \langle h'v' \rangle = \frac{\lambda_t}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\mu_\Sigma = \mu + \mu_t, \quad \lambda_\Sigma = \lambda + \lambda_t$$

Здесь  $\mu_\Sigma, \lambda_\Sigma$  – эффективные коэффициенты. Тогда введение в (2.1) ламинарного и турбулентного чисел Прандтля  $Pr = \mu c_p / \lambda$ ,  $Pr_t = \mu_t c_p / \lambda_t$  дает возможность выразить  $\lambda/c_p$  и  $\lambda_t/c_p$  через отношения  $\mu/Pr$  и  $\mu_t/Pr_t$ .

Для замыкания системы уравнений (1.1) используются двухпараметрические  $K - \epsilon$ -модели, задаются степень (интенсивность)  $Tu_\infty$  ( $Tu_\infty^2 = 10^4 \cdot 2K_\infty / (3V_\infty^2)$ ) и масштаб  $L_\infty$  тур-

булентности в набегающем потоке, где кинетическая энергия турбулентности  $K = 0.5\langle u_i' u_i' \rangle$  обезразмеривается на  $V_\infty^2$ .

Уравнения для кинетической энергии турбулентности  $K$  и изотропной части скорости ее диссипации  $\epsilon = \epsilon_k - D$  нестационарного двумерного пограничного слоя в системе координат  $\xi, \zeta$  имеют вид [19]

$$\frac{\partial K}{\partial t} + u \frac{\partial K}{\partial \xi} + v \frac{\partial K}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \mu_{\Sigma, k} \frac{\partial K}{\partial \zeta} \right] + \frac{P_k}{\rho} - \epsilon_k \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} + v \frac{\partial \epsilon}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \mu_{\Sigma, \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \zeta} \right] + \frac{P_\epsilon}{\rho} - (D_\epsilon + E) \quad (2.3)$$

$$\mu_{\Sigma, k} = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}, \quad \mu_{\Sigma, \epsilon} = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \quad (2.4)$$

Здесь  $\mu_{\Sigma, k}, \mu_{\Sigma, \epsilon}$  – коэффициенты полных (эффективных) вязкостей;  $\sigma_k, \sigma_\epsilon$  – числа Прандтля для  $K$  и  $\epsilon$ ; члены  $P_k, P_\epsilon$  описывают процессы генерации в уравнениях для  $K$  и скорости диссипации  $\epsilon$  в явной форме;  $D_\epsilon$  – диссипативное слагаемое в уравнении для  $\epsilon$ ; члены  $D, E$  выражают влияние вязкости на диссипативные эффекты вблизи стенки и в областях с малыми локальными числами Рейнольдса в уравнениях для  $K$  и  $\epsilon$ , как и пристеночные функции  $f_2, f_4$  в членах  $D_\epsilon, E$ .

Коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_t$  определяется по второй формуле Прандтля–Колмогорова с демпфирующей функцией  $f_\mu$ . В варианте модели [19]  $f_\mu$  – функция координаты  $\zeta^+$  и  $C_3^*(\eta_*)$  [13]

$$f_\mu = 1 - \exp(-C_3^* \zeta^+), \quad \zeta^+ = \frac{u_* \zeta}{\nu}, \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.5)$$

Модификация этой модели (2.1)–(2.4) предполагает замену постоянной  $c_3$  в (2.5) функцией  $C_3^* = C_0' / \eta_*^\alpha$ , где  $C_0' = c_3 \eta_*^\alpha (A_0')$  и  $\alpha = 0.25$ . Функция  $C_3^*$  связана с толщиной вязкого подслоя  $\eta_*$ , заданной в форме зависимости от локального числа  $Re_\theta$  и двух параметров:  $A_0', B_0'$ , определяемых в общем случае параметрами набегающего потока и его турбулентности [13]. Здесь вводится эмпирическая зависимость  $A_0'$  от  $Tu_\infty$ , полученная для опытных данных [20] и преобразованная в [13] для турбулентности с высокой интенсивностью.

На поверхности задаются граничные условия

$$\zeta = 0 : K = 0, \quad \epsilon = 0$$

Функции  $K_e(t, \xi), \epsilon_e(t, \xi)$  на внешней границе пограничного слоя находятся при заданном распределении  $u_e(t, \xi)$  вне окрестности передней критической точки из уравнений

$$\frac{\partial K_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial K_e}{\partial \xi} = -\epsilon_e, \quad \frac{\partial \epsilon_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \xi} = -c_2 \frac{\epsilon_e^2}{K_e} \quad (2.6)$$

Для уравнений (2.6) начальные условия для функций  $K_e$  и  $\epsilon_e$  по  $t$  и  $\xi$  соотношения

$$t = 0, \quad K_e(0, \xi) = K_{e0}(\xi), \quad \epsilon_e(0, \xi) = \epsilon_{e0}(\xi)$$

$$\xi = \xi_0, \quad K_e(t, \xi_0) = K_{e00}(t), \quad \epsilon_e(t, \xi_0) = \epsilon_{e00}(t)$$

где  $K_{e0}, \epsilon_{e0}$  и  $K_{e00}, \epsilon_{e00}$  – решения уравнений (2.6) с  $\partial/\partial t = 0$  и  $\partial/\partial \xi = 0$  соответственно.

Тогда на внешней границе должны выполняться условия

$$\zeta \rightarrow \infty, \quad K \rightarrow K_e(t, \xi), \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon_e(t, \xi)$$

Для функций  $K$  и  $\varepsilon$  начальные условия по времени  $t$  в общем случае вводятся как

$$t = 0, \quad K(0, \xi, \zeta) = K_0(\xi, \zeta), \quad \varepsilon(0, \xi, \zeta) = \varepsilon_0(\xi, \zeta)$$

Здесь  $K_0, \varepsilon_0$  – начальные заданные распределения кинетической энергии и скорости ее диссипации при  $t = 0$ . Они могут быть получены из решения уравнений (2.2), (2.3) при  $t = 0$  и  $\partial/\partial t = 0$ .

