

## ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ПЛЕНКИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО ВЕРТИКАЛЬНОМУ ЦИЛИНДРУ

Рассматривается стекание пленки вязкой жидкости вдоль вертикального цилиндра в поле тяжести. В случае малых чисел Рейнольдса для длинноволновых возмущений на цилиндре большого радиуса относительно толщины пленки задачу удастся свести к одному нелинейному уравнению на эволюцию возмущения толщины пленки. Для аксиально-симметричных возмущений это уравнение переходит в хорошо известное уравнение Курамото–Сивашинского. Излагаются результаты численных исследований этого уравнения для пространственных стационарно бегущих решений задачи. Продемонстрировано влияние параметров задачи на характер решений. Представлены солитонные решения.

*Ключевые слова:* пленочное течение, пространственные нелинейные волны, стационарно бегущие периодические решения, солитоны.

Исследование волновых процессов на поверхности жидких пленок стекающих по твердой границе представляет собой один из современных разделов гидродинамики. Кроме прикладного значения (стекающие пленки вязкой жидкости находят, например, широкое применение в технологических процессах химической промышленности и энергетики), исследования пленочных течений вызывает также и чисто теоретический интерес у многих авторов. Используя малость толщины пленки по сравнению с длиной волны возмущений, можно значительно упростить задачу, требующую в полной постановке рассмотрения системы уравнений Навье–Стокса в области с неизвестной заранее свободной границей. Это приводит к ряду относительно простых модельных уравнений, исследование которых интересно и с чисто математической точки зрения.

Будем рассматривать течение пленки вязкой жидкости, свободно стекающей по внешней поверхности вертикального цилиндра под действием силы тяжести. В случае больших цилиндров, у которых радиус много больше характерной толщины пленки, при малых расходах решение можно искать в виде рядов по малому параметру. Тогда все величины удастся представить в виде полиномов от поперечной координаты с коэффициентами, зависящими от толщины пленки и ее производных. В итоге, используя кинематическое условие на свободной границе, задачу удастся свести к одному нелинейному уравнению, описывающему эволюцию возмущений толщины пленки [1]. Некоторые аксиально-симметричные волновые режимы этого модельного уравнения были рассмотрены в [2]. В настоящей работе излагаются результаты численных исследований пространственных стационарно бегущих решений такого уравнения.

**1. Основное уравнение.** Будем рассматривать решения уравнения, полученного в [1], которое после обезразмеривания и замены переменных принимает вид [3]

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + S^4 \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + S^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 H = 0$$

$$S = \frac{L}{R} = \left( 1 + 0.8 \frac{Re}{We \delta_0^2} \right)^{1/2} < 1, \quad \delta_0 = \frac{h_0}{R} \ll 1 \quad (1.1)$$

$$Re = \frac{h_0 V_0}{\nu} \sim 1, \quad We = \frac{\sigma}{\rho g h_0^2} \gg 1$$

Здесь  $H$  – преобразованное и безразмерное отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня,  $\tau, x$  – безразмерные значения времени и продольной цилиндрической координаты и  $\varphi$  – азимутальная координата,  $R$  – радиус цилиндра,  $L$  – длина волны нейтральных, аксиально-симметричных возмущений для безволнового режима течения.  $Re$  и  $We$  – числа Рейнольдса и Вебера,  $h_0$  – толщина невозмущенной пленки,  $V_0$  – скорость течения жидкости на свободной границе невозмущенной пленки,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения на свободной границе,  $\rho$  и  $\nu$  – соответственно плотность и кинематическая вязкость жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения. Уравнение (1.1) написано в системе отсчета, движущейся со скоростью нейтральных бесконечно малых аксиально-симметричных возмущений.

Из линейного анализа устойчивости тривиального решения  $H = 0$  следует, что последнее неустойчиво к пространственным возмущениям вида

$$H \sim \exp[i\alpha(x - c\tau)]\{\exp(in_\varphi\varphi) + \exp(-in_\varphi\varphi)\} + \text{К.С.} \quad (1.2)$$

если волновые числа  $(\alpha, n_\varphi)$  удовлетворяют условию

$$\alpha^2 + S^4 n_\varphi^2 - (\alpha^2 + S^2 n_\varphi^2)^2 > 0 \quad (1.3)$$

В этом случае  $c = c_r + ic_i$ ,  $c_i > 0$ , и такие возмущения будут экспоненциально нарастать во времени. Дальнейший рост будет остановлен из-за действия нелинейных эффектов. В результате могут формироваться стационарно бегущие волновые режимы.

