МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2003

УДК 532.59

© 2003 г. С.Ф. ДОЦЕНКО, А. РУБИНО

ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛИННЫХ ВОЛН В СЛУЧАЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ БАССЕЙНЕ

Найден класс точных аналитических решений системы нелинейных уравнений длинных волн. Он соответствует осесимметричным колебаниям идеальной несжимаемой однородной жидкости во вращающемся бассейне, имеющем форму параболоида вращения. Радиальная скорость таких движений является линейной функцией, азимутальная скорость и смещения свободной поверхности многочленами по радиальной координате с зависящими от времени коэффициентами. Частота нелинейных колебаний равна частоте низшей моды линейных осесимметричных стоячих волн в параболическом бассейне.

Ключевые слова: волны поверхностные, волны нелинейные, мелкой воды уравнения, параболический бассейн, точные аналитические решения.

Только для небольшого числа нелинейных волновых задач удается найти точные аналитические решения. В их число входят задачи о волнах Герстнера [1], разрушении плотины [2] и накате волны на плоский берег [3]. Использование более простой модели длинных волн, предполагающей распределение давления в движущейся жидкости гидростатическим [1, 2], позволило расширить круг точных аналитических решений нелинейных задач и учесть изменения глубины бассейна. В рамках такого подхода получены аналитические решения через элементарные и специальные функции нелинейных задач о плоских и осесимметричных колебаниях жидкости в бассейнах параболической формы [4–6] и о различных типах колебаний осесимметричных или эллиптических вихрей типа линз [7–11]. Исследования последнего направления инициированы задачами океанологии.

В настоящей работе получен новый класс точных аналитических решений нелинейной системы уравнений длинных волн. Он описывает осесимметричные колебания идеальной однородной жидкости во вращающемся бассейне, имеющем форму параболоида вращения. Общий вид решений предложен в работе [11], посвященной нелинейным инерционным колебаниям круговых вихрей. Радиальная скорость движения жидкости является линейной функцией, азимутальная скорость и смещения свободной поверхности – многочленами различных степеней по радиальной координате с зависящими от времени коэффициентами. Благодаря более общей зависимости азимутальной скорости и смещений свободной поверхности от радиальной координаты, найденное решение является обобщением точного аналитического решения, найденного в работах [4, 5]. Решение линейной задачи о свободных колебаниях жидкости в параболическом вращающемся бассейне дано в [1].

Нахождение аналитического решения нелинейной задачи в случае вращающегося параболического бассейна эллиптического сечения – значительно более сложная задача. В настоящее время такие решения не найдены. Результаты исследования линейных свободных колебаний жидкости во вращающемся цилиндрическом бассейне эллиптического сечения, полученные в рамках теории длинных волн, изложены в [12]. Аналитико-численное исследование безвихревых линейных колебаний жидкости без учета вращения эллиптического бассейна выполнено в работе [13].

1. Сведение задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В приближении длинных волн рассматриваются нелинейные осесимметричные колебания идеальной однородной тяжелой жидкости в ограниченном бассейне переменной глубины D, вращающемся с угловой скоростью $f/2$ относительно вертикальной оси z. В цилиндрической системе координат (R, z, ϕ) не зависящее от азимутального угла ϕ движение жидкости описывается в безразмерных переменных системой уравнений [1]

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} - v + \frac{\partial h}{\partial r} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + u = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial[r(h+d)u]}{r\partial r} = 0 \tag{1.1}$$

где $\{u; v\}(r, \tau)$ – радиальная и азимутальная проекции горизонтальной скорости течения, $h(r,\tau)$ – смещение свободной поверхности относительно невозмущенного положения $z = 0$, τ – время, r – расстояние от вертикальной оси симметрии, $z = -d(r)$ – уравнение донной поверхности.