Решения в области вниз по потоку зависят от выбора начальных условий по  $\xi$ . При ламинарном режиме течения задание начальных распределений  $K(t, \xi_0, \zeta)$  и  $\varepsilon(t, \xi_0, \zeta)$  может быть реализовано различными способами в зависимости от исследуемой задачи. В случае полностью развитого турбулентного пограничного слоя они могут быть заданы, как в стационарной задаче.

Аналогия между процессами переноса тепла и количества движения, приводящая к необходимости введения турбулентного числа Прандтля  $Pr_t$ , используется для моделирования турбулентной теплопроводности  $Pr_t = \mu_t c_p / \lambda_t$ . Для области около стенки турбулентное число Прандтля  $Pr_t$  представляется выражением от постоянных  $c_\mu, c_\lambda$  и функций  $c_3^*, c_{3\lambda}^*$ , в то время как коэффициент теплопроводности  $\lambda_t$  определяется по аналогии со второй формулой Прандтля – Колмогорова [21]

$$\frac{\lambda_t}{c_p} = c_\lambda f_\lambda \frac{K^2}{\varepsilon}, \quad f_\lambda = 1 - \exp(-c_{3\lambda}^* \zeta^+)$$

В ряде случаев сложная зависимость распределения числа  $Pr_t$  от свойств газа и граничных условий может быть учтена только введением дополнительных уравнений для нахождения турбулентного теплового потока [22].

Для определения динамических и турбулентных характеристик течения применяется численный метод расчета [9]. В основе метода лежит неявная конечно-разностная схема, обеспечивающая четвертый порядок точности по нормальной к поверхности координате с использованием граничных условий общего вида без изменения порядка точности интегрирования и однородности вычислительного алгоритма. В зависимости от структуры потока задаются шаги неравномерной сетки по пространственным координатам.

При расчетах нестационарных течений с высокой интенсивностью турбулентности уравнения сохранения импульса, энергии турбулентности и скорости ее диссипации из-за введения эффективных коэффициентов переноса становятся существенно нелинейными уже в ламинарной области течения, и это их свойство только усиливается при переходе к турбулентному режиму. Для ускорения сходимости решений в расчетах используются различные варианты линеаризации этих уравнений и построения итерационных алгоритмов.

**3. Стационарная теплопередача.** Для анализа влияния параметров колеблющегося турбулизированного набегающего потока предварительно численно решается стационарная задача исследования течения и теплообмена в переходной области турбулентного пограничного слоя на плоской пластине. Для данного расчета характеристик динамического и теплового пограничных слоев в качестве базисных выбраны экспериментальные данные [15]. В этих экспериментальных исследованиях ламинарный режим течения с высокой интенсивностью турбулентности называется псевдоламинарным (так же и в [23]), чтобы подчеркнуть его качественное отличие от течений с малыми интенсивностями турбулентности.

После обезразмеривания задача определяется параметрами набегающего потока:  $M_\infty$ ,  $Re_\infty$ ,  $Tu_\infty$ ,  $L_\infty$ . В численных расчетах для  $Re_\infty = 0.2835 \cdot 10^6$  ( $Re_\infty = V_\infty D / \nu_\infty$ ,  $D$  – длина плоской пластины) значения  $Tu_\infty$  изменяются в диапазоне 1–9%, а безразмерная скорость диссипации  $\epsilon'_\infty$  ( $\epsilon'_\infty = \epsilon_\infty D / V_\infty^3$ ) – в пределах  $0.184 \cdot 10^{-4}$ –0.184.

Для дозвукового низкоскоростного слабосжимаемого потока с умеренным значением скорости  $V_\infty = 5.6$  м/с ( $M_\infty = 0.0164$ ) и с турбулентностью высокой интенсивности применяются два варианта граничного условия на стенке для уравнения притока тепла  $q_w = \text{const}$  и  $i_w = \text{const}$ . При этом температурный фактор  $i_w$  варьируется в пределах 0.7–1.3 ( $i_w = T_w / T_0$ ,  $T_w$ ,  $T_0$  – температуры стенки и торможения), что отвечает условиям холодной и слабо нагретой стенки. На внешней границе пограничного слоя считается  $h_e = \text{const}$ .

В расчетах влияние интенсивности турбулентности набегающего потока  $Tu_\infty$  на положение перехода (конца), определяемого через критическое число Рейнольдса  $Re_{\theta, *}$ , принимается в соответствии с экспериментальными данными, представленными в [20].

Для сопоставления численных результатов пограничного слоя в области вниз по потоку с данными варианта теста ТЗН экспериментов [15] с  $Tu_\infty = 4.86\%$  и различными значениями  $\epsilon'_\infty$  задаются начальные профили продольной компоненты скорости  $u_0$  и кинетической энергии турбулентности  $K_0$  в начальном сечении  $\xi = \xi_0$  по их аппроксимированным экспериментальным распределениям. Начальный профиль энтальпии  $h$  при  $\xi = \xi_0$  может находиться из интеграла Крокко по профилю скорости  $u(\xi_0, \zeta)$  и величинам полной энтальпии  $H_0$  и энтальпии на стенке  $h_{w0} = h_w(\xi_0)$ , известным из тех же данных [15]

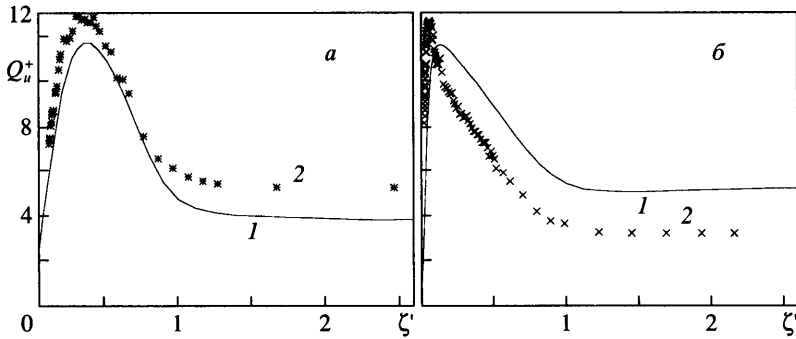
$$h(\xi_0, \zeta) = \frac{u(\xi_0, \zeta)}{u_e(\xi_0)} (H_0 - h_{w0}) + h_{w0}$$

Задание начального распределения  $\epsilon(\xi_0, \zeta)$  может быть реализовано в данной задаче по профилю  $K(\xi_0, \zeta)$ , распределению длины пути смешения Прандтля  $l(\xi_0, \zeta)$  и значению  $\epsilon_{e0} = \epsilon_e(\xi_0)$  [13].