Для волны  $H = H(\xi, \varphi)$ ,  $\xi = x - c\tau$  уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$-c \frac{\partial H}{\partial \xi} + 4H \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + S^4 \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + S^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 H = 0 \quad (1.4)$$

Будем рассматривать периодические решения уравнения (1.4) с длинами волн в продольном и азимутальном направлениях  $\lambda = 2\pi/\alpha$  и  $\lambda_1 = 2\pi/n_\varphi$  соответственно. Так как (1.4) инвариантно относительно трех групп преобразований

$$H \rightarrow H + \text{const}, \quad c \rightarrow c + 4\text{const}$$

$$H \rightarrow -H, \quad c \rightarrow -c, \quad \xi \rightarrow -\xi$$

$$\varphi \rightarrow \pm\varphi$$

в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением решений симметричных относительно  $\varphi$ -координаты, для которых

$$H(\xi, \varphi) = H(\xi, -\varphi), \quad c \geq 0, \quad \int_0^{\lambda_1} \int_0^{\lambda} H d\xi d\varphi = 0 \quad (1.5)$$

Таким образом, приходим к краевой задаче, в которой фазовая скорость  $c$  является собственным значением, а волновые числа  $\alpha$  и  $n_\varphi$  – вещественным и целочисленным параметрами соответственно.

**2. Метод вычислений.** Периодические решения уравнения (1.4) искались численно. Для этого  $H(x, \varphi)$  представлялась в виде пространственного ряда Фурье

$$H(\xi, \varphi) = \sum_{n, m} H_{nm} \exp(i\alpha n \xi + im n_\varphi \varphi) \quad (2.1)$$

где  $H_{nm}$  – комплексные амплитуды.

Так как  $H$  – вещественная функция, для которой выполняется условие (1.5), амплитуды  $H_{nm}$  удовлетворяют требованиям

$$\bar{H}_{-n-m} = H_{nm}, \quad H_{n-m} = H_{nm} \quad (2.2)$$

Здесь черта означает операцию комплексного сопряжения.

Оставляя в (2.1) первые гармоники с индексами суммирования  $|n| \leq N$ ,  $|m| \leq M$  и подставляя его в уравнение (1.4), получим конечную систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & (-i\alpha n c - \alpha^2 n^2 - n_\varphi^2 S^4 m^2 + (\alpha^2 n^2 + n_\varphi^2 S^2 m^2)^2) H_{nm} + \\ & + 2i\alpha n \sum_{n_1=n-N}^N \sum_{m_1=m-M}^M H_{n-n_1, m-m_1} H_{n_1 m_1} = 0 \quad (2.3) \\ & n = 0, \dots, N; \quad m = 0, \dots, M \end{aligned}$$

Условие нормировки (1.5) приводит к требованию  $H_{00} = 0$ . Из системы (2.3) следует, что всегда  $H_{0m} = 0$  ( $m = 2, 3, \dots$ ), а уравнение с индексами  $n = 0$ ,  $m = 1$  в случае, когда азимутальное волновое число  $n_\varphi = 1$ , выполняется автоматически, т.е.  $H_{01}$  – свободный вещественный параметр. Для решений с  $n_\varphi \neq 1$  для этой гармоники также имеем  $H_{01} = 0$ . Начало отсчета координаты  $\xi$  фиксируем условием  $\text{Re}(H_{10}) = 0$ .

Таким образом, с учетом условий (2.2),  $H_{00} = 0$ ,  $H_{0m} = 0$  ( $m = 2, 3, \dots$ ),  $\text{Re}(H_{10}) = 0$ , полное число действительных и мнимых компонент амплитуд  $H_{nm}$  и фазовая скорость  $c$  составляет  $2N(M+1)$  неизвестных. Именно столько вещественных алгебраических уравнений получается из системы (2.3) после ее разделения на действительные и мнимые части. Это значит, что, задав параметры  $S$ ,  $H_{01}$  и волновые числа  $(\alpha, n_\varphi)$ , можно разрешить эту систему, т.е. определить  $c$  и функцию  $H(x, \varphi)$ , задаваемую конечным рядом (2.1).