При переходе к безразмерным переменным в качестве масштабных единиц скорости течения, глубины бассейна и смещений свободной поверхности жидкости использованы соответственно величины $C = \sqrt{gH_0}$ (g – ускорение свободного падения) и максимальная глубина бассейна H_0. Для радиальной координаты и времени в качестве масштабных единиц взяты величины Cf^{-1} и f^{-1}.

Дальнейший анализ ограничивается рассмотрением бассейна в форме параболоида вращения

$$d = d_0 + d_1 r^2, \quad d_0 = 1, \quad d_1 = \text{const} < 0 \tag{1.2}$$

По аналогии с работой [11] решение системы уравнений (1.1) находится в виде следующих многочленов по радиальной координате r с зависящими от времени τ коэффициентами

$$u = a(\tau)r, \quad v = \sum_{j=1}^{n} b_j(\tau)r^{2j-1}, \quad h = \sum_{j=0}^{2n-1} c_j(\tau)r^{2j} \tag{1.3}$$

где $n = 1, 2, \ldots$. Натуральное число n будем называть порядком решения (1.3). При всех n радиальная скорость является линейной функцией r.

Подстановка (1.2) и (1.3) в уравнения (1.1) приводит к следующей системе $5n-1$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и алгебраических соотношений

$$\delta_{j1}\frac{da}{d\tau} - \sum_{k=1}^{j} b_k b_{j-k+1} + \delta_{j1}a^2 - b_j + 2jc_j = 0, \quad j = 1, \ldots, 2n-1 \tag{1.4}$$

$$\frac{db_j}{d\tau} + 2jab_j + \delta_{j1}a = 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{1.5}$$

$$\frac{dc_j}{d\tau} + 2(j+1)a(c_j + \delta_{j0}d_0 + \delta_{j1}d_1) = 0, \quad j = 0, \ldots, 2n-1 \tag{1.6}$$

где δ_{jk} – символ Кронекера, $b_j(\tau) \equiv 0$, если $j > n$. При любом $j = 2, \ldots, 2n - 1$ равенства (1.4) являются алгебраическими соотношениями между коэффициентами c_j и b_k, $k = 1, \ldots, j$.

Увеличение порядка n решения (1.3) на единицу дает три дополнительных дифференциальных уравнения и два алгебраических соотношения, а именно, одно уравнение из (1.5) при $j = n$, два уравнения из (1.6) при $j = 2n - 2$ и $j = 2n - 1$, наконец, два алгебраических соотношения из (1.4) при $j = 2n - 2$, $j = 2n - 1$. Поэтому переход в системе (1.4)–(1.6) от n к $n + 1$ добавляет в решение (1.3) только одну степень свободы.

Стационарное решение системы (1.4)–(1.6) имеет вид

$$a = 0, \quad c_j = \frac{1}{2j}\left(b_j + \sum_{k=1}^{j} b_k b_{j-k+1}\right), \quad j = 1, \dots, 2n-1 \tag{1.7}$$

где b_j – произвольные константы, причем $b_j = 0$ при $j > n$. Коэффициент c_0 в выражении для h также произвольная константа, ограниченная снизу значением $-d_0$. Решению (1.7) соответствует осесимметричное геострофическое течение

$$u = 0, \quad \frac{dh}{dr} = v + \frac{v^2}{r}$$

Анализ показывает, что система уравнений длинных волн (1.1) не допускает нетривиальных решений вида (1.3) с $n > 1$, если вращение жидкости отсутствует.

