

УДК 532.59

© 2003 г. И. В. ЛАВРЕНОВ, В. Г. ПОЛНИКОВ

## НЕЛИНЕЙНЫЙ ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ ПО СПЕКТРУ ВОЛН В ВОДЕ, ПОКРЫТОЙ ТВЕРДЫМ ЛЬДОМ

Исходя из уравнений гидродинамики для нелинейных упруго-гравитационных волн под твердым ледяным покровом и их гамильтоновского представления, выписано трехволновое кинетическое уравнение для эволюции спектра волн во времени. Исследованы особенности ядра кинетического интеграла, описывающего нелинейные взаимодействия между тройками волн. Разработан алгоритм численного расчета кинетического интеграла. Получены количественные оценки для скорости нелинейного переноса энергии по спектру волн и установлены его наиболее важные отличительные особенности.

*Ключевые слова:* эволюция спектра волн, кинетический интеграл, нелинейный перенос энергии, упругий ледяной покров.

Исследование волновых процессов в море является одним из старейших направлений гидродинамики и океанологии. В этом разделе науки на протяжении полутора столетий исследований получены многие важные в научном и практическом плане результаты. На фоне указанных результатов особенно заметно отставание в изучении спектральной структуры волновых процессов в морях, покрытых льдом. По этой причине отсутствуют обоснованные спектральные модели развития волн в море, покрытом льдом, что не позволяет решать многие практические задачи в арктических морях.

Многочисленные исследования эволюционных процессов в волнах показали, что нелинейный механизм эволюции является ключевым в описании развития и затухания волн на воде. Именно этот механизм практически не изучен в случае распространения волн в воде, покрытой льдом.

Поведение волн на акваториях, где имеется лед, является достаточно сложным для теоретического описания, поскольку здесь нужно учитывать взаимодействие волн жидкости и твердого тела, плавающего на ее поверхности. Решение такой задачи дополнительно усугубляется как случайным характером самих волновых движений, так и вероятностным распределением характеристик ледяного покрова [1]. Теория этого вопроса находится в состоянии интенсивного развития [2-5].

В теории можно выделить три основных направления исследования.

1. Изучение поведения поверхностных гравитационных волн при наличии битого льда [1, 6].
2. Анализ распространения поверхностных гравитационных [7-11] и внутренних волн [8] под упругим слоем, моделирующим ледяной покров.
3. Изучение дифракции волн на отдельных плавающих льдинах [1, 3].

В данной работе внимание уделено второму из отмеченных направлений, а именно, построению теории распространения нелинейных поверхностных гравитационных волн под упругим слоем, моделирующим ледяной покров. Исследования в этом направлении [9-13] свидетельствуют о возможности реализации трехволновых резонансных взаимодействий между волнами, приводящих к ряду важных физических эффектов. В связи с этим представляет интерес построить замкнутую кинетическую теорию для спектра нелинейных волн под упругим ледяным покровом. Решению этой задачи и посвящена настоящая работа.

**1. Основные уравнения движения.** Система уравнений, описывающая потенциальное движение в слое жидкости глубиной  $D$ , покрытой твердым ледяным покровом толщиной  $h$ , имеет вид [11]

$$\left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0, \quad \eta > z > -D$$

$$g\eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{p - p_0}{\rho} = 0, \quad z = \eta$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \phi \nabla \eta = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad z = \eta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -D$$

где приняты следующие обозначения:  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ;  $\Delta = \nabla^2$ ;  $\eta$  – возвышение границы раздела вода–лед над средним (невозмущенным) уровнем;  $\phi$  – потенциал скорости жидкости;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $\rho$  – плотность жидкости.

Для давления под ледяной пластиной справедливо соотношение

$$p - p_0 = (\sigma + F\Delta^2)\eta$$

$$\sigma = -h \left( \sigma_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\sigma_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \sigma_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right); \quad F = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

где  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений льда, создаваемых внешними нагрузками;  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона льда. Для оценок приемлемы следующие порядки величин характеристик льда [11]:

$$E \approx 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \nu \approx 0.3, \quad \sigma_{ij} \approx 10^5 \text{ Н/м}^2$$

Дисперсионное соотношение для волн в указанной системе имеет вид

$$\omega^2(\mathbf{k}) = G(\mathbf{k})k \operatorname{th}(kD)$$

$$G(\mathbf{k}) = g + h \sum_{i,j} \left( \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \right) k_i k_j + \left( \frac{F}{\rho} \right) k^4 \quad (1.1)$$

Здесь и далее  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  есть частота и волновой вектор волновой компоненты, индексы  $i, j$  принимают значения индексов  $x, y$  – компонент вектора  $\mathbf{k}$ .