При обрывании ряда (2.1) число гармоник  $N$  и  $M$  выбиралось так, чтобы выполнялось соотношение

$$\max_{n, m} (|H_{nM}|, |H_{Nm}|) \leq 10^{-4} \max_{n, m} (|H_{nm}|)$$

Для этого система уравнений (2.3) решалась обобщенным методом Ньютона. Необходимое число итераций в зависимости от значений  $N$  и  $M$  менялось в пределах 3+8.

Основная проблема при использовании этого метода состоит в необходимости задания начального приближения близкого к решению. В качестве такого приближения использовались аналитические результаты, полученные в [4] для решений с малой, но конечной амплитудой, существующих в окрестностях нейтральных волновых чисел для тривиального решения  $H = 0$ . Чтобы получить такие решения, функция  $H$  представлялась в виде ряда по малому параметру  $\varepsilon$

$$H = \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \varepsilon^3 H_3 + \dots, \quad c = \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots$$

Задавая набор быстрых и медленных переменных  $\xi_n = \varepsilon^n \xi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и подставляя все в уравнение (1.4), получим систему линейных неоднородных уравнений. Рассматривая третий порядок малости разложения по  $\varepsilon$ , можно получить замкнутую систему уравнений, определяющую выражения для  $(H_1, c_1)$  и  $(H_2, c_2)$  в разложении (2.4)

$$\begin{aligned} H_1 &= \Gamma \exp(i\alpha_n \xi_0) \{ \exp(in_\varphi \varphi) + \exp(-in_\varphi \varphi) \} + \text{К.С.} + A [ \exp i\varphi + \exp(-i\varphi) ] \\ c_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$H_2 = \Gamma_{10} e^{2i\alpha_n \xi_0} + \Gamma_{11} e^{2i\alpha_n \xi_0} (e^{2in_\phi \varphi} + e^{-2in_\phi \varphi}) + A_{0+} e^{i\alpha_n \xi_0} (e^{i(n_\phi + 1)\varphi} + e^{-i(n_\phi + 1)\varphi}) + A_{0-} e^{i\alpha_n \xi_0} (e^{i(n_\phi - 1)\varphi} + e^{-i(n_\phi - 1)\varphi}) + \text{К.С.} \quad (2.5)$$

$$c_2 = 0$$

$$\Gamma_{10} = -\frac{2i}{\alpha_n(4\alpha_n^2 - 1)} \Gamma^2, \quad \Gamma_{11} = -\frac{i\alpha_n}{4(\alpha_n^2 + S^2 n_\phi^2)^2 - \alpha_n^2 - S^4 n_\phi^2} \Gamma^2$$

$$A_{0\pm} = \frac{4i\alpha_n}{(\alpha_n^2 + S^2(n_\phi \pm 1)^2)^2 - \alpha_n^2 - S^4(n_\phi \pm 1)^2} \Gamma A$$

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{i\delta \xi_2}, \quad \delta = a|\Gamma_0|^2 + bA^2$$

Здесь через  $A$  обозначена гармоника  $H_{01}$  – варьируемый вещественный параметр. При любых значениях  $n_\phi$ , если задается значение  $A \neq 0$ , фактически получаем решение с  $n_\phi = 1$ . Однако такие решения ( $A \neq 0$ ), как видно из (2.4) – (2.6), можно построить для любых значений  $n_\phi$ . Это значит, что решения с азимутальным волновым числом  $n_\phi \neq 1$  неустойчивы к возмущениям вида  $H \sim e^{i\varphi}$ , по крайней мере в окрестностях волновых чисел  $(\alpha_n, n_\phi)$ , где данное решение ответвляется от тривиального  $H = 0$ . Значения нейтральных волновых чисел  $\alpha_n$  при заданном  $n_\phi$  вычисляются по формуле

$$\alpha_{n1,2} = \{1/2(1 - 2S^2 n_\phi^2 \pm (1 - 4S^2 n_\phi^2(1 - S^2))^{1/2})\}^{1/2} \quad (2.6)$$

Далее, меняя с малым шагом волновое число  $\alpha$ , находим семейство решений, ответвляющееся от тривиального  $H = 0$ . Другие семейства проявляются в результате ветвления от уже найденных решений.