2. Периодическое решение первого порядка. При $n = 1$ равенства (1.4)–(1.6) образуют систему четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{da}{d\tau} - b_1^2 + a^2 - b_1 + 2c_1 = 0, \quad \frac{db_1}{d\tau} + 2ab_1 + a = 0 \\ &\frac{dc_0}{d\tau} + 2a(c_0 + d_0) = 0, \quad \frac{dc_1}{d\tau} + 4a(c_1 + d_1) = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Решение системы (2.1) разыскивается в виде

$$\begin{aligned} &a = K\Psi\cos\Phi, \quad b_1 = -1/2 + l_1\Psi, \\ &c_0 = -d_0 + p_0\Psi, \quad c_1 = -d_1 + p_1\Psi^2 \\ &\Phi = \omega\tau + \varphi, \quad \Psi = (1 + \gamma\sin\Phi)^{-1} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь γ, φ, l_1, K, p_0, p_1 – константы, ω – подлежащая определению частота нелинейных колебаний жидкости в параболическом бассейне. Подстановка формул (2.2) в систему уравнений (2.1) приводит к выражениям

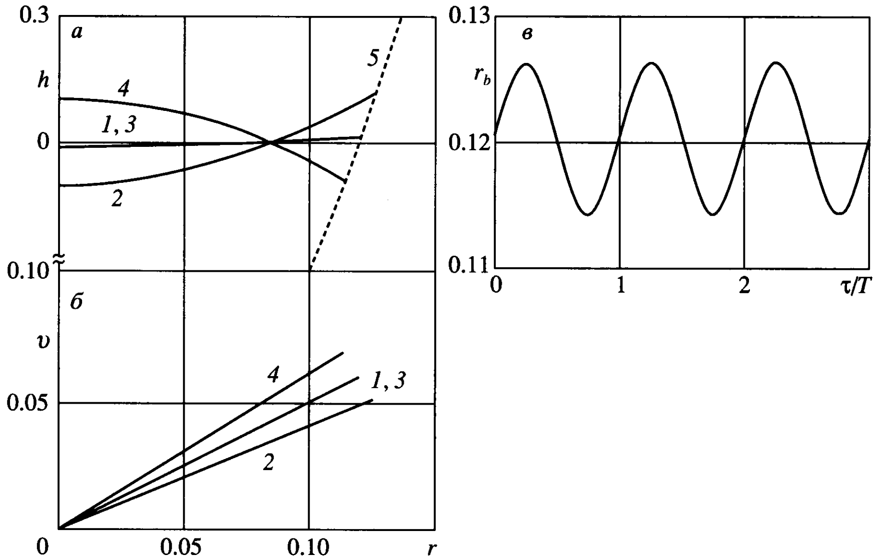
$$\omega = \sqrt{1 - 8d_1} = \sqrt{1 + \frac{8d_0}{W^2}} \tag{2.3}$$

$$p_1 = \frac{1}{8}[4l_1^2 - (1-\gamma^2)\omega^2], \quad K = \frac{1}{2}\gamma\omega, \quad W = \sqrt{-\frac{d_0}{d_1}} \tag{2.4}$$

где W – радиус невозмущенной свободной поверхности жидкости в бассейне, определяемый из уравнения $d = 0$.

Таким образом, найдено точное аналитическое решение системы нелинейных уравнений длинных волн (1.1), описывающее осесимметричные периодические колебания жидкости в параболическом бассейне. Оно записывается в форме

$$\begin{aligned} &u = 1/2\gamma\omega\Psi\cos\Phi r, \quad v = (-1/2 + l_1\Psi)r \\ &h = p_0\Psi - d_0 + (p_1\Psi^2 - d_1)r^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$



Фиг. 1. Радиальные распределения смещений свободной поверхности (*а*) и азимутальной скорости (*б*), а также нелинейные колебания подвижной береговой границы жидкости (*в*) в случае $n = 1$. Кривые *1–4* соответствуют моментам времени $\tau = 0$, 0.25, 0.5, 0.75 T, кривая *5* – поверхность бассейна. Значения параметров: $\varphi = 0$, $\gamma = 0.1$, $l_1 = 1$, $W = 0.12$

и зависит от четырех произвольных констант γ, φ, l_1, p_0. Константа p_1 находится по первой из формул (2.4). Кроме того, должны выполняться условия

$$|\gamma| < 1, \quad p_0 > 0 \tag{2.6}$$

обеспечивающие ограниченность функции Ψ и положительную глубину жидкости в центре бассейна при всех $\tau \geq 0$.