Здесь приводятся численные результаты, полученные для  $q_w = \text{const}$  и  $Pr_t = 0.9$  в переходной и турбулентной областях, так как они качественно мало отличаются от решений при использовании моделей переменного турбулентного числа Прандтля.

Характер изменения вдоль пластины в переходной области профилей интенсивности турбулентности поперек пограничного слоя  $Q_u^+(\zeta')$  в зависимости от безразмерной нормальной координаты  $\zeta'$  (где  $Q_u^+ = K^{1/2} / u_e$ ,  $\zeta' = \zeta / \delta$ ,  $\delta$  – толщина пограничного слоя) дается на фиг. 1 совместно с экспериментальными данными (из [15]) для  $Tu_\infty = 4.86\%$  и различных значений продольной координаты  $\xi' = \xi / D$ . Расчетные профили  $Q_u^+(\zeta')$  соответствуют варианту анизотропной турбулентности  $\langle v^2 \rangle = \langle w^2 \rangle = 0.5 \langle u^2 \rangle$ ,  $K = \langle u^2 \rangle$ , что лучше отвечает условиям экспериментов [15], чем изотропный вариант.

В начале переходной области пограничного слоя при  $\xi' = 0.07$ , где еще существует влияние начальных профилей и весь слой еще тонок, расчетное распределение  $Q_u^+(\zeta')$  на фиг. 1, а согласуется по характеру изменений с экспериментальным, хотя располагается ниже последнего. В пограничном слое имеет место генерация энергии турбулентности и возникает максимальное значение  $Q_u^+(\zeta'_m)$ , на 1.5% меньшее экспериментального максимума. Координата  $\zeta'_m$  близка к началу логарифмической области.



Фиг. 1. Профили интенсивности турбулентности  $Q_u^+$  ( $I$ ) от  $\zeta'$ ; 2 – эксперимент; а, б –  $\xi' = 0.07, 0.5$

С ростом  $\zeta'$  во внешней области пограничного слоя такое различие в распределениях долго сохраняется, но затем ближе к расчетной границе пограничного слоя их соответствие улучшается. В этой начальной области перехода представление расчетных профилей в виде  $Q_u^+(\zeta')$  лучше соответствует экспериментальными данными, чем в виде  $Q_t^+(\zeta^+)$  (где  $Q_t^+ = K^{1/2}/u_*$ ,  $u_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$  – динамическая скорость).

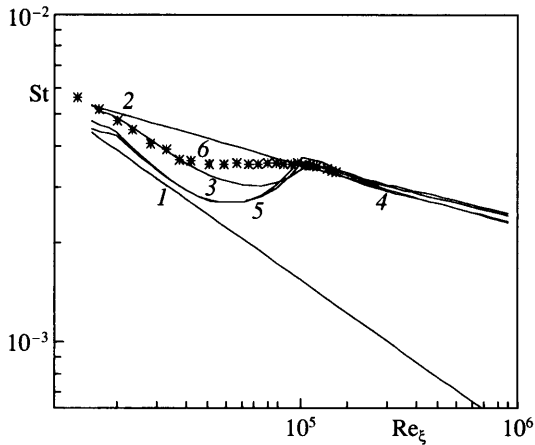
Вниз по потоку вдоль пластины в конце переходной области с увеличением значения  $\xi'$  от 0.4 до 0.5 местоположение максимума на фиг. 1, б несколько смещается ближе к стенке, сохраняя при этом его почти постоянную величину в этих переменных. Расчетные значения  $Q_u^+(\zeta')$  лежат выше экспериментальных данных вне вязкого подслоя, но вблизи стенки они несколько меньше.

Ближе к области полностью развитого турбулентного режима при  $\xi' = 0.5$  в вязком подслое численное решение для  $Q_u^+$  на фиг. 1, б располагается также ниже экспериментальных значений, но согласование с ними несколько лучше по величине максимума и темпу роста кривой. В логарифмической и внешней областях различие этих значений почти постоянно. В начале области полностью развитого турбулентного режима ( $\xi' = 0.6$ ) соответствие становится наилучшим. Для распределений интенсивности в виде  $Q_t^+(\zeta^+)$  в пристеночной области отмечаются те же характерные особенности, но при еще лучшем согласовании численных решений и опытных данных.

С ростом интенсивности  $Tu_\infty$  от значения 4.86% тепловой переход, как и динамический, смещается несколько вверх по потоку. Тепловое состояние обтекаемой поверхности будет характеризоваться распределениями локального коэффициента теплопередачи  $St = q_w/[\rho_e u_e (h_w - H_0)]$ , зависящего от локальных чисел Рейнольдса  $Re_\xi$  и  $Re_\theta$ , для обоих вариантов граничного условия на стенке. Для значений  $Tu_\infty = 4.86\%$  и  $\epsilon'_\infty = 0.184 \cdot 10^{-2}$  численные решения 3–5 сопоставлены с эмпирическими соотношениями подобия ламинарных и турбулентных пограничных слоев – распределения 1, 2 для  $St(Re_\xi)$  и  $St(Re_\theta)$

$$St(Re_\xi) = 0.55Re_\xi^{-0.5}; \quad St(Re_\theta) = 0.365Re_\theta^{-1} \quad (3.1)$$

$$St(Re_\xi) = 0.0367Re_\xi^{-0.2}; \quad St(Re_\theta) = 0.0157Re_\theta^{-0.25} \quad (3.2)$$



Фиг. 2. Распределения числа  $St(Re_\xi)$ : 1, 2 – эмпирические соотношения (3.1) и (3.2) для ламинарного и турбулентного режимов, 3 –  $q_w = \text{const}$ , 4, 5 –  $i_w = 1.024, 0.79$ , 6 – эксперимент

Кривые 3, 4 на фиг. 2 получены для условий нагретой стенки и кривая 5 – холодной. Кривая 3 числа  $St(Re_\xi)$  при задании на стенке  $q_w = \text{const}$  лучше подтверждает эксперименты 6, чем кривые 4, 5 ( $i_w = \text{const}$ ), как в начале псевдоламинарной области, так и в зоне перехода. Во всех случаях в расчетах переход реализуется несколько ниже по потоку, чем в экспериментах. Кривые 4, 5 в начале области имеют значения, меньшие экспериментальных данных.

