

УДК 532.135:532.5.013.4

© 2003 г. И. А. МАКАРОВ

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ К СДВИГОВЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

Рассмотрено течение между двумя пластинами жидкости, подчиняющейся реологическому уравнению состояния де Витта с производной Яумана. Аналитически установлено, что в случае стационарного куэттовского течения имеют место устойчивость и неустойчивость течения к плоским сдвиговым возмущениям при числах Вайсенберга соответственно меньше и больше единицы. Численно и аналитически исследована фаза разгона течения, проведено сопоставление со случаем жидкости Олдройда, построены кривые нейтральной устойчивости. Отмечена принципиальная роль рассмотренного типа возмущений в общей совокупности типов неустойчивости, способных действовать на жидкость в таком течении.

*Ключевые слова:* устойчивость, вязкоупругость, модель де Витта, производная Яумана, модель Олдройда.

К настоящему времени для описания разнообразных свойств неньютоновских, в том числе вязкоупругих, жидкостей предложено множество уравнений состояния. Помимо правильного учета свойств реальных жидкостей важным требованием к реологической модели является инвариантность ее записи, отражающая объективность свойств описываемой среды. С этой точки зрения, интерес представляет модель де Витта с производной Яумана [1], имеющей одинаковый вид в ко- и контравариантной записи.

Еще одна особенность этой модели в сравнении, например, с широко применяемой моделью Олдройда [2–4] – это отличие от нуля обоих нормальных напряжений (важной особенности реальных вязкоупругих жидкостей) в стационарном течении между двумя пластинами. Это обстоятельство, а также более сложный вид данного уравнения состояния, возможно, являются причиной возникновения сдвиговой неустойчивости течения, обнаруженной в результате численных экспериментов и проанализированной в настоящей работе.

**1. Анализ устойчивости течения жидкости де Витта между двумя пластинами.** Уравнение состояния имеет вид [1]

$$\theta \frac{D_J \sigma}{D_J t} + \sigma = 2\mu d$$

$$\frac{D_J \sigma_{ij}}{D_J t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + v^k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^k} - \omega_{ik} \sigma_{jk} - \omega_{jk} \sigma_{ik}$$

$$d_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \right), \quad \omega_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \right)$$

где  $\theta$  – время релаксации,  $\mu$  – динамическая вязкость,  $\sigma$ ,  $d$ ,  $\omega$  – тензоры напряжений, скоростей деформации, завихренности. В предположении, что поперечная компонента скорости равна нулю и что вдоль пластин все характеристики течения не изменя-

ются, придем к соотношениям (здесь и далее в безразмерном виде) для нормальных компонент напряжений

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\sigma_{xx}}{W} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\sigma_{yy}}{W} = 0$$

где  $W = \theta V/H$  – число Вайсенберга,  $V$  – скорость верхней пластины,  $H$  – ширина зазора,  $u$  – продольная скорость течения,  $y$  – поперечная координата. Сложив эти соотношения, увидим, что для стационарного течения  $s \equiv \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 0$ . Для нестационарного течения, проинтегрировав, получаем  $s(t, y) = s(0, y) \exp(-t/W)$ . Предполагая, что  $t = 0$  – момент начала течения из состояния покоя или начала развития возмущений, имеем  $s(0, y) = 0$  и, следовательно,  $s(t, y) = 0$ , что позволяет исключить переменную  $\sigma_{yy}$  и рассматривать следующую систему уравнений движения и реологического состояния

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\sigma_{xx}}{W} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xx} + \frac{\sigma_{xy}}{W} = \frac{1}{W \text{Re}} \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.3}$$

где  $\text{Re} = \rho V H / \mu$  – число Рейнольдса,  $\rho$  – плотность жидкости.