Предположение о равенстве в любой момент времени объема движущейся жидкости объему жидкости в положении равновесия с горизонтальной свободной поверхностью приводит к соотношению

$$p_0 = W\sqrt{-d_0 p_1} \tag{2.7}$$

Решение аналогичной структуры, но зависящее только от одного произвольного параметра γ, $|\gamma| < 1$, найдено различными методами в работах [4, 5]. Оно является частным случаем решения (2.5), если положить

$$\varphi = 0, \quad l_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1-\gamma^2}, \quad p_0 = \sqrt{1-\gamma^2}, \quad p_1 = d_1(1-\gamma^2)$$

При таком выборе параметров первое из соотношений (2.4) выполняется автоматически.

На фиг. 1, *а*, *б* показано изменение h и υ по r для решения (2.5) первого порядка в моменты времени с шагом 1/4 периода $T = 2\pi/\omega$ колебаний жидкости в параболическом бассейне ($T = 0.266$). Благодаря полному учету нелинейности решение позволяет воспроизводить движение береговой границы свободной поверхности жидкости вдоль наклонного дна бассейна (фиг. 1, *а*). Ее положение $r = r_b(\tau)$ и вертикальное смещение свободной поверхности $h = h_b(\tau)$ на границе колеблются с периодом T и описываются выражениями

$$r_b = W\sqrt{\frac{d_0}{p_0\Psi}}, \quad h_b = -d_0 + \frac{d_0^2}{p_0\Psi}$$

Типичные колебания береговой черты жидкости представлены на фиг. 1, *в*.

В соответствии с формой решения (2.5) радиальная скорость всегда изменяет знак в течение периода. Азимутальная проекция скорости положительна при $\tau \geq 0$ (фиг. 1, *б*), отрицательна при $\tau \geq 0$ или изменяет знак в процессе колебаний, если соответственно выполняются условия $l_1 \geq l^+$, $l_1 \leq l^-$ или $l_1 \in (l^-, l^+)$, где $l^{\pm} = 0.5(1 \pm \gamma)$.

Частота нелинейных колебаний (2.3) всегда больше инерционной частоты, не зависит от амплитуды колебаний и определяется только геометрическими параметрами бассейна. Выражение для ω совпадает с формулой для низшей моды линейных осесимметричных стоячих волн во вращающемся параболическом бассейне. Такие колебания характеризуются одной узловой линией [1]

$$r = r_1(\tau) = W\sqrt{\frac{d_0}{p_0\Psi + d_0}}$$

которая совершает радиальные колебания с периодом T. Возможность перемещения узловой линии – чисто нелинейный эффект [14].

Выражение для смещений свободной поверхности может быть переписано в виде $h = (p_0\Psi - d_0)[1 + (p_0\Psi + d_0)r^2]$. Поэтому при значениях параметров задачи, удовлетворяющих условию $0.5p_0d_0^{-1} \in [l^-, l^+]$, существуют моменты времени, когда свободная поверхность жидкости распрямляется ($h = 0$ при всех r). Это свойство реализуется только при достаточно большой амплитуде нелинейных колебаний. Оно возможно благодаря квадратичной зависимости $h(r, \tau)$ от r и связи коэффициентов (2.7), вытекающей из закона сохранения массы жидкости в бассейне. В [14] методом возмущений показано, что распрямление свободной поверхности при нелинейных стоячих колебаниях невозможно, если движение жидкости являются безвихревым.