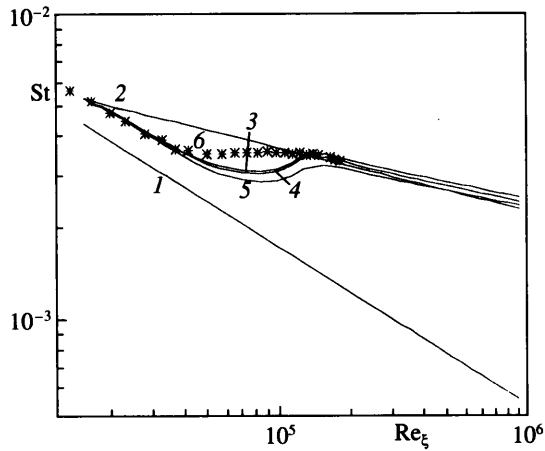
Расчетные распределения  $St$  от  $Re_\xi$  и  $Re_\theta$  в отличие от экспериментальных данных немонотонны, и их кривые имеют минимум. В области полностью развитого турбулентного потока кривые распределений  $St(Re_\xi)$  и  $St(Re_\theta)$  в основном подтверждают соотношения подобия, хотя уровни значений расчетных кривых несколько выше.

Влияние скорости диссипации  $\epsilon'_\infty$  на распределения чисел  $St(Re_\xi)$  не столь значительно, как интенсивности турбулентности, хотя кривые численных решений (3–5 на фиг. 3) для  $Tu_\infty = 4.86\%$  при условии постоянства на стенке теплового потока заметно различаются с изменением  $\epsilon'_\infty$  в диапазоне  $0.184 \cdot 10^{-3} - 0.184 \cdot 10^{-1}$ . С увеличением  $\epsilon'_\infty$  тепловой переход смещается несколько вниз по потоку. Все распределения локального коэффициента теплопередачи в начале области хорошо согласуются с экспериментальными данными 6. Из расчетных распределений значения кривой 3 ( $\epsilon'_\infty = 0.184 \cdot 10^{-3}$ ) лучше соответствуют этим данным, хотя лежат ниже. В области полностью развитого турбулентного режима расчетные кривые располагаются выше значений соотношения подобия.

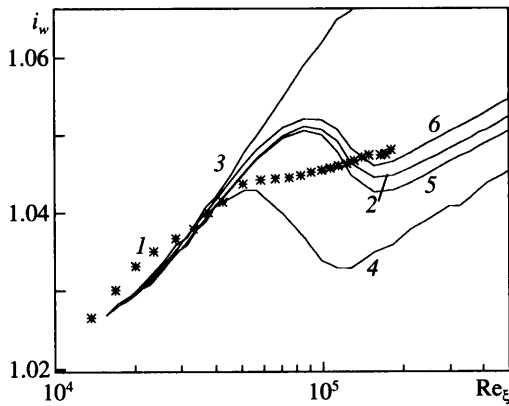
Для зависимостей  $St(Re_\theta)$  влияние  $\epsilon'_\infty$  на тепловой переход в основном подобное, как для распределений  $St(Re_\xi)$ . В начале переходной области расчетные кривые приближаются к экспериментальным данным и значениям соотношений (3.2).

Представленные на фиг. 2, 3 распределения коэффициента теплопередачи  $St$  получены при условии  $q_w = \text{const}$ , а температура поверхности  $T_w$  (или температурный фактор  $i_w$ ) определяется в процессе расчета пограничного слоя. Зависимости  $i_w$  на фиг. 4 показывают их небольшой рост с увеличением локального числа Рейнольдса  $Re_\xi$ . Но если этот рост в экспериментах почти монотонен (данные 1), то численные расчеты 2, 5, 6



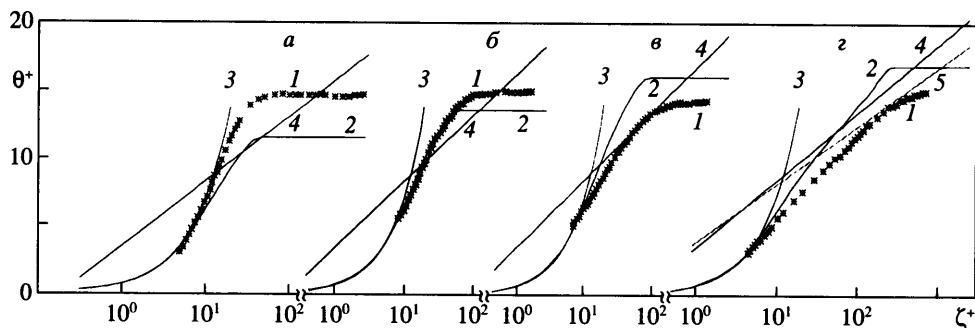


Фиг. 3. Распределения числа  $St(Re_\xi)$ : 1, 2 – для ламинарного и турбулентного режимов по (3.1), (3.2), 3–5 –  $q_w = \text{const}$ ,  $\epsilon'_\infty = 0.184 \cdot 10^{-3}$ ,  $0.184 \cdot 10^{-2}$ ,  $0.184 \cdot 10^{-1}$ ; 6 – эксперимент



Фиг. 4. Распределения температурного фактора  $i_w(Re_\xi)$  вдоль поверхности: 1 – эксперимент; 2, 5, 6 –  $\epsilon'_\infty = 0.184 \cdot 10^{-2}$ ,  $0.184 \cdot 10^{-3}$ ,  $0.184 \cdot 10^{-1}$  для  $Tu_\infty = 4.86\%$ ; 3, 4 –  $Tu_\infty = 0.86$  и  $8.86\%$  для  $\epsilon'_\infty = 0.184 \cdot 10^{-2}$