Возмущения параметров течения будем рассматривать в виде фурье-разложений по переменной  $y$  на промежутке  $[0, 1]$  (между пластинами) с коэффициентами-функциями времени

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) \exp(2i\pi n y), \quad c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2}, & n > 0 \\ \frac{a_0}{2}, & n = 0 \\ \frac{a_n + ib_n}{2}, & n < 0 \end{cases}$$

где  $a_n, b_n$  ( $n \geq 1$ ) – коэффициенты Фурье при  $\sin$  и  $\cos$ . Линеаризуем систему (1.1)–(1.3) и формально подставим в нее слагаемые разложений возмущений для каждой отдельной гармоники. При  $n \geq 1$  придем к уравнению для комплексных фурье-коэффициентов возмущения скорости

$$A_3 \ddot{U} + A_2 \dot{U} + A_1 U + A_0 U = 0 \tag{1.4}$$

с характеристическим уравнением

$$A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0$$

$$A_0 = \frac{(2\pi n)^2 (1 - \sigma_{xx} W \text{Re} - \sigma_{xy} W^2 \text{Re} \partial_y u)}{W^2 \text{Re}} \tag{1.5}$$

$$A_1 = \frac{(2\pi n)^2 (W - \sigma_{xx} W^2 \text{Re}) + ((W \partial_y u)^2 + 1) \text{Re}}{W^2 \text{Re}}, \quad A_2 = \frac{2}{W}, \quad A_3 = 1$$

под  $u, \sigma$  в данном случае понимаются невозмущенные значения.

Подробнее исследуем устойчивость стационарного куэттовского течения. В этом случае уравнение (1.4), очевидно, описывает решения для возмущений, поскольку в сущности является условием тождественного равенства нулю левых частей системы (1.1)–(1.3). Имеем

$$u(t, y) = y$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{\operatorname{Re} W + 1/W}, \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{\operatorname{Re} W^2 + 1} \quad (1.6)$$

Коэффициенты уравнения (1.4) примут вид

$$A_0 = \frac{(2\pi n)^2(1 - W^2)}{\operatorname{Re} W^2(1 + W^2)}, \quad A_1 = \frac{(2\pi n)^2 W + \operatorname{Re}(W^2 + 1)^2}{\operatorname{Re} W^2(W^2 + 1)}, \quad A_2 = \frac{2}{W}, \quad A_3 = 1$$

Заметим, что "нейтральная устойчивость" (т.е. возможность существования слабых возмущений с неизменной амплитудой) имеет место при  $W = 1$ , поскольку при этом  $A_0 = 0$ , и вещественный корень (1.5) обращается в 0, а действительные части комплексно-сопряженных корней, как нетрудно убедиться, отрицательны.

При  $W > 1$  имеет место неустойчивость течения. Действительно, представив уравнение (1.5) в форме

$$z(A_3 z^2 + A_2 z + A_1) = -A_0 \quad (1.7)$$

и заметив, что в данном случае  $A_0 < 0$ , а также что выражение в скобках при всех действительных  $z$  положительно так как, очевидно,  $A_2^2 - 4A_1 A_3 < 0$ , приходим к выводу, что действительный корень кубического уравнения положителен (что и означает неустойчивость).

При  $W < 1$  вещественное решение уравнения (1.5) отрицательно, поскольку теперь  $A_0 > 0$ , а в (1.7) выражение в скобках по-прежнему положительно определено.

Докажем, что действительная часть комплексно-сопряженных корней также отрицательна. Предположим противное: пусть при некотором  $W < 1$  эта величина положительна. Тогда, в силу непрерывной зависимости решения уравнения (1.5) от параметров и из-за того, что при  $W = 1$  действительная часть меньше 0, также должно существовать  $W' < 1$ , при котором эта величина равна 0. Уравнение (1.5) было бы представимо в этом случае в виде

$$(z + a)(z^2 + b) = 0$$

причем  $a = 2/W$ , а вещественный корень уравнения  $z'' = -2/W$ . Подставляя  $z''$  в (1.5), замечаем, что должно быть  $z'' = -A_0/A_1$  (поскольку первые два слагаемых левой части уничтожаются). Однако

$$-\frac{A_0}{A_1} = \frac{(2\pi n)^2(1 - W'^2)}{(2\pi n)^2 W'^2 + \operatorname{Re}(W'^2 + 1)^2} > -\frac{1 - W'^2}{W'^2} > -\frac{1}{W'^2} > z''$$

что противоречит предыдущему равенству и дает устойчивость при  $W < 1$ .