3. Периодическое решение *n*-го порядка. По аналогии с формулами (2.2) будем искать решение системы (1.4)–(1.6) при $n > 1$ в форме

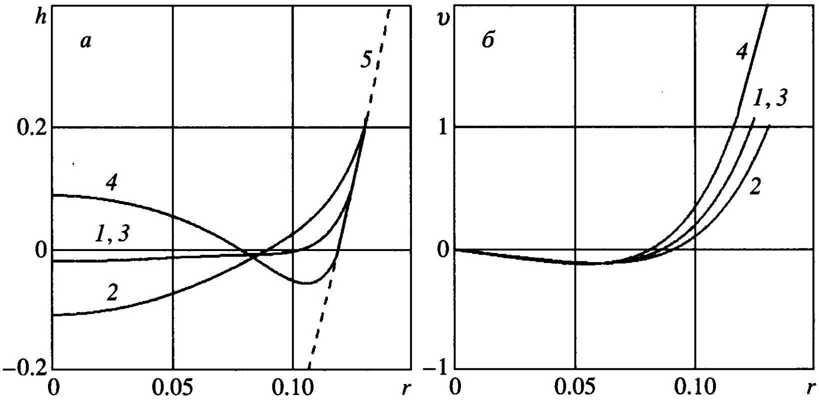
$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\gamma\omega\Psi\cos\Phi, \quad b_j = -\frac{1}{2}\delta_{j1} + l_j\Psi^j, \quad j = 1, \ldots, n \\ c_j &= -\delta_{j0}d_0 - \delta_{j1}d_1 + p_j\Psi^{j+1}, \quad j = 0, \ldots, 2n-1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где γ, φ, p_0 и l_j ($j = 1, \ldots, n$) – произвольные константы. Должны выполняться условия (2.6). Кроме того, необходимо, чтобы значения произвольных параметров обеспечивали пересечение в любой момент времени свободной поверхности жидкости и твердой границы бассейна. Это означает, что при всех $\tau \geq 0$ многочлен $h + d = 0$ степени $4n$–2 должен иметь положительный корень.

Коэффициенты p_j выражаются через l_k посредством формул

$$p_j = -\delta_{j1}\frac{(1-\gamma^2)\omega^2}{8j} + \frac{1}{2j}\sum_{k=1}^{j} l_k l_{j-k+1}, \quad j = 1, \ldots, 2n-1$$

причем предполагается, что $l_j = 0$, если $j > n$.



Фиг. 2. То же, что на фиг. 1, *а*, *б*, для $n = 3$ и $l_1 = -2$, $l_2 = -10$, $l_3 = 4.5 \cdot 10^4$

Формулы (3.1) позволяют записать частное решение n-го порядка системы нелинейных уравнений длинных волн в виде

$$u = \frac{1}{2}\gamma\omega\Psi\cos\Phi r, \quad \upsilon = -\frac{1}{2}r + \sum_{j=1}^{n} l_j\Psi^j r^{2j-1}$$
$$h = \sum_{j=0}^{2n-1} p_j\Psi^{j+1}r^{2j} - d_0 - d_1r^2 \tag{3.2}$$

Оно описывает нелинейные периодические колебания жидкости частоты ω относительно некоторого среднего стационарного движения, характеризуемого азимутальной скоростью и смещением свободной поверхности жидкости.

Изменение произвольных констант решения (3.2) при $n > 1$ позволяет моделировать колебания с различной горизонтальной структурой полей υ и h при одной и той же линейной зависимости u от r. Численный анализ полей при $n = 2$–5 показал, что изменение свободных параметров решения может наиболее существенно влиять на структуру поля азимутальной скорости υ. Радиальное распределение смещений свободной поверхности характеризуется одной узловой линией и не претерпевает качественных изменений: оно сохраняет форму, характерную для решения системы уравнений в случае $n = 1$ (фиг. 1, *а*).

Изменение по r смещений свободной поверхности и азимутальной скорости течения в случае точного решения третьего порядка показано на фиг. 2. Для рассмотренных значений параметров скорость вращательного движения жидкости знакопеременна по r при всех $\tau \geq 0$. Заметные искажения формы свободной поверхности по сравнению со случаем $n = 1$ при приближении к боковой границе взаимосвязаны с интенсификацией течения в области малых глубин. Благодаря изменению параметров задачи при $n = 3$ может быть получено существенно иное по сравнению с фиг. 2, *б* радиальное распределение азимутальной скорости.