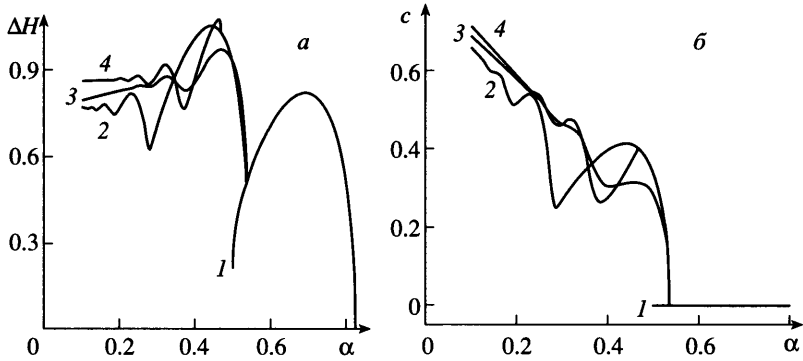
В данной работе рассматривается несколько первых ветвлений. Они происходят в точках, где решение исследуемого семейства нейтрально устойчиво по отношению к малым периодическим возмущениям с теми же волновыми числами. Следовательно, в этих точках существует возможность для зарождения нового семейства решений того же периода.

**3. Результаты.** Все излагаемые в настоящем разделе результаты относятся к случаю  $n_\phi = 1$ . Согласно (2.7), интервалом неустойчивости для тривиального решения  $H = 0$  является отрезок  $0 \leq \alpha \leq \alpha_*(S) = (1 - 2S^2)^{1/2}$ .

На фиг. 1 представлены рассчитанные при  $S = 0.4$  зависимости амплитуды  $\Delta H = H_{\max} - H_{\min}$  и фазовой скорости  $c$  от волнового числа  $\alpha$  для четырех пространственных семейств решений. Ниже они будут обозначаться как I, II, III и IV семейства соответственно.

Для этого значения  $S$  первое семейство I (фиг. 1, кривые 1), ответвляется от тривиального в точке  $\alpha = 0.825$  и продолжается вплоть до значения  $\alpha = 0.499$ , где оно вырождается в аксиально-симметричное семейство решений, соответствующее  $n_\phi = 0$ . Профили волн этого семейства для двух значений волнового числа  $\alpha$  показаны на фиг. 2. Здесь по координате  $\xi$  даны три периода волны. Это семейство характерно тем, что у него фазовая скорость  $c$  тождественно равна нулю, а главные максимумы располагаются в шахматном порядке. Окрестность  $\alpha = 0.5$ , в которой данное семейство переходит в аксиально-симметричное семейство, сохраняет эту особенность при всех возможных значениях параметра  $S$ .

При  $S = 0.4$  семейство II отделяется от семейства I в точке  $\alpha = 0.537$ . Это семейство характеризуется нетривиальной зависимостью фазовой скорости  $c$  от волнового чис-



Фиг. 1. Зависимость амплитуд  $\Delta H = H_{\max} - H_{\min}$  (а) и фазовой скорости (б) от волнового числа  $\alpha$  при  $S = 0.4$  и  $n_\phi = 1$ . Кривые 1, 2, 3 и 4 – I, II, III и IV семейства решений соответственно