дают локальный максимум в области перехода для  $Tu_\infty = 4.86\%$ . Начало теплового перехода в экспериментальных исследованиях часто определяется для таких условий на стенке положением максимального значения  $i_w$ , конец – минимумом [23]. В целом увеличение температурного фактора  $i_w$  небольшое и составляет около 3% на этом интервале изменения числа Рейнольдса  $Re_\xi$  (или  $Re_\theta$ ). Ламинарный режим течения (3), полученный при много меньшей интенсивности  $Tu_\infty = 0.86\%$  (затянутый переход), характеризуется большими значениями  $i_w$ , чем переходные (2) и турбулентные режимы (4). Последний расчет соответствует значению  $Tu_\infty = 8.86\%$ , когда тепловой переход наступает раньше. Это увеличение температурного фактора в ламинарном потоке связано с необходимостью создания большей разности температуры для получения заданного постоянного теплового потока на поверхности в связи с меньшей диффузион-



Фиг. 5. Профили приведенной температуры  $\theta^+$  от  $\zeta^+$  в пограничном слое (а)–(г) для значений  $\xi' = 0.07; 0.15; 0.25; 0.6$ : 1 – эксперимент; 2 – расчет; 3 –  $\theta^+ = \text{Pr} \zeta^+$ ; 4, 5 –  $\theta^+ = 2.12 \ln \zeta^+ + 3.5$ ,  $\theta^+ = 4.2 \lg \zeta^+ + 3.9$

ной молекулярной теплопередачей, чем при молярном турбулентном теплообмене. Уменьшение  $\epsilon'_\infty$  с  $0.184 \cdot 10^{-2}$  до  $0.184 \cdot 10^{-3}$  приводит в расчетах к небольшому падению значений температуры поверхности  $T_w$  (кривая 5) по сравнению с зависимостью 2. Наоборот, увеличение  $\epsilon'_\infty$  до  $0.184 \cdot 10^{-1}$  (б) вызывает небольшой рост значений зависимости  $i_w$ . В целом при больших числах  $\text{Re}_\xi$  все расчетные распределения 2, 5, 6, полученные при  $\text{Tu}_\infty = 4.86\%$ , выходят на экспериментальные значения как по самой температуре, так и по темпу ее возрастания.

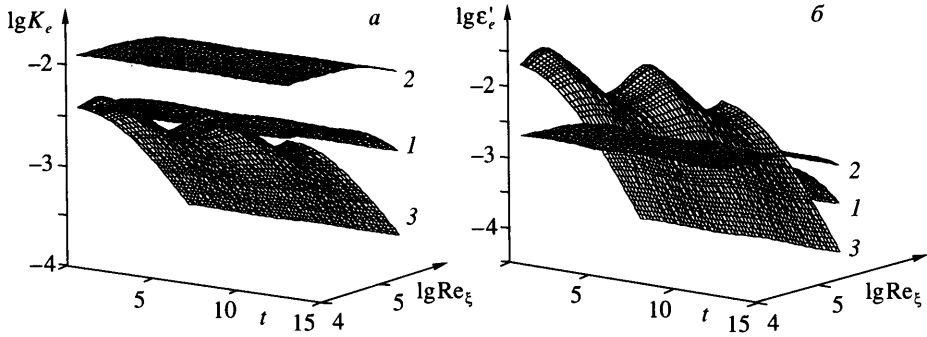
Профили приведенной температуры  $\theta^+$  от  $\zeta^+$  в пограничном слое на фиг. 5, а–г показывают ее эволюцию вдоль обтекаемой пластины в переходной области от ламинарного до турбулентного режима. Здесь  $\theta^+ = (T - T_w)/T_*$ ,  $T_* = q_w/(c_p \rho u_*)$  – приведенная и динамическая температуры. Если первые два расчетных профиля 2 на фиг. 5, а, б близки в зоне ламинарного подслоя и буферной зоне к ламинарному распределению 3 –  $\theta^+ = \text{Pr} \zeta^+$ , то последние два, медленно меняясь, приближаются к турбулентным распределениям 4, 5

$$\theta^+ = 2.12 \ln \zeta^+ + 3.5, \quad \theta^+ = 4.2 \lg \zeta^+ + 3.9$$

Последний расчетный профиль при  $\xi' = 0.6$  имеет наклон, уже близкий к наклону 4. Сопоставление расчетной кривой 2 с экспериментальными данными 1 показывает, что наилучшее их совпадение отмечается во втором положении  $\xi' = 0.15$ , где только во внешней области опытные данные превышают численные решения. Дальше вниз по потоку при значениях  $\xi' = 0.25$  и  $0.6$  расчетные значения  $\theta^+$  превосходят экспериментальные. Лучшее согласование этих данных во всем пограничном слое отмечается при наибольших значениях  $\xi'$ , когда переходные процессы в теплопередаче заканчиваются и режим течения становится достаточно близким к полностью развитому турбулентному.

**4. Нестационарная теплопередача.** Влияние предыстории турбулированного потока на развитие пульсационных характеристик движения и теплопередачи на плоской пластине в нестационарном пограничном слое с осциллирующим распределением внешней скорости (1.4) исследуется численно при ламинарном, переходном и турбулентном режимах.