Заключение. Для нелинейной модели длинных волн найден класс точных аналитических решений осесимметричной задачи о колебаниях идеальной однородной жидкости во вращающемся бассейне, имеющем форму параболоида вращения. Решения описывают движение, для которого радиальная скорость пропорциональна расстоянию r от вертикальной оси симметрии, азимутальная скорость является полиномом степени $2n - 1$ по нечетным степеням r(n – натуральное число, названное порядком решения), смещение свободной поверхности – полиномом степени $4n - 2$ по четным степеням r с зависящими от времени коэффициентами.

Частота нелинейных колебаний жидкости не зависит как от амплитуды, так и порядка решения n. Она совпадает с частотой низшей моды линейных осесимметричных стоячих волн во вращающемся параболическом бассейне.

В случае $n = 1$ найденное аналитическое решение близко по форме к решению, полученному ранее другими авторами, однако оно зависит от большего числа произвольных постоянных. Решение n-го порядка позволяет моделировать сильно нелинейные колебания жидкости со значительно более сложной по сравнению со случаем $n = 1$ радиальной структурой полей азимутальной скорости и смещений свободной поверхности жидкости. В то же время при различных значениях n радиальное изменение смещений свободной поверхности жидкости имеет форму, характерную для низшей (одноузловой) моды осесимметричных стоячих колебаний. Решение описывает движение жидкости по сухому берегу. Это дает возможность использовать его для тестирования численных моделей, предназначенных для прогноза длинноволновых процессов в реальных водоемах.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Специального исследовательского проекта SFB 512, C3 Немецкого научного фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lamb H.* Hydrodynamics. 6th ed. Dover, 1932. 738 pp. (Русский перевод – *Ламб Г.* Гидродинамика. М;Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.)
2. *Stoker J.J.* Water waves: the mathematical theory with applications. John Wiley & Sons, 1958. (Русский перевод – *Стокер Дж.Дж.* Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.)
3. *Carrier G.F., Greenspan H.P.* Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. № 1. P. 97–109.
4. *Miles J.W., Ball F.K.* On free-surface oscillations in a rotating paraboloid // J. Fluid Mech. 1963. V. 17. № 2. P. 257–266.
5. *Thacker W.C.* Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations // J. Fluid Mech. 1981. V. 107. P. 499–508.
6. *Shapiro A.* Nonlinear shallow-water oscillations in a parabolic channel: exact solutions and trajectory analyses // J. Fluid Mech. 1996. V. 318. P. 49–76.
7. *Cushman-Roisin B., Heil W.H., Nof D.* Oscillations and rotations of elliptical warm-core rings // J. Geophys. Res. 1985. V. 90. № C6. P. 11756–11764.
8. *Young W.R.* Elliptical vortices in shallow water // J. Fluid Mech. 1986. V. 171. P. 101–119.
9. *Cushman-Roisin B.* Exact analytical solution for elliptical vortices of the shallow water equations // Tellus. 1987. V. 39A. № 3. P. 235–244.
10. *Rogers C.* Elliptic warm-core theory: the pulsrodon // Physics Letters. A. 1989. V. 138. № 6,7. P. 267–273.
11. *Rubino A., Brandt P., Hessner K.* Analytical solutions for circular eddies of the reduced-gravity, shallow-water equations // J. Phys. Oceanogr. 1998. V. 28. № 5. P. 999–1002.
12. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 303 с.
13. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Нестеров С.В.* Собственные колебания тяжелой жидкости в эллиптическом бассейне // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 4. С. 129–142.
14. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.

Севастополь
Гамбург

Поступила в редакцию
1.IV.2002