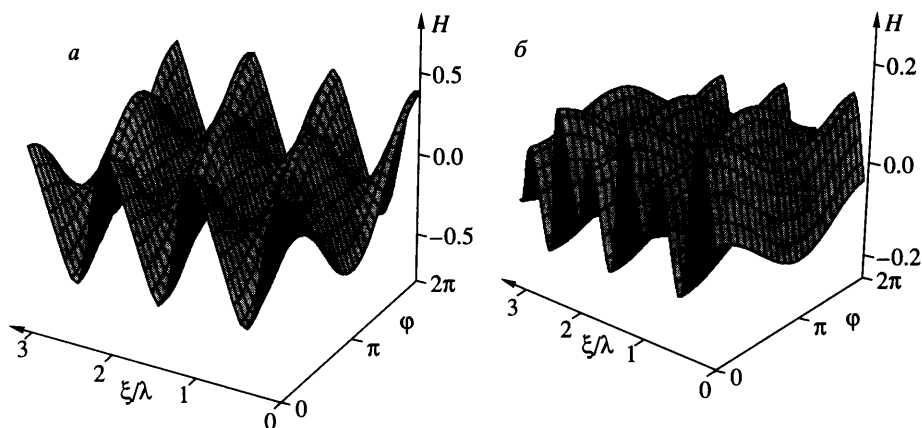
ла  $\alpha$  (фиг. 1, кривые 2). Так же, как и у семейства I, максимумы семейства II располагаются в шахматном порядке. Кроме того, для всех значений  $\alpha$  эти максимумы находятся друг от друга на расстоянии половины длины волны в  $\xi$ -направлении и на  $\pi$  по  $\phi$ -координате. В пределе  $\alpha \rightarrow 0$  каждый из максимумов переходит в солитонное решение. На фиг. 3 показаны профили для одного из этих солитонов при разных значениях параметра  $S$ .

Семейства III и IV отделяются от семейства II. Профили волн для семейства III показаны на фиг. 4. Для этого семейства шахматный порядок разрушается – амплитуды пиков, сдвинутых на полпериода волны, становятся разными. По мере удаления от окрестности точки зарождения семейства III от семейства II, т.е. при уменьшении волнового числа  $\alpha$ , происходит быстрое уменьшение локальных максимумов по сравнению с главными. В пределе  $\alpha \rightarrow 0$  это семейство перейдет в одnogорбый солитон.

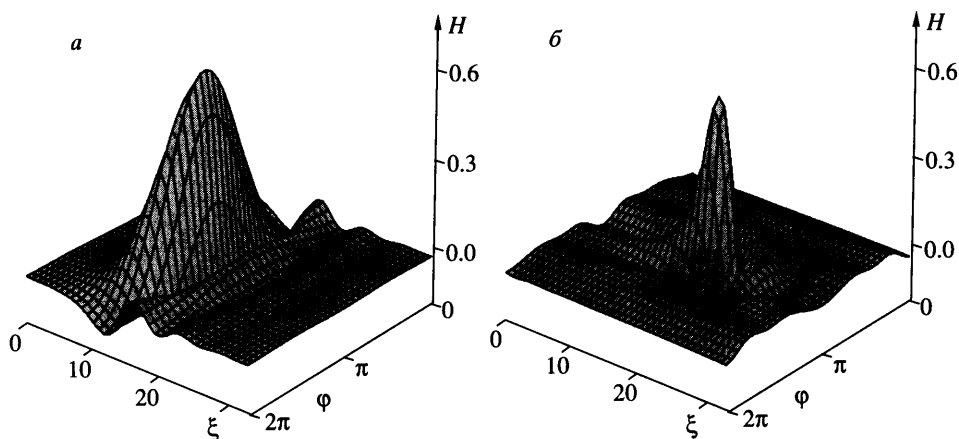
Солитоны семейств II и III качественно подобны друг другу. Наличие характерных осцилляций впереди главного горба, усиление изгиба профиля вдоль продольного направления с уменьшением параметра  $S$  хорошо согласуются с известным результатом [5] – подковообразным солитоном на жидкой пленке, стекающей по вертикальной плоскости. Такое поведение данных решений представляется естественным. Так как уменьшение параметра  $S$ , соответствующее увеличению радиуса цилиндра, означает, что происходит вырождение цилиндра в плоскость. Однако, исходя из одного качественного подобия этих солитонов, пока трудно сказать, какой из них будет в пределе  $S \rightarrow 0$  переходить в упомянутый выше подковообразный солитон на плоской пленке.

Семейство IV, ответвляющееся при данном значении  $S$  от семейства II в точке  $\alpha = 0.468$ , отличается тем, что два максимума на периоде волны не разбегаются с уменьшением  $\alpha$ , как это имеет место для семейства II, расстояние между ними практически не меняется и отсутствует подавление одного из максимумов, какое имеется для семейства III. В пределе  $\alpha \rightarrow 0$  для достаточно больших значений  $S$  это семейство переходит в двугорбый солитон с главными максимумами сдвинутыми по координате  $\phi$  на  $\pi$  (фиг. 5а). Для этого солитона не существует перехода  $S \rightarrow 0$ , поскольку при уменьшении  $S$  расстояние по координате  $\xi$  между максимумами уменьшается и при  $S_* = 0.246$  становится равным нулю, т.е. решение вырождается из класса  $n_\phi = 1$  и становится решением с азимутальным волновым числом  $n_\phi = 2$ , как это можно увидеть на фиг. 5б.