Для случая  $n = 0$  из системы (1.1)–(1.3) получается следующее соотношение для возмущения  $\sigma_{11}$

$$\ddot{\Sigma}_{11} + \frac{2}{W}\dot{\Sigma}_{11} + \left( (\partial_y u)^2 + \frac{1}{W^2} \right) \Sigma_{11} = 0$$

из которого следует безусловная устойчивость "нулевой моды" возмущений.

Итак, стационарное течение ямановской жидкости между двумя пластинами устойчиво при  $W < 1$  и неустойчиво при  $W > 1$ , при  $W = 1$  имеет место нейтральная устойчивость.

Обратим внимание, что критерий не зависит от числа Рейнольдса, так что возможна неустойчивость и при медленных течениях в безынерционном режиме, в отличие от результата [2], согласно которому течение олдرويدовской жидкости устойчиво к произвольным плоским возмущениям в таких условиях<sup>1</sup>.

В связи с олдرويدовской жидкостью применительно к чисто сдвиговым возмущениям и контравариантной форме отметим, что применение изложенного выше анализа к уравнениям плоскопараллельного течения [4] приводит к выводу об устойчивости течения, что фактически и имело место при численном моделировании течения, о котором идет речь в [4].

В случае нестационарного (плоскопараллельного) течения уравнение (1.4), вообще говоря, перестает давать решения для возмущений, поскольку невозмущенные значения  $\delta u$ ,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  теперь являются функциями времени и координаты и сами также должны разлагаться в ряд Фурье. Возмущения в этом случае должны удовлетворять соотношению

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n(t, y) \exp(2i\pi n y) = 0$$

где  $L_n$  – левые части (1.4) при различных  $n$ , для каждого  $y$  в рассматриваемом интервале. Однако и в этом случае наличие у уравнения (1.4) невозрастающих решений означает устойчивость течения. Наличие у (1.4) возрастающих решений при некоторых  $y$  строго интерпретировать достаточно сложно, поскольку, вообще говоря, при разных  $y$  это уравнение может иметь различные множества решений, и лишь их пересечение является решением для возмущения во всем зазоре между пластинами. Но, как показали описываемые ниже численные эксперименты, появление при некоторых  $y$  возрастающих решений (1.4) в какой-либо части зазора чаще всего свидетельствует о возникновении через определенное время неустойчивости именно в этой части.

Уравнение (1.4) в этом случае имеет общее решение

$$C_1(t) \exp \Lambda_1(t) + C_2(t) \exp \Lambda_2(t) + C_3(t) \exp \Lambda_3(t)$$

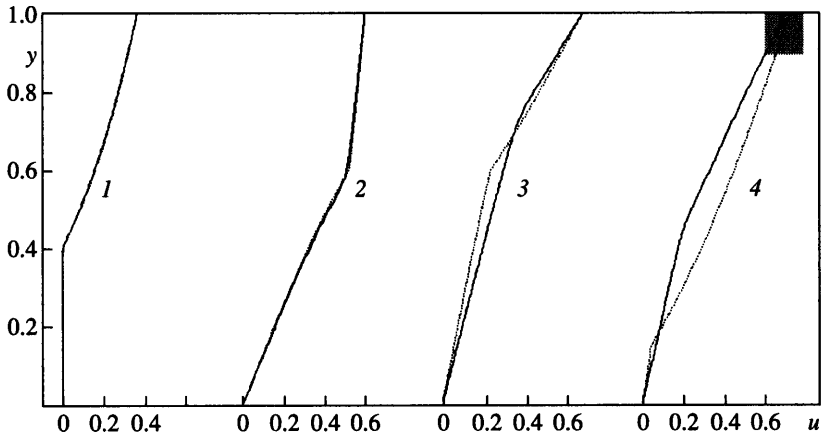
где  $\Lambda_{1,2,3}(t) = \int \lambda_{1,2,3}(t) dt$ ,  $\lambda_{1,2,3}(t)$  – корни уравнения (3), а функции  $C_{1,2,3}(t)$  могут быть определены в соответствии с методом вариации постоянной [5] из некоторой системы относительно первых производных этих функций. Легко сделать вывод, что у уравнения существуют решения, при которых любая из функций  $C_{1,2,3}(t)$  не стремится к 0 при  $t \rightarrow \infty$  (имея аддитивную постоянную), и, если соответствующее значение  $\lambda$  имеет положительную действительную часть в течение определенной фазы течения, соответствующее слагаемое решения возрастает. Этот факт использовался при анализе описываемых ниже численных результатов.