Для удобства дальнейшего написания функции  $\omega(\mathbf{k})$ , вместо нормированных модулей упругости  $h\sigma_{ij}/\rho$  и  $F/\rho$  используются прежние обозначения:  $\sigma_{ij}$  и  $F$ , но с измененными значениями. С учетом плотности воды порядки величин (при  $h \cong 1$  м) и размерности этих характеристик есть

$$\sigma_{ij} \cong 10^2 \text{ м}^3/\text{с}^2, \quad F \cong 10^5 \text{ м}^5/\text{с}^2 \quad (1.2)$$

Теперь дисперсионное соотношение (1.1) можно записать в виде, справедливом для представления волнового вектора в полярных координатах

$$\omega^2 = [g + k^2 \sum + Fk^4]k \operatorname{th}(kD) \quad (1.3)$$

$$\sum \equiv \sigma_{xx} \cos^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta$$

Согласно (1.2), для величин  $\sigma_{ij}$  и  $F$  в большинстве практически интересных случаев имеет место соотношение  $\sigma_{ij} \ll Fk^2$ . Поэтому для простоты дальнейших записей можно считать, что  $\sigma_{ij} = 0$ , (или  $\sum = 0$ ) т.е. внешние напряжения льда отсутствуют. В таком случае

$$\omega^2 = [g + Fk^4]k \operatorname{th}(kD) \quad (1.4)$$

Далее везде используется именно это приближение (т.е. анизотропный характер  $\omega(\mathbf{k})$  не учитывается).

Из (1.4) видно, что влияние льда подобно влиянию капиллярности. В силу указанной специфики дисперсионного соотношения ранее установлено [9–11], что соотношение (1.4) допускает резонансное взаимодействие троек волн. Поэтому в гамильтоновском представлении уравнений эволюции достаточно ограничиться лишь кубическими по амплитудам членами.

**2. Кинетическое уравнение.** По примеру [11–13] запишем гамильтониан системы в стандартном виде с точностью до кубических слагаемых

$$H = \int \omega_0(k) a_0^* a_0 d\mathbf{k}_0 + \int U_{0,1,2}^{(1)}(a_0^* a_1 a_2 + c.c.) \delta(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_{0,1,2} + \\ + \frac{1}{3} \int U_{0,1,2}^{(3)}(a_0 a_1 a_2 + c.c.) \delta(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_{0,1,2} + \dots \quad (2.1)$$

где  $a(\mathbf{k})$ ,  $a^*(\mathbf{k})$  – нормальные переменные в Фурье-пространстве, определенным образом связанные с Фурье-образами физических переменных: возвышений уровня границы раздела вода–лед  $\eta(\mathbf{k})$  и потенциала скорости на той же границе раздела  $\phi_s(\mathbf{k})$ .

Матричные элементы трехволновых нелинейных взаимодействий имеют вид

$$U_{0,1,2}^{(1)} \equiv U^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = -U(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) - U(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) + U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}) \\ U_{0,1,2}^{(3)} \equiv U^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) + U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \quad (2.2) \\ U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = (8\pi\sqrt{2})^{-1} \left( \frac{\omega(\mathbf{k})\omega(\mathbf{k}_1)q_2}{qq_1\omega(\mathbf{k}_2)} \right)^{1/2} [\mathbf{k}\mathbf{k}_1 + qq_1], \quad q = k \operatorname{th}(kD)$$

Здесь и далее индекс 0 соответствует вектору  $\mathbf{k}$  и частоте  $\omega(\mathbf{k})$ .

Из общего вида гамильтониана (2.1) с учетом факта существования резонанса для троек волн вида

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_1) \pm \omega(\mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$$

по стандартной методике, изложенной, например, в [12], выводится трехволновое кинетическое уравнение, описывающее временную эволюцию спектра волн

$$\frac{\partial N_0}{\partial t} = 4\pi \int [(U_{0,1,2}^{(1)})^2 [N_1 N_2 - N_0(N_1 + N_2)] \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) - \\ - 2(U_{1,0,2}^{(1)})^2 [N_0 N_2 - N_1(N_0 + N_2)] \delta(\omega_1 - \omega - \omega_2) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k} - \mathbf{k}_2)] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \quad (2.3)$$

Здесь  $N_i = N(\mathbf{k}_i)$  – спектр волнового действия, определяемый соотношением  $N(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \equiv \langle a(\mathbf{k})a^*(\mathbf{k}') \rangle$  и связанный с энергетическим спектром волн  $S(\mathbf{k})$  формулой

$$N(\mathbf{k}) = 4\pi^2 g S(\mathbf{k}) \omega^{-1}(\mathbf{k})$$

Исследование эволюции спектра волн проводится поэтапно путем численного решения уравнения (2.3). В данной работе акцентируем внимание на изучении особенно

стей интеграла в правой части (2.3), описывающего нелинейный перенос энергии по спектру волн. Решение задачи выполняется численными методами.

### 3. Общие положения алгоритма расчета кинетического интеграла.

*Аналитическое преобразование интеграла.* Наличие дельта-функций под интегралом позволяет большую часть интегрирования четырехмерного интеграла выполнить аналитически. Для этой цели используется алгоритм [12], в котором в качестве примера рассматривается первая строчка выражения (2.3).