Для ламинарного режима течения Лайтхиллом аналитически определены формулы для коэффициента трения  $2g = C_f \text{Re}_\xi^{0.5}$  в случаях приведенной частоты  $\omega' \gg 1$  или

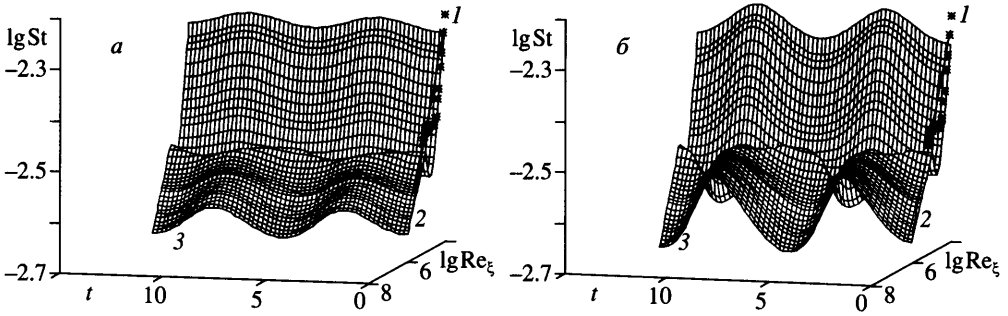


Фиг. 6. Пространственно-временные распределения кинетической энергии турбулентности  $K'_e(\tau, Re_\xi)$ (а) и скорости ее диссипации  $\epsilon'_e(\tau, Re_\xi)$ (б) на внешней границе пограничного слоя для  $A_0 = 0.352, f = 1$  Гц: 1, 2 –  $Tu_\infty = 4.86, 8.86\%$  и  $\epsilon'_\infty = 0.184 \cdot 10^{-2}$ , 3 –  $Tu_\infty = 4.86\%, \epsilon'_\infty = 0.184 \cdot 10^{-1}$

$\omega' \ll 1$  ( $\omega' = \omega \xi / u_0$ ) [1], где  $C_f = 2\tau_w / (\rho_e u_0^2)$ ,  $Re_\xi = u_0 \xi / \nu_e$ . Приведенная частота  $\omega'$  рассматривается здесь как безразмерная координата  $\xi = \xi / D_\omega$ , если положить число Струхала  $Sh = D_\omega \omega / u_0 = 1$ , а масштаб длины  $D_\omega = u_0 / \omega$ . При этом фазовый угол  $\varphi$  между распределениями внешней скорости  $u_e$  и напряжением трения на стенке для функции  $g$  в сечении  $\xi = \xi_0$  является одной из основных характеристик нестационарного движения. Для умеренных значений амплитуды колебаний  $A_0$  ( $0.147 \leq A_0 \leq 0.352$ ) и  $f = \omega / 2\pi = 0.33$  и 1 Гц при ламинарном режиме на плоской пластине в [17] установлено соответствие распределений расчетного значения фазового угла  $\varphi$  от приведенной частоты  $\omega'$  с аналитическими результатами [1] и численными данными [24].

Для турбулентного режима течения численные результаты [17] получены в соответствии с экспериментальными данными [25] для параметров колебаний и числа Рейнольдса  $Re_\infty = 1.25 \cdot 10^6$  ( $Re_\infty = V_\infty D / \nu_\infty, D = V_\infty / f$ ). Параметры турбулентности набегающего потока варьировались в широких диапазонах  $Tu_\infty = 3\text{--}6\%$  и  $\epsilon'_\infty = 0.184 \cdot 10^{-2} \text{--} 0.184 \cdot 10^{-1}$ . Найдены свойства распределений  $\varphi$  от  $\omega'$  в переходной и турбулентной областях для умеренных значений амплитуды  $A_0$ .

На пространственно-временные распределения кинетической энергии  $K'_e(\tau, Re_\xi)$  и скорости ее диссипации  $\epsilon'_e(\tau, Re_\xi)$  на внешней границе пограничного слоя влияют кроме динамических параметров колебаний оба параметра турбулентности:  $Tu_\infty$  и  $\epsilon'_\infty$  – в набегающем потоке ( $\tau = \omega t$ ). Для  $A_0 = 0.352, f = 1$  значения поверхностей  $K'_e$  и  $\epsilon'_e$  на фиг. 6, а, б определяются в основном их начальными величинами:  $K'_e(0, Re_{\xi 0}) = K'_{e0}$ ,  $\epsilon'_e(0, Re_{\xi 0}) = \epsilon'_{e0}$ , т.е. их значениями в набегающем потоке. Так, для более высоких значений интенсивности  $Tu_\infty$  поверхности функций  $K'_e$  и  $\epsilon'_e$  располагаются выше поверхностей более низких  $Tu_\infty$  для одного и того же  $\epsilon'_\infty$ . Причем для функции  $K'_e$  эта тенденция к расслоению от  $Tu_\infty$  еще заметнее. Амплитуды колебаний распределений  $K'_e$  и  $\epsilon'_e$  от времени в плоскости  $Re_\xi = \text{const}$  увеличиваются с ростом  $\epsilon'_{e0}$  и уменьшаются с



Фиг. 7. Пространственно-временные распределения числа  $St(\tau, Re_\xi)$  (а), (б) –  $A_0 = 0.147, 0.352$  для  $Tu_\infty = 4.86\%$ ,  $\epsilon'_\infty = 0.184 \cdot 10^{-2}$ ,  $f = 1$ : 1 – эксперимент; 2 – турбулентная зависимость (3.2); 3 – расчет

увеличением  $K'_{e0}$ . Для фиксированного  $\epsilon'_\infty = 0.184 \cdot 10^{-2}$  возрастание  $Tu_\infty$  от 4.86 до 8.86% (поверхности 1 и 2 на фиг. 6) приводит к некоторому уменьшению амплитуды  $K'_e$ , в то же время рост  $\epsilon'_\infty$  увеличивает амплитуду колебаний (3). Для приведенных поверхностей отмечается падение значений  $K'_e$  и  $\epsilon'_e$  с возрастанием продольной координаты при каждом  $\tau = \text{const}$ , но темп падения определяется соотношением параметров  $\epsilon'_{e0}$  и  $K'_{e0}$ .

Наибольшие амплитуды колебаний во времени рассматриваемые зависимости  $K'_e(\tau, Re_\xi)$  и  $\epsilon'_e(\tau, Re_\xi)$  имеют в начале плоской пластины, где режим течения по принятой модели предполагается ламинарным. Затем вниз по течению флуктуации по времени этих функций быстро затухают. Поэтому влияние этих нестационарных колебаний  $K'_e$  и  $\epsilon'_e$  на области пограничного слоя с переходными и турбулентными режимами определяется соотношением параметров в набегающем потоке.