**2. Численное исследование устойчивости нестационарного течения.** Исследовалась фаза установления реометрического течения из состояния покоя с законом движения верхней пластины

$$u(t, 1) = \frac{\alpha t}{1 + \alpha t}$$

( $\alpha$  – параметр темпа ее разгона) при покоящейся нижней пластине (ср. [4, 6]).

<sup>1</sup> При анализе устойчивости в [2] существенно используется обращение в нуль возмущений скорости на пластинах (вследствие условий прилипания); сформулированный здесь вывод о неустойчивости, естественно, остается в силе и при наложении этих условий (например, для возмущений, разлагающихся в ряд Фурье лишь по синусам и при  $a_0 = 0$ ). Общий же случай отличия от нуля возмущений скорости можно интерпретировать, например, как ситуацию, когда возмущения генерируются пластинами (колебания скорости движения).



Фиг. 1. Профили течения жидкости Де Витта (сплошные кривые) в сопоставлении с аналогичными фазами течения жидкости, подчиняющейся контравариантной модели Олдройда (пунктирные кривые), при  $Re = 0.1$ ,  $W = 10$ ,  $\alpha = 1$ . Оттенен участок начала развития неустойчивости: 1 –  $t = 0.6$ , 2 – 1.6, 3 – 2.4, 4 – 2.851

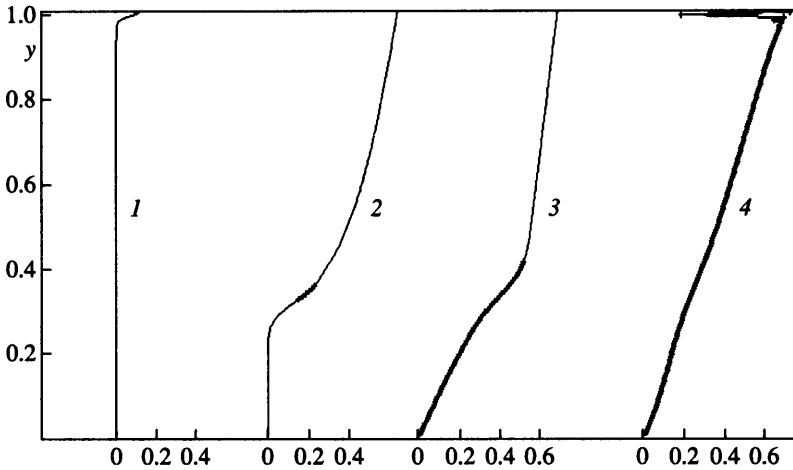
Система (1.1)–(1.3) аппроксимировалась конечно-разностным методом, для производных по  $y$  использовались центральные разности (кроме крайних узлов), временная зависимость описывалась по чисто неявной схеме, чтобы свести к минимуму влияние численных возмущений. Значения для нелинейных членов брались с неявного временного слоя. Конечно-разностная система уравнений решалась методом последовательной верхней релаксации.

Разбиение в большинстве вычислений состояло из 170 узлов. В отдельных случаях (для удовлетворительного отражения тонкой структуры течения при  $Re > 10$ ) число узлов доходило до 300. Шаг по времени варьировался в пределах от 0.0001 до 0.001.