Дельта-функция по волновым векторам  $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$  легко интегрируется по  $d\mathbf{k}_2$ . В итоге для вектора  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1$  получаем выражения, определяющие его модуль и угол

$$k_2^2 = k_0^2 + k_1^2 - 2k_0k_1 \cos(\theta_1 - \theta_0) \quad (3.1)$$

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \left[ \frac{k \sin(\theta) - k_1 \sin(\theta_1)}{k \cos(\theta) - k_1 \cos(\theta_1)} \right] \quad (3.2)$$

Далее дельта-функция по частотам  $\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)$  представляется в виде

$$\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) = \delta[\Phi(k, \theta, k_1, \theta_1, k_2, \theta_2)] \quad (3.3)$$

$$\Phi(k, \theta, k_1, \theta_1, k_2, \theta_2) = \omega(k, \theta) - \omega(k_1, \theta_1) - \omega(k_2, \theta_2)$$

а переменные  $k_2, \theta_2$  заданы соотношениями (3.1), (3.2). Ввиду сложной дисперсионной связи, не допускающей аналитических решений для нуля функции (3.3), интегрирование  $\delta(\Phi)$  проводится в два этапа [12]: 1) интегрирование по  $d\theta_1$  и 2) нахождение решения уравнения относительно  $\theta_1$

$$\Phi(k, \theta, k_1, \theta_1, k_2, \theta_2) = 0 \quad (3.4)$$

На первом этапе привлекается правило интегрирования сложной дельта-функции. А именно, разлагая сложную функцию  $\Phi$  в области ее нуля по переменной  $\theta_1$ , получим

$$\delta(\Phi) = \delta \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \right)_{\theta_1 = \theta_1^{(0)}} (\theta_1 - \theta_1^{(0)}) \right]$$

где  $\theta_1^{(0)}$  – нуль функции  $\Phi$  по переменной  $\theta_1$ , а выражение для Якобиана  $J$  имеет вид

$$J = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \right| = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial k_2} \frac{\partial k_2}{\partial \theta_1} \right| = \left| \frac{2kk_1 \sin(\theta_1 - \theta)}{4\omega(k_2^{(0)})k_2^{(0)}} \right| \times \quad (3.5)$$

$$\times \left\{ (g + 5Fk_2^{(0)4}) \operatorname{th}(k_2 D) + (g + Fk_2^{(0)4}) \frac{k_2^{(0)} D}{\operatorname{ch}^2(k_2^{(0)} D)} \right\}, \quad \theta_1 = \theta_1^{(0)}$$

Здесь везде прямые вертикальные скобки означают модуль величины. Заметим, что в записи знаменателя (3.5) использовано условие резонанса частот. При  $\Sigma \neq 0$  используется более сложное представление Якобиана  $J$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial k_2} \frac{\partial k_2}{\partial \theta_1}$$

В итоге, после аналитического интегрирования сложной дельта-функции  $\delta(\Phi)$  по  $d\theta_1$  выражение для первого слагаемого интеграла (2.3) приобретает вид

$$I_1 = \int R(\dots) \frac{k_1 dk_1}{\left| [(k + k_1 - k_2^{(0)})(k_2^{(0)} + k_1 - k)(k + k_1 + k_2^{(0)})(k_2^{(0)} + k - k_1)] \right|^{1/2}} \quad (3.6)$$

где через  $R(\dots)$  обозначена регулярная часть подынтегрального выражения (3.6)

$$R(\dots) = 4\pi(U_{0,1,2}^{(1)})^2 \frac{[N_1 N_2 - N_0(N_1 + N_2)]4k_2^{(0)}|\omega(k) - \omega(k_1)|}{(g + 5Fk_2^{(0)4})\text{th}(k_2^{(0)}D) + (g + Fk_2^{(0)4})(k_2^{(0)}D)\text{ch}^{-2}(k_2^{(0)}D)}$$

при  $\theta_1 = \theta_1^{(0)}$ . Знаменатель под интегралом в (3.6) выписан отдельно с целью анализа возможных особых точек.

Для численного интегрирования остается одномерный интеграл по  $k_1$ . Конечный вид подынтегрального выражения в (2.3) определяется после решения уравнения (3.4). Это решение находится численными методами с использованием следующего алгоритма.