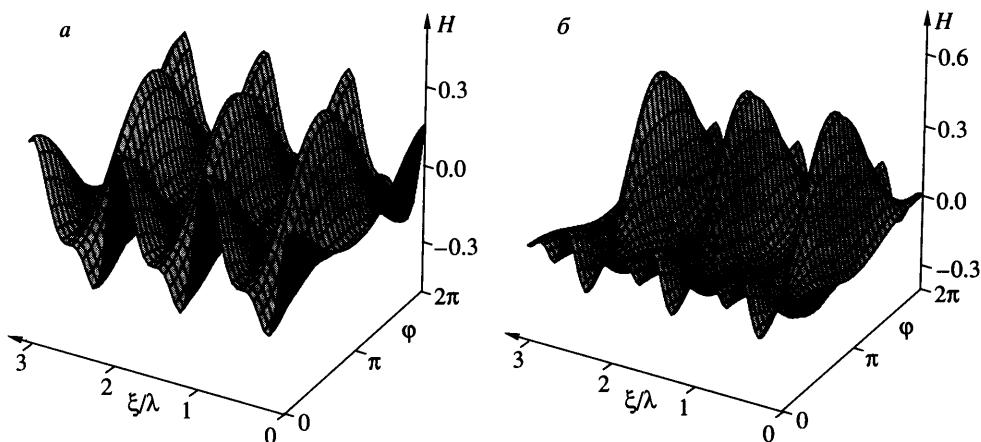
Гармоника  $H_{01}$  является в задаче свободным параметром. Ее значение для всех представленных выше результатов равнялось нулю. Пример воздействия на построен-



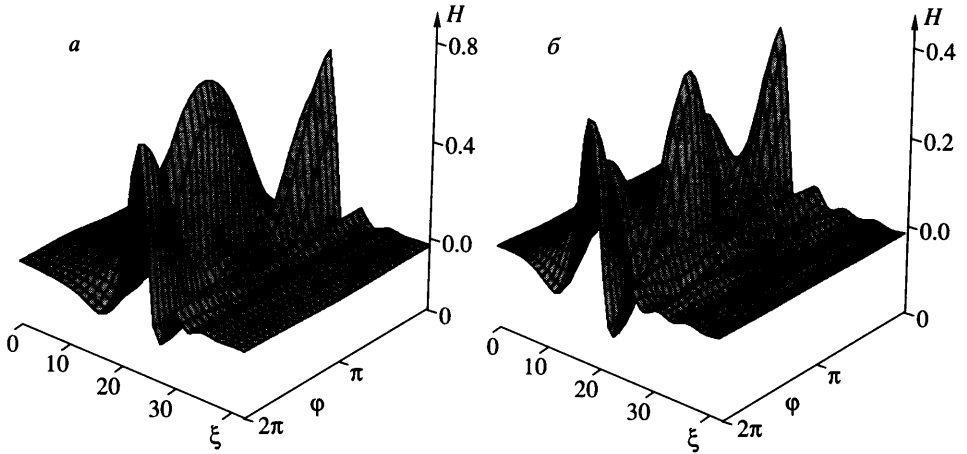
Фиг. 2. Профили волн I семейства решений при  $S = 0.4$ ,  $n_\varphi = 1$ ,  $\alpha = 0.7$  (а),  $\alpha = 0.502$  (б)