На фиг.1 сопоставлены результаты вычислений для модели Де Витта и контравариантной модели Олдройда (подробно описанных в [4]). Наблюдается практически полное совпадение течений для первой и второй фаз. Такое можно было ожидать, поскольку, во-первых, ямановская производная может быть получена из определенной комбинации ко- и контравариантной производных Олдройда<sup>2</sup> [1, стр. 354–355], во-вторых, первое и третье уравнения системы (1.1)–(1.3) при малых  $\sigma_{xx}$  близки к уравнениям плоского течения для контравариантной модели Олдройда [4]. Кроме того, оба решения близки к условному чисто волновому решению, построенному в [4]. На третьей фазе также наблюдается сходство течений. Наконец, на четвертой фазе, в силу существенного увеличения нормальных напряжений, профиль де Витта отклоняется от олдройдовского и одновременно наблюдается начало "взрыва" (внезапного резкого роста амплитуды возмущений) – соответствующая область выделена прямоугольником.

Для более детального изучения возможности развития возмущений при вычислениях периодически в каждом узле определялись коэффициенты и корни кубического уравнения (1.5) (по формулам Кардано) для  $n$  от 1 до двойного числа узлов сетки, иногда максимальное значение  $n$  достигало 30000 (что существенно увеличивало время счета), но качественного изменения в прогноз неустойчивости это увеличение не вносило.

<sup>2</sup> Отметим, кроме того, что производные для всех трех моделей могут быть получены из выражения для производной в обобщенной форме моделей Олдройда (2.4) [7] при  $a = 0, 1, -1$  соответственно.



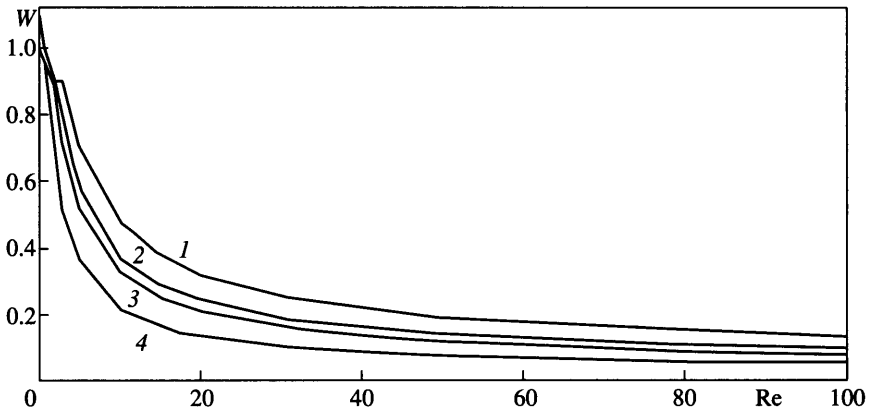
Фиг. 2: Эпюры скоростей течения жидкости, подчиняющейся модели Де Витта, при  $Re = 0.5$ ,  $W = 1.5$ ,  $\alpha = 10$ : 1 –  $t = 0.017$ , 2 –  $0.629$ , 3 –  $1.226$ , 4 –  $2.727$

На фиг. 2 узлы, где корни имели положительную вещественную часть, маркированы точками. Фигура отражает в целом типичную для большинства расчетов ситуацию: приближение к моменту "взрыва" сопровождается ростом числа "меченых" точек, в момент "взрыва" метками охвачена или вся область течения, или та ее часть, где произойдет "взрыв". Чаще всего область, где неустойчивость прогнозировалась и затем фактически наступала, располагалась вблизи одной из пластин: чаще у верхней, но нередко и у нижней (как, например, при  $Re = 0.5$ ,  $W = 2$ ,  $\alpha = 10$  в момент времени 1.98). При  $Re \geq 10$  иногда "меченой" оказывалась единственная точка, примыкающая к верхней пластине, так что последнюю можно было рассматривать в этом случае как генератор неустойчивости.