Запишем в приближении (1.4) условие обращения аргумента дельта-функции по частотам  $\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)$  в нуль в виде<sup>1</sup>

$$[(g + Fk_2^4)k_2 \text{th}(k_2 D)]^{1/2} = \omega(k) - \omega(k_1) \equiv \Omega \tag{3.7}$$

Обозначив решение (3.7) относительно  $k_2$  через  $k_2^{(0)}(k, \theta, k_1, \theta_1)$ , для угловой переменной  $(\theta_1 - \theta)$ , с учетом выражения (3.1) для  $k_2$ , получим уравнение

$$\cos(\theta_1 - \theta) = \frac{k^2 + k_1^2 - k_2^{(0)2}}{2kk_1}$$

Отсюда, искомое решение относительно  $\theta_1$  есть

$$\theta_1^{(0)\pm} = \theta \pm \arccos \left[ \frac{k^2 + k_1^2 - k_2^{(0)2}}{2kk_1} \right]$$

Заметим, что в виду неоднозначности определения  $\theta_1^{(0)}$  по значению  $k_2^{(0)}$ , в интеграле (3.6) появится сумма по двум различным  $\theta_1^{(0)\pm}$ . Таким образом, определяющим моментом нахождения величины  $\theta_1^{(0)}$  является численное решение уравнения (3.7). Оно осуществляется следующим образом.

Во-первых, в силу требования положительности частоты  $\omega(k_2)$ , т. е.  $\Omega \geq 0$ , всегда должно быть выполнено условие  $k_1 \leq k$ , как и для решения  $k_2 - k_2 \leq k$ .

Во-вторых, решение (3.7) относительно  $k_2$  будем искать в безразмерных переменных, задаваемых соотношением

$$k_2 = x \left( \frac{\Omega^2}{g} \right) = xK$$

где  $x$  – искомая величина в безразмерном виде. Тогда уравнение на  $x$  приобретает вид

$$\left[ 1 + \left( \frac{F}{g} \right) K^4 x^4 \right] x \text{th}(xDK) = 1 \tag{3.8}$$

В-третьих, поскольку в левой части (3.8) стоит быстро растущая монотонная функция по неизвестной  $x$ , численное решение (3.8) легко находится по следующему алгоритму.

<sup>1</sup> При анизотропном дисперсионном соотношении ( $\Sigma \neq 0$ ) уравнение (3.7) записывается с использованием соотношений (3.1) для  $k_2$  и (3.2) для  $\theta_2$  и решается численно непосредственно относительно  $\theta_1$ .

1. Задается начальное значение  $x = 1$ . Сравняются левая и правая части (3.8), разница обозначается через  $\epsilon$ .
2. Если левая часть меньше правой ( $\epsilon < 0$ ), величина  $x$  удваивается и снова сравниваются левая и правая части (3.8). Если наоборот ( $\epsilon > 0$ ), применяется метод дробления интервала пополам с критерием точности, например,  $|\epsilon| \leq 0.01$ .
3. Операция 2 повторяется до тех пор, пока не выполнится условие применения метода дробления интервала пополам.

*Интегрирование по  $k_1$ .* Здесь принципиально важным является определение пределов интегрирования по  $k_1$ , включающее анализ существования нулей в знаменателе под интегралом (3.6).

В силу условия положительности частоты, из (3.3) следует, что верхний предел в интеграле (3.6) есть  $k_{1\max} = k$  (нижний предел должен быть равен нулю:  $k_{1\min} = 0$ )<sup>2</sup>. В таком случае ни первый, ни третий, ни четвертый сомножители знаменателя в (3.6) в нуль не обращаются, если ни одна из переменных не равна нулю. Однако, эта ситуация исключена ввиду того, что при нулевом волновом числе заведомо равен нулю как спектр  $N(k)$ , так и матричный элемент  $U_{0,1,2}$  (см. (2.2)).

Единственная возможность появления особых точек (нулей знаменателя) заключена в поведении сомножителя

$$f(k_1) = k_2^{(0)} + k_1 - k$$

Если  $f(k_1)$  не меняет знака, значит особенностей в знаменателе (3.6) нет, и численное интегрирование не представляет трудности. В противном случае необходимо численно определить нули функции  $f(k_1)$ . В таком случае можно показать, что функция  $f(k_1)$  для волновых чисел, удовлетворяющих условию  $Fk^4 > g$ , всегда положительна. Таким образом, при соответствующем выборе  $k_{1\min}$  численное интегрирование (3.6) легко выполняется стандартными методами. Алгоритм расчета второго интеграла полностью аналогичен приведенному.

#### 4. Методика выполнения расчетов кинетического интеграла.

Расчет интеграла (2.3) выполняется на определенной сетке полярных координат  $(k, \theta)$  при задании формы двумерного спектра волнового действия  $N(k, \theta)$ .

Набор волновых чисел и углов задается соотношениями

$$k(i) = k_p(k_{\min} + \Delta_k(i-1)), \quad i = 1, \dots, 60 \quad (4.1)$$

где  $k_p$  – нормирующий множитель, а  $k_{\min}$  и  $\Delta_k$  – безразмерные параметры сетки по волновому числу, типичные значения которых в расчетах были  $k_{\min} = 0.5$  и  $\Delta_k = 0.066$ . Величина  $k_p$  соответствует пику спектра.