Для расчетов теплообмена в нестационарном пограничном слое необходимо задать распределение энтальпии на внешней границе. Так как течение является низкоскоростным с малым  $M_\infty$ , изменения давления в невязком потоке при адиабатическом движении слабо отражаются на распределении энтальпии. Вследствие этого предполагается, что начальные условия по времени известны из решения стационарной задачи в разд. 3 с  $h_e = \text{const}$  в соответствии с базисными экспериментами [15], и далее считается  $h_e \approx h_\infty$ .

Поверхность коэффициента теплопередачи  $St(\tau, Re_\xi)$  при граничном условии  $q_w = \text{const}$  на фиг.7 отражает закономерности изменения характеристик теплообмена при всех режимах течения. Число  $St$  здесь переменное за счет изменения температурного фактора  $i_w$ . В начальном сечении при  $t = 0$  расчетное распределение  $St(0, Re_\xi)$  от  $Re_\xi$  на фиг. 7 для  $Tu_\infty = 4.86\%$  соответствует экспериментальным данным 1 из [15] и эмпирическому соотношению (3.2) (2) так же, как на фиг. 2. С ростом  $\tau$  это начальное распределение видоизменяется, но кривые  $St$  в каждом сечении  $\tau = \text{const}$  в переходной области имеют выраженные локальные экстремумы. При уменьшении внешней скорости  $u_e$  они смещаются вниз по потоку, при этом минимальные значения  $St$  падают, а максимальные остаются практически неизменными. С увеличением  $u_e$  в течение второй половины первого периода эти тенденции в распределении числа Стантона изменяются на противоположные и его значения возвращаются к исходным при  $\tau = 2\pi$ .

В каждом сечении  $Re_\xi = \text{const}$  кривые числа  $St$  на фиг. 7, а ( $A_0 = 0.147$ ) имеют гармонический характер для всех режимов течения как распределение внешней скорости, но со сдвигом фазы. При ламинарном режиме амплитуды колебаний  $St$  меньше, чем при переходном и турбулентном режимах течения. Расчетная поверхность  $St$  для большего значения  $Tu_\infty = 8.86\%$  начинает отличаться от распределения на фиг. 7, а для  $Tu_\infty = 4.86\%$  в основном в переходной и турбулентной областях. В то же время увеличение амплитуды  $A_0$  внешней скорости от 0.147 до 0.352 на фиг. 7, б отражается не только на росте амплитуды колебаний во времени поверхности  $St$ , но и на качественном изменении в области перехода.

Состояние теплообмена на стенке характеризуют также пространственно-временные распределения температурного фактора  $i_w(\tau, Re_\xi)$  (фиг. 8), показывающие общую тенденцию его увеличения вниз по потоку, за исключением области перехода, где характер изменения немонотонен. В то же время темп роста  $i_w$  при ламинарном режиме превосходит темп в развитом турбулентном потоке. Со временем локальный пик в распределении  $i_w$  смещается вниз по потоку, несколько увеличиваясь по величине. С ростом продольной координаты  $Re_\xi$  от этой локальной вершины при  $\tau = \pi$  следует более резкий провал в значениях  $i_w$  и затем медленное увеличение с наименьшим темпом. Пик значений  $i_w$  достигается в турбулентной области сначала в начальном сечении  $\tau = 0$  и затем повторяется через период во времени. Максимальное влияние колебаний внешней скорости сказывается на распределении температурного фактора в переходной и турбулентной областях течения, где амплитуды его колебаний превосходят соответствующие значения амплитуд ламинарного режима.

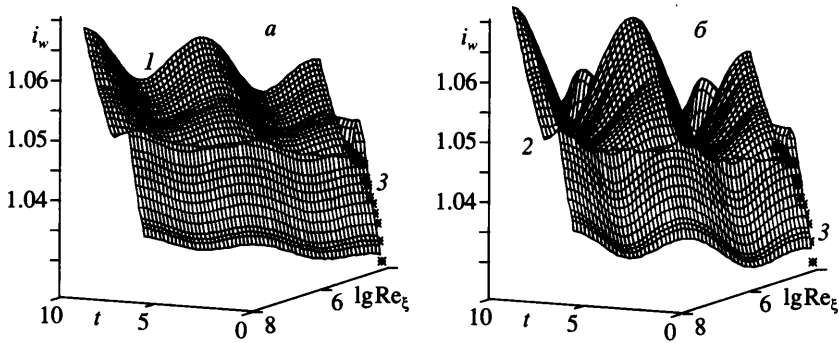
Влияние степени турбулентности набегающего потока и тем самым режима течения на пространственно-временные распределения  $i_w(\tau, Re_\xi)$  получено сопоставлением поверхностей для  $Tu_\infty = 4.86$  и  $8.86\%$ . Для  $Tu_\infty = 4.86$  уже в переходной области значения  $i_w$  превосходят значения поверхности с  $Tu_\infty = 8.86\%$ . Вниз по потоку с возрастанием числа Рейнольдса различие между этими поверхностями увеличивается. При большем значении  $Tu_\infty$  переход несколько смещен вверх по потоку. Как в стационарном случае, при одних и тех же числах Рейнольдса при ламинарном режиме достигаются большие значения температурного фактора, чем при турбулентном. Рост амплитуды колебаний  $A_0$  внешней скорости усиливает колебания температурного фактора  $i_w$  во времени при всех режимах течения. На фиг. 8 увеличение  $A_0$  от 0.147 до 0.352 приводит к возрастанию амплитуды колебаний  $i_w$ , причем различие поверхностей 1 и 2 начинается в переходной области и заметнее вниз по потоку.

**Заключение.** Применение модифицированной  $K$ - $\epsilon$ -модели турбулентности дало возможность определить воздействие параметров турбулентности на характеристики обтекания и теплопередачи в условиях как установившегося, так и нестационарного потока при всех режимах течения в пограничном слое, включая переходный.

Найденные характерные свойства внутренней структуры пограничного слоя при переходе от псевдоламинарного к турбулентному режиму в основном отражают закономерности изменений характеристик турбулентности, установленные в экспериментах. Так, профиль интенсивности турбулентности в пограничном слое имеет максимум, смещающийся несколько ближе к стенке с ростом продольной координаты.