В целом, среди большого количества сделанных расчетов не отмечено ни одного случая, когда бы неустойчивость прогнозировалась, но реально не наступала или когда бы она фактически развивалась при отсутствии прогноза. Между этими двумя моментами (прогноз и реализация) могло проходить некоторое время (до 5–10 единиц), что может быть связано со стабилизирующим действием нелинейных факторов либо с влиянием погрешностей аппроксимации.

Выполненные расчеты систематизированы путем построения кривых нейтральной устойчивости (фиг. 3). При этом число Рейнольдса, в соответствии с типичными параметрами конкретных жидкостей [4, 7], изменялось от 100 до 0.05 (при дальнейшем уменьшении возникали проблемы со сходимостью итерационного процесса в численном решении), шаг по изменению  $W$  составлял не более 0.005. Видно, что и увеличение  $Re$ , и усиление темпа разгона течения уменьшают критическое значение  $W$ , при котором наступает неустойчивость. Очевидно также, что каждая из кривых имеет предел при стремлении  $Re$  к нулю число, близкое к единице, – установленный предел устойчивости для стационарного куэттовского течения.

Кратко опишем результаты численного исследования стационарного куэттовского течения, которое было проведено с целью косвенного подтверждения правильности вывода о развитии неустойчивости, когда  $W$  становится больше 1 (раздел 1). В начальный момент профиль скорости задавался линейным, а величины нормальных напряжений – по формулам (1.6). В последующие моменты времени скорость пластины под-



Фиг. 3. Кривые нейтральной устойчивости течения жидкости Де Витта при  $\alpha = 1$  (1), 2 (2), 3 (3), 10 (4)

держивалась равной 1, а скорость жидкости и напряжения вычислялись. При  $Re = 0.5$ , 1 и 10 потеря устойчивости происходила, когда  $W > 1.2$ , при  $Re = 50, 100$  – соответственно в случае  $W \geq 1.3$ , что хорошо согласуется с полученным аналитически результатом.

**Заключение.** Определен критерий устойчивости течения Куэтта вязкоупругой жидкости, описываемой реологическим уравнением состояния де Витта. Применительно к нестационарной фазе разгона течения соотношение, дающее этот критерий, также может быть использовано для исследования возможности возникновения возмущений. Представлены результаты численного моделирования течения на этапе потери устойчивости с применением этого соотношения.

Неустойчивость часто возникает возле пластин, влияние которых на течение является чисто сдвиговым, поэтому можно ожидать, что изученный в этой работе сдвиговый тип возмущений занимает принципиальное место в общей совокупности различных типов возмущений, которым может подвергаться жидкость в плоскопараллельном течении. Вывод о том, что в куэттовском течении неустойчивость имеет место при  $W > 1$ , очевидно, остается в силе и в случае возможности воздействия на жидкость двумерных или пространственных возмущений [2, 8].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чанг Дей Хан. Реология в процессах переработки полимеров. М.: Химия, 1979. 366 с.
2. Городцов В.А., Леонов А.И. О линейной неустойчивости плоскопараллельного течения Куэтта упруговязкой жидкости // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 289–299.
3. Joo Y.L., Shaqfeh E.S.G. Observations of purely elastic instabilities in the Taylor-Dean flow of a Boger fluid // J. Fluid Mech. 1994. V. 262. P. 27–73.
4. Макаров И.А. Моделирование фазы установления реометрического течения вязкоупругой жидкости // Инж.-физ. журн. 2001. Т. 74. № 3. С. 173–176.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982. 331 с.
6. Макаров И.А. Моделирование реометрического течения ньютоновской жидкости методом конечных элементов // Инж.-физ. ж. 2000. Т.73, № 5. С. 927–931.
7. Fontelos M.A., Friedman A. The flow of a class of Oldroyd fluids around a re-entrant corner // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2000. V. 95. № 2 / 3. P. 185–198.
8. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. Санкт-Петербург: Гидрометеиздат, 1992. 693 с.