Набор углов определяется соотношением

$$\theta(j) = -\pi + \left(\frac{2\pi}{36}\right)j, \quad j = 1, \dots, 36 \quad (4.2)$$

Выбор формы спектра требует пояснений. Поскольку форма двумерного спектра волн  $N(k, \theta)$  подо льдом достоверно не известна, удобнее первоначально задавать форму энергетического спектра волн  $S(\omega, \theta)$ . Для ее конкретизации предполагается, что спектр  $S(\omega, \theta)$  имеет структуру, типичную для волн на открытой воде (спектр JONSWAP) [12]

$$S(\omega, \theta) = S(\omega)\Psi(\theta) = \alpha g^2 \omega^{-5} \exp[-1.25(\omega_p \omega^{-1})^4] JN(\omega_p \omega^{-1}) \Psi(\theta)$$

<sup>2</sup> Во втором интеграле (2.3) пределы интегрирования есть:  $k \leq k_1 \leq \infty$ .

Здесь  $\alpha \approx 0.01$  – постоянная Филлипса;  $JN$  – типичный безразмерный фактор усиления пиковатости спектра типа *JONSWAP*;  $\Psi(\theta)$  – функция углового распределения энергии, задаваемая формулой

$$\Psi(\theta) = I(n) \cos^n(\theta - \theta_p)$$

где  $I(n)$  – нормировочный множитель, а  $\theta_p$  – угловая координата пика спектра, называемая генеральным направлением волн. В расчетах  $\theta_p = 0$ , а набор показателей степени в функции углового распределения соответствует значениям  $n$  в пределах от 2 до 12.

Ввиду недостатка информации о волнах подо льдом и пробного характера расчетов, пиковатость спектра далее не учитывается, поэтому для функции  $JN$  используется значение 1, а функция углового распределения используется без нормировочного множителя для простоты расчетов.

Переход от частотно-углового  $S(\omega, \theta)$  к пространственному спектру в декартовых координатах  $S(\mathbf{k})$  осуществляется по формуле

$$S(\mathbf{k}) = S(\omega, \theta) \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Спектр волнового действия в различных представлениях вычисляется из соотношений

$$N(\mathbf{k}) = N(k, \theta) k^{-1} = S(\mathbf{k}) 4\pi^2 g \omega^{-1}$$

На основании приведенных формул преобразований и с учетом приближения (1.3), согласно которому дисперсионное выражение приобретает вид

$$\omega = (Fk^5)^{1/2}$$

итоговое выражение для спектра  $N(k, \theta)$  при расчетах интеграла (2.3) задавалось выражением

$$N(k, \theta) = 0.001 k^{-c} \exp \left[ -\frac{c}{2} \left( \frac{k_p}{k} \right)^2 \right] \Psi(\theta)$$

При этом величина  $c$  принимала значения 11 для широкого по волновому числу спектра и 20 для узкого по волновому числу спектра. Функция углового распределения  $\Psi(\theta)$  бралась двух видов:

1) для широких по углу спектров

$$\Psi(\theta) = \cos^n(\theta/2), \quad |\theta| \leq \pi, \quad n = 2, 8;$$

2) для узких по углу спектров

$$\Psi(\theta) = \cos^m(\theta), \quad |\theta| \leq \pi/2, \quad m = 2, 12$$

Список характеристик спектров, результаты расчетов для которых представлены ниже, приведен в табл. 1.

Выбранная дискретность переменных интегрирования (4.1), (4.2) обеспечивает достаточно высокую точность расчетов интеграла (2.3), что определяется стандартным методом изменения дискретностей  $\Delta k$  и  $\Delta \theta$  и варьированием диапазона интегрирования. Следует отметить, что степень консерватизма нелинейного переноса энергии для интеграла (2.3) в расчетах составляла порядка 2%. Именно эта оценка и характеризует порядок точности всех расчетов.

**5. Результаты расчетов и анализ.** Двухмерные диаграммы (расположение изолиний интенсивности) для исходных спектров и соответствующих нелинейных переносов

Таблица 1

№ варианта	$k_p, \text{м}^{-1}$	$c$	$n$	$m$
1	0.3	11	2	–
2	0.3	11	8	–
3	0.3	20	8	–
4	0.3	11	–	2
5	0.3	11	–	12

Таблица 2

№ варианта	Координаты экстремума $T^+$ ( $\text{м}^{-1}$ ; град)	Координаты экстремума $T^-$ ( $\text{м}^{-1}$ ; град)	Отношение $T^+/T^-$	Локальные экстремумы	
				Координата ( $\text{м}^{-1}$ ; град)	$T_L/T^-$
1	(0.47; 0)	(0.33; 0)	47/53	(0.23; 0)	8/53
2	(0.47; 0)	(0.36; 40)	38/54	(0.26; 0)	46/54
3	(0.43; 0)	(0.34; 30)	48/52	(0.26; 0)	37/52
4	(0.47; 0)	(0.37; 40)	29/55	(0.26; 0)	45/55
4	(0.47; 0)	(0.37; 40)	29/55	(0.30; 90)	16/55
5	(0.47; 0)	(0.36; 20)	0	(0.26; 20)	44/56
5	(0.47; 0)	(0.36; 20)	0	(0.22; 80)	22/56