Модификация модели турбулентности позволила сделать более точным согласование расчетных результатов с базисными экспериментальными данными не только по динамическому, но и по тепловому переходу в условиях высокой интенсивности турбулентности набегающего потока.

При наличии гармонических колебаний скорости набегающего потока во времени уровень интенсивности турбулентности в нем имеет определяющее влияние на характеристики теплообмена в нестационарном пограничном слое. Для умеренных амплитуд колебаний в условиях высокой интенсивности турбулентности распределения коэффициента теплопередачи и температурного фактора, соответствующие в началь-



Фиг. 8. Пространственно-временные распределения температурного фактора  $i_w(\tau, Re_\xi)$  (а), (б) –  $A_0 = 0.147, 0.352$  для  $Tu_\infty = 4.86\%$ ,  $\epsilon'_\infty = 0.184 \cdot 10^{-2}$ ,  $f = 1$ : 1, 2 – расчет, 3 – эксперимент

ный момент времени стационарным экспериментальным параметрам потока, быстро перестраиваются во всех областях течения, особенно в переходной, сохраняя при этом гармонический характер. Амплитуды колебаний числа Стантона и температурного фактора в переходной и турбулентной областях превосходят амплитуды ламинарного режима.

Значения параметров турбулентности набегающего потока влияют на временные распределения этих параметров на внешней границе пограничного слоя, наибольшим образом в начальной области течения. Рост интенсивности турбулентности смещает вверх по потоку переходную область. Увеличение амплитуды колебаний внешней скорости приводит к количественному росту амплитуд колебаний всех расчетных характеристик вниз по потоку, наиболее интенсивных в турбулентной области, при этом в области перехода отмечаются качественные изменения. Температурный фактор увеличивается вниз по потоку, за исключением области перехода, где его изменения по продольной координате немонотонны. При ламинарном режиме темп роста температурного фактора больше, чем в развитом турбулентном течении.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lighthill M.J. The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A: 1954. V. 224. №. 1156. P. 1–23.
2. Addison J.S., Hodson H.P. Modeling of unsteady transitional boundary layers // Trans. ASME. J. Turbomach. 1992. V. 114. № 3. P. 580–589.
3. Драйден Х.Л. Переход ламинарного течения в турбулентное // Турбулентные течения и теплопередача. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 9–82.
4. Глушко Г.С. Переход к турбулентному режиму течения в пограничном слое плоской пластины при различных масштабах турбулентности набегающего потока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 68–70.
5. Совершенный В.Д. Уравнения турбулизированного потока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 31–35.
6. Луцки В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Исследование перехода к турбулентности в пограничном слое при большой интенсивности внешних возмущений с помощью трехпараметрической модели // Проблемы современной механики. М.: Изд-во МГУ, 1983. Ч. 1. С. 127–138.
7. Telionis D. P. Review-unsteady boundary layers, separated and attached // Trans. ASME. J. Fluids Eng. 1979. V. 101. № 1. P.29–43.
8. Cousteix J. Three-dimensional and unsteady boundary-layer computations // Annu. Rev. Fluid Mech. 1986. V. 18. P. 173–196.

9. Алексин В.А., Кудряков А.М. Нестационарный периодический пограничный слой с зоной возвратного течения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 82–89.
10. Simpson R.L. Review. A review of some phenomena in turbulent flow separation // Trans. ASME. J. Fluids Eng. 1981. V. 103. № 4. P. 520–533.
11. Tsahalis D. T. Turbulent boundary layers with unsteady injection-suction // Trans. ASME. J. Fluids Eng. 1980. V. 102. № 3. P. 364–371.
12. Ковальногов Н.М., Шукин В.К., Филин И.В. Численный анализ теплоотдачи и трения в нестационарном пограничном слое // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1989. N 4. С. 146–155.
13. Алексин В.А. Моделирование влияния параметров турбулентности набегающего потока на пограничный слой криволинейного профиля // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 5. С. 79–89.
14. Transition modelling for turbomachinery II: An Updated Summ. of ERCOFTAC Trans. SIG Progr. 2nd WORKSHOP/Ed. A.M.Savill. Cambridge: Univ. Press, 1994. 226 p.
15. Erik E.Ya. Heat transfer effects in transitions // Turbulent Heat Transfer: Engin. Found. Conf. 1996. New York; San Diego, California, 1996. P. 1–47.
16. Зеркл Р.Д., Лансбури Р.Дж. Влияние турбулентности набегающего потока на теплопередачу к лопаткам турбины // Аэрокосм. исслед. 1989. № 10. С. 55–64.
17. Алексин В.А., Казейкин С.Н. Моделирование влияния параметров турбулентности набегающего потока на течение в нестационарном пограничном слое // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 6. С. 64–77.
18. Гиневский А.С., Иосилевич В.А., Колесников А.В., Лапин Ю.В., Пилипенко В.Н., Секундов А.Н. Методы расчета турбулентного пограничного слоя // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1978. Т. 11. С. 155–304.
19. Chien K.-Y. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low Reynolds-number turbulence model // AIAA Journal. 1982. V. 20. № 1. P. 33–38.
20. Abu-Ghannam B.J., Shaw R. Natural transition of boundary layers- the effect of turbulence, pressure gradient, and flow history // J. Mech. Eng. Sci. 1980. V. 22. N. 5. P. 213–228.
21. Cebeci T. A model for eddy conductivity and turbulent Prandtl number // Trans. ASME. Ser.C. J. Heat Transfer. 1973. V. 95. № 2. P. 227–234.
22. Sommer T.P., So R.M.C., Zhang H.S. Near-wall variable-Prandtl-number turbulence model for compressible flows // AIAA Journal. 1993. V. 31. N. 1. P. 27–35.
23. Дыбан Е.П., Эпик Э.Я. Теплообмен и гидродинамика турбулизированных потоков. Киев: Наук. думка, 1985. 295 с.
24. Cebeci T. Calculation of unsteady two-dimensional laminar and turbulent boundary layers with fluctuations in external velocity // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1977. V. 355. № 1681. P. 225–238.
25. Karlsson S.K.F. An unsteady turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1959. V. 5. Pt 4. P. 622–636.

Москва

Поступила в редакцию  
18.1.2002