**МЕХАНИКА**

**ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

**№ 2 • 2003**

УДК 532.546+539.4:539.214

© 2003 г. С. М. КАПУСТЯНСКИЙ, В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ, И. Г. ШМИДТ

# УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАГНЕТАНИЯ ШЛАМА В СЛАБЫЙ ВОДОНАПОРНЫЙ ПЛАСТ

Нагнетание шлама – смеси воды и твердых частиц (обломков дробления горных пород при бурении) – интерпретируется как внедрение пластической массы в упругопластический водонапорный горизонт под воздействием высоких градиентов порового давления. Сформулирована система упругопластического деформирования насыщенной пористой среды, описывающая процессы нагнетания как в песчаном пласте, так и в зоне, заполненной шламом. Рассмотрена осесимметричная автомодельная задача, подразумевающая фронтально устойчивое вытеснение песка шламом. Выбранный интервал изменения переменных и полученные результаты соответствуют полевым экспериментальным данным.

*Ключевые слова*: пористость, напорные течения, дилатансия, захоронение, пласты, экология.

В 1995–1997 г. на Аляске в течение 2 лет была проведена грандиозная работа по сбросу в артезианский пласт отходов бурения (мерзлой глины, фрагментов дробления горных пород), превращенных в шлам после растворения морской водой. Сброс шлама проводился через одну скважину нагнетания [1]. Всего было сброшено 340 тысяч тонн твердотельных отходов, что может служить образцом решения экологической проблемы.

Вместе с тем на этапе указанной публикации выдвигались гипотезы, что масса отходов попала в трещины сопутствующего гидроразрыва или же в форме мелких частиц внедрилась в поры песчаного пласта. В предлагаемой статье выдвигается другая версия – сброс отходов стал возможен за счет фронтального пластического вытеснения массы песка шламом в самом артезианском горизонте под действием градиента порового давления фильтрующейся воды. Задача о работе индивидуальной скважины в этих условиях оказалась автомодельной, что позволило построить ее решение путем интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

**1. Система уравнений процесса.** Прежде всего составляются балансы масс воды и твердой фазы (матрицы пласта)

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_f) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho_f mw) = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-m)\rho_s + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho_s(1-m)v) = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $m$ – пористость (объемная концентрация воды), $w$, $v$ – "истинные" кинематически измеряемые скорости воды и твердых частиц по радиусу, $\rho_f$, $\rho_s$ – их плотности.

Закон Дарси определяет вязкое сопротивление потоку воды сквозь движущуюся твердую матрицу

$$m(w-v) = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{1.3}$$

где $k$ – проницаемость, $\mu$ – вязкость воды. Присутствие скорости матрицы в (1.3) принципиально необходимо для решения задачи о нагнетании шлама в пласт.

Уравнение равновесия матрицы имеет обычный [2, 3] вид

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}-\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{1.4}$$

Здесь используются эффективные напряжения по Терцаги [4] и поровое давление $p$, причем $\Gamma_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$ – полное (горное) напряжение, $\delta_{ij}$ – единичный тензор.

Матрица (начальная пласта или же упакованного шлама) может течь пластически, если выполняется условие пластичности

$$(\sigma_r-\sigma_\theta)\theta_\sigma = -\alpha(\sigma_r+\sigma_\theta)+Y \tag{1.5}$$

В ходе уплотнения шлама его сцепление $Y$ растет, но за счет расходящегося типа течения его пористость затем может увеличиваться, а следовательно, будет уменьшаться и сцепление. Впрочем, из-за отсутствия соответствующих данных измерений этим эффектом пренебрежем.

Условие (2.5) выполнено на упругопластической границе, где геоматериал переходит в состояние пластического течения, а потому коэффициенты трения и сцепление $\alpha$, $Y$ меняются (как и пористость) мгновенно. Последующие изменения этих параметров в ходе пластического течения происходят непрерывным образом.

Разрешив условие (1.5) относительно $\sigma_\theta$, преобразуем уравнение равновесия (1.4) к более удобному виду

$$\sigma_\theta = N\sigma_r - Y_0, \quad N = \frac{\theta_\sigma+\alpha}{\theta_\sigma-\alpha}, \quad Y_0 = \frac{Y}{\theta_\sigma-\alpha} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}-\frac{(N-1)\sigma_r-Y_0}{r}-\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{1.7}$$

причем $Y_0$ и $N$ могут изменяться в процессе вытеснения песка нагнетаемым шламом.

Пористость меняется непрерывно в соответствии с дилатансионной зависимостью пластических приращений объема и сдвига матрицы которая в скоростях смещений представляется как дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r} = \Lambda\theta\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right), \quad \theta = \operatorname{sign}\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right) \tag{1.8}$$

Здесь $\Lambda$ – скорость дилатансии, и введен знак направления сдвига, совпадающий со знаком действия касательных усилий: $\theta_\sigma = \operatorname{sign}(\sigma_r-\sigma_\theta)$. Указанное совпадение отвечает коаксиальности тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, что эквивалентно положительной диссипации работы в ходе пластического деформирования (течения).

Наконец, применение уравнения (1.8) означает, что внутри зоны пластического течения нет существенных упругих деформаций.

Напомним, что дилатансионное кинематическое уравнение играет роль второго условия – помимо условия текучести Мора – Кулона (