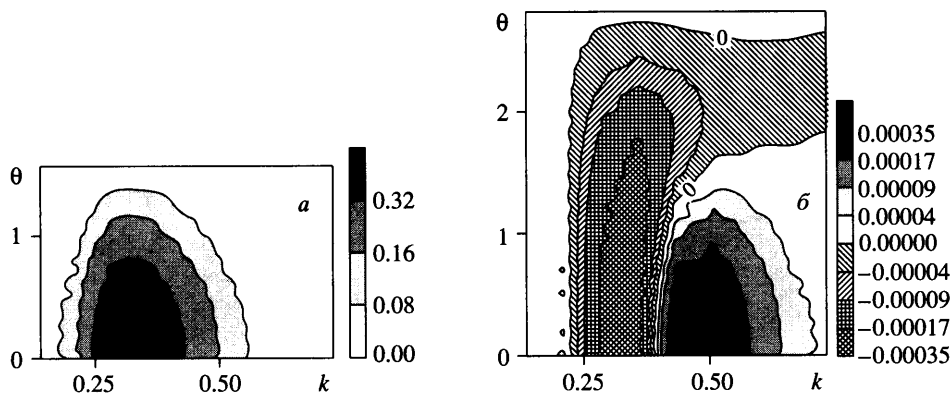
энергии по спектру волн (т.е. величины  $\partial S(k, \theta)/\partial t \equiv T(k, \theta)$ ) для пяти вариантов исходных спектров приведены на фиг. 1–5.

Предметом анализа нелинейного переноса энергии являются следующие его особенности: относительное расположение положительных и отрицательных областей; локализация и относительная интенсивность положительных  $T^+$ , отрицательных  $T^-$  и локальных  $T_L$  экстремумов нелинейного переноса энергии; топография углового распределения нелинейного переноса энергии.

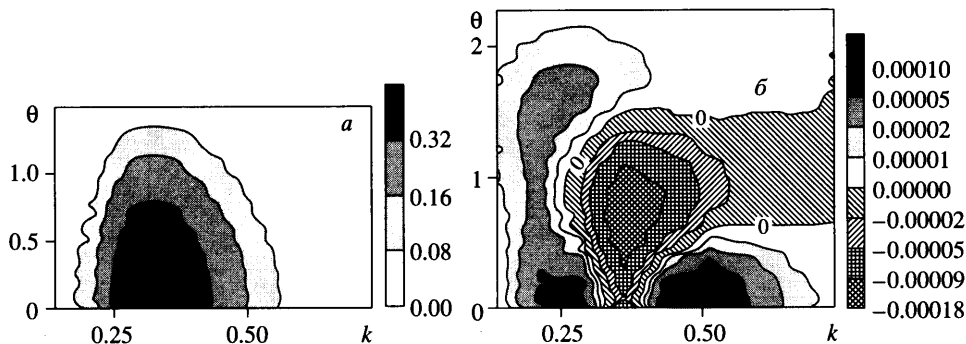
Из приведенных фигур следует. Во-первых, для всех рассмотренных форм спектров нелинейный перенос имеет область отрицательных значений  $\Omega_-$ , локализованную вокруг точки максимума спектра  $(k_p, \theta_p)$ , и две области положительных переносов. Одна из них,  $\Omega_{+>}$ , расположена выше  $\Omega_-$  по волновым числам и локализована вокруг точки  $(1.5k_p, \theta_p)$ . Форма и расположение центров тяжести областей существенно зависят от формы исходного спектра  $S(\omega, \theta)$ . Вторая область положительного нелинейного переноса энергии,  $\Omega_{+<}$ , локализована в области малых волновых чисел (приблизительно при  $k < (0.7-0.8)k_p$ ). Форма  $\Omega_{+<}$  и интенсивность нелинейного переноса энергии в ней существенно зависят от формы спектра.

Во-вторых, локализация и относительная интенсивность положительных  $T^+$ , отрицательных  $T^-$  и локальных  $T_L$  экстремумов нелинейного переноса энергии приведены в табл. 2. При этом существенно, что для узких по углу спектров (варианты 4, 5) хорошо выраженные локальные положительные экстремумы наблюдаются в области значений  $k < (0.7-0.8)k_p$  для направлений, удаленных от генерального направления  $\theta_p$  (см. табл. 2). Отметим, что для очень узкого по углу и волновому числу спектра (варианты 4, 5) локальный и основной положительные экстремумы меняются ме-

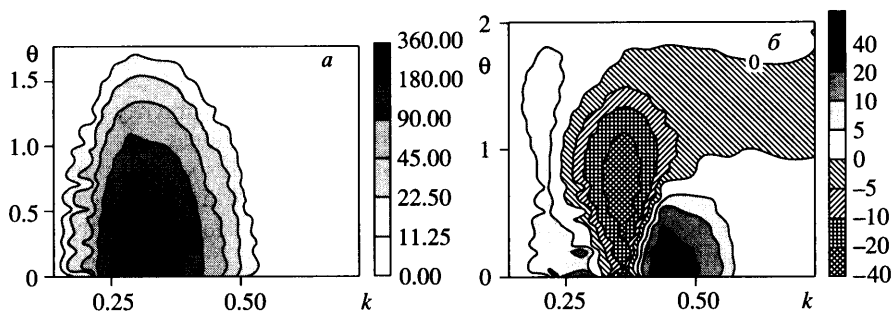




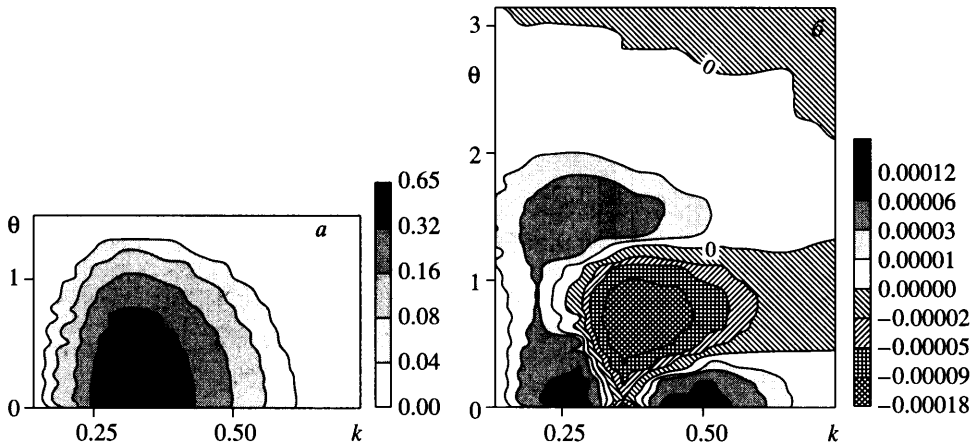
Фиг. 1. Форма спектра  $S(k, \theta)$  (полуплоскость) (а) и нелинейный перенос  $\partial S(k, \theta)/\partial t$  (б) как функции от угла  $\theta$  (град) и волнового числа  $k$  ( $\text{м}^{-1}$ ) для варианта 1



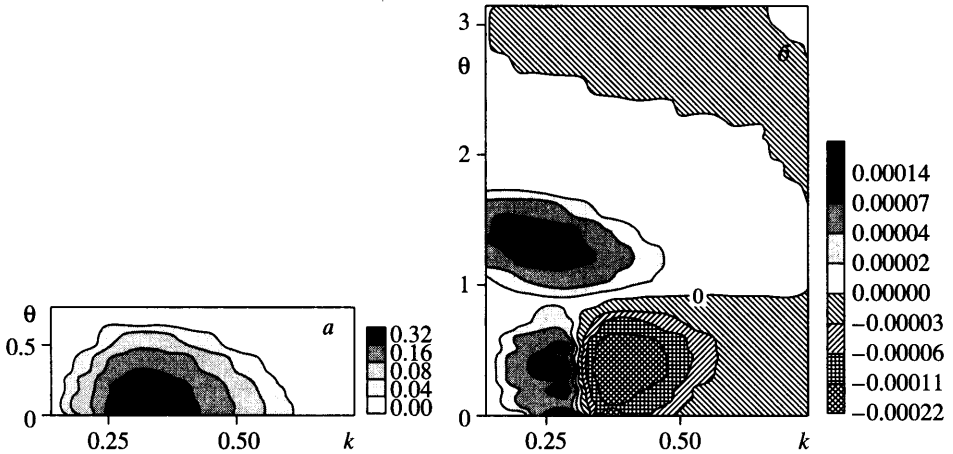
Фиг. 2. Форма спектра  $S(k, \theta)$  (полуплоскость) (а) и нелинейный перенос  $\partial S(k, \theta)/\partial t$  (б) как функции от угла  $\theta$  (град) и волнового числа  $k$  ( $\text{м}^{-1}$ ) для варианта 2



Фиг. 3. Форма спектра  $S(k, \theta)$  (полуплоскость) (а) и нелинейный перенос  $\partial S(k, \theta)/\partial t$  (б) как функции от угла  $\theta$  (град) и волнового числа  $k$  ( $\text{м}^{-1}$ ) для варианта 3



Фиг. 4. Форма спектра  $S(k, \theta)$  (полуплоскость) (а) и нелинейный перенос  $\partial S(k, \theta)/\partial t$  (б) как функции от угла  $\theta$  (град) и волнового числа  $k$  ( $\text{м}^{-1}$ ) для варианта 4



Фиг. 5. Форма спектра  $S(k, \theta)$  (полуплоскость) (а) и нелинейный перенос  $\partial S(k, \theta)/\partial t$  (б) как функции от угла  $\theta$  (град) и волнового числа  $k$  ( $\text{м}^{-1}$ ) для варианта 5

стами. Имеет место и случай практического отсутствия положительного экстремума  $T^+$  (вариант 5).

В третьих, для спектров (варианты 1–3) характерно широкое по углу распределение области нелинейного переноса  $\Omega_-$  и менее протяженное распределение области  $\Omega_{+>}$ . Форма области  $\Omega_{+<}$  существенно зависит от формы спектра: она тем шире, чем уже спектр по волновому числу и более распространен по углу. Интересно отметить, что для варианта 3 в области  $\Omega_{+<}$  наблюдается выделение локальных максимумов с центрами в направлениях  $\theta_l - \theta_p \cong \pm\pi/2$ .

Для узких по углу спектров (варианты 4 и 5) имеет место неизвестный ранее эффект нелинейного расширения спектра. Эффект проявляется в том, что нелинейный перенос энергии отличен от нуля даже в областях, где интенсивность спектра равна нулю (т.е. при  $|\theta - \theta_p| > \pi/2$ ). При этом расширение спектра осуществляется за счет распределения по углу области  $\Omega_{+<}$ . В частности, для спектров, очень узких по  $k$  и  $\theta$  (вариант 5), главный экстремум  $T^+$  вообще перемещается на место локального (фиг. 5).

**Заключение.** Исходя из основных уравнений гидродинамики для идеальной жидкости под упругой пластиной, получено явное выражение для трехволнового кинетического интеграла, описывающего нелинейный перенос энергии по спектру волн подо льдом. Разработан алгоритм численного расчета кинетического интеграла, впервые выполнены расчеты нелинейного переноса энергии по спектру волн в жидкости под упругим льдом.

Установлено, что в отличие от четырехволнового кинетического интеграла (см. например, [12]), трехволновые нелинейные процессы приводят к принципиально иному перераспределению энергии по спектру волн, а именно: энергия из области основного максимума выносится в области более высоких и более низких волновых чисел. При этом топография нелинейного переноса энергии по углу существенно зависит от формы спектра.

В частности, обнаружен неизвестный ранее эффект нелинейного расширения спектра, который проявляется в том, что нелинейный перенос энергии отличен от нуля даже в областях, где интенсивность спектра равна нулю. Так при определении спектра в области углов  $|\theta - \theta_p| \leq \pi/2$ , имеет место положительный нелинейный перенос в области углов  $|\theta - \theta_p| > \pi/2$ . Следует ожидать, что эта особенность будет приводить к изотропизации спектра волн подо льдом.

Работа выполнена при поддержке подпрограммы "Исследование природы Мирового океана" ФЦП "Мировой океан" (проект 5.14), РФФИ (№ 01-05-64846) и INTAS-01-025.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
2. Masson D., Leblond P. H. Spectral evolution of wind-generated surface gravity waves in a dispersed ice field // J. Fluid. Mech. 1989. V. 202. P. 43–81.
3. Лавренов И.В., Новаков А.В. Численное моделирование взаимодействия гравитационных волн с упругими льдинами // Изв. РАН МЖГ. 2000. № 3. С. 123–131.
4. Meylan M., Squire V.A. The response of ice floes to ocean waves // J. Geophys. Res. 1994. V. 99. N C1. P. 891–900.
5. Shuchman R.A., Rufenach C.L., Johannessen O.M. Extraction of marginal ice zone thickness using gravity wave imagery // J. Geophys. Res. 1994. V. 99. N C1. P. 901–918.
6. Зубакин Г.К. Расчет элементов ветровых волн в море, покрытом битым льдом // Тр. Гидрометеорол. н.-и. центра СССР. 1976. Вып. 164. С. 11–19.
7. Букатов А.Е. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустановившееся волновое движение однородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 5. С. 68–75.
8. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние ледяного покрова на волновые движения // Морские гидрофизические исследования. Севастополь: Изд-во Мор. гидрофиз. ин-та. 1971. Вып. 2. С. 113–144.
9. Марченко А.В., Сибгатуллин Н.Р. О резонансном взаимодействии волн в тяжелой жидкости, находящейся под упругой пластиной // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1986. № 4. С. 94–97.
10. Марченко А.В., Сибгатуллин Н.Р. Об эволюции волновых пакетов при трехволновом взаимодействии в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 57–64.
11. Марченко А.В., Шрира В.И. К теории двумерных нелинейных волн в жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 125–133.
12. Ефимов В.В., Полников В.Г. Численное моделирование ветрового волнения. Киев: Наук. думка, 1991. 240 с.
13. Заславский Г.М., Сагдеев Р. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.