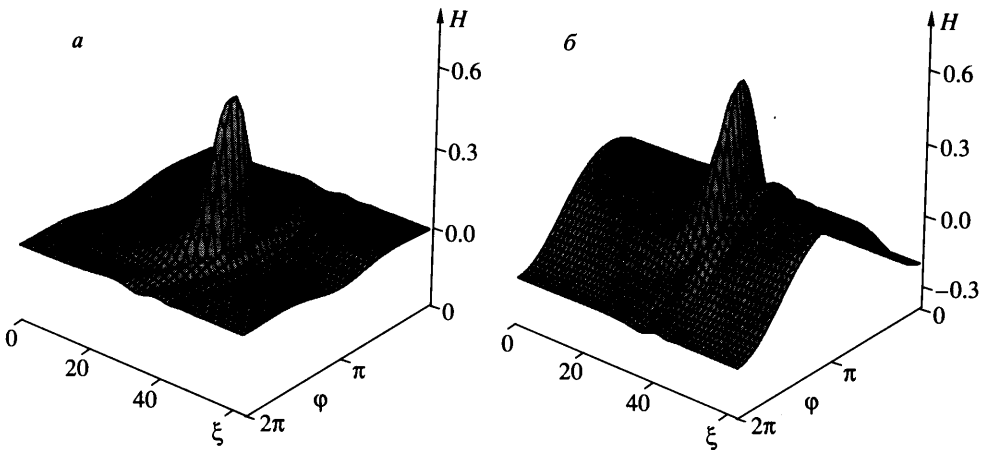
Фиг. 3. Солитонное решение II семейства.  $S = 0.4$ ,  $c = 0.66$  (а),  $S = 0.1$ ,  $c = 0.603$  (б)



Фиг. 4. Профили волн III семейства решений при  $S = 0.4$ ,  $n_\varphi = 1$ ,  $\alpha = 0.53$ ,  $c = 0.155$  (а),  $\alpha = 0.3$ ,  $c = 0.462$  (б)



Фиг. 5. Вырождение волны IV семейства с  $n_\phi = 1$  в решение с  $n_\phi = 2$  при уменьшении параметра  $S$  до критического значения  $S_* = 0.246$ ,  $S = 0.33$ ,  $c = 0.74$  (а),  $S = S_*$ ,  $c = 0.314$  (б)



Фиг. 6. Пример воздействия ненулевого значения  $H_{01}$  на профиль солитона III при  $S = 0.18$ ,  $H_{01} = 0$ ,  $c = 0.606$  (а),  $H_{01} = 0.1$ ,  $c = 1.096$  (б)

ные решения ненулевых значений  $H_{01}$  показан на фиг. 6. Происходит изгиб профиля вдоль  $\phi$  направления. Это эффект – характерный результат, проявляется подобным образом для всех полученных решений.

**Закключение.** Модельное уравнение (1.1), описывающее пространственные волновые режимы для стекающей по цилиндру жидкой пленки, имеет разнообразные решения – от почти синусоидальных до солитонных. Эти решения качественно хорошо соответствуют наблюдаемым в эксперименте режимам (см., например, [6]). При движении по волновому числу  $\alpha$  в область длинных волн количество семейств периодических стационарно бегущих волн быстро возрастает. Среди них имеются семейства, в пределе переходящие в солитонные решения. Уменьшение значений параметра  $S$  (переход к цилиндрам большего радиуса) для решений с малыми волновыми числами  $\alpha$  приводит к локализации по  $\phi$ -направлению. Кроме того, для некоторых решений происходит

перестройка в решения с большим азимутальным волновым числом  $n_\varphi$ . Предъявлен пример нелинейной суперпозиции пространственного решения с чисто азимутальной волной.

Данная работа выполняется в рамках грантов РФФИ (№ 00-01-00849) и INTAS (№ 99-1107).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shlang T., Sivashinsky G.I.* Irregular flow of a liquid film down a vertical column // J. Phys. 1982. V. 43. № 43. P. 459–466.
2. *Cheng M., Chang H.-Ch.* Stability of axisymmetric waves on liquid films flowing down a vertical column to azimuthal and streamwise disturbances // Chem. Eng. Comm. 1992. V. 118. P. 327–340.
3. *Цвелодуб О.Ю.* Спиральные волны на поверхности пленки, стекающей по поверхности вертикального цилиндра // ПМТФ. Т. 35. № 6. С. 56–63.
4. *Цвелодуб О.Ю.* Пространственные волны на поверхности пленки, стекающей по поверхности вертикального цилиндра // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 6. С. 77–84.
5. *Петвиашвили В.И., Цвелодуб О.Ю.* Подковообразные солитоны на стекающей вязкой пленке жидкости // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. № 6. С. 1321–1323.
6. *Алексеев С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г.* Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: Наука, 1992. 255 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
12.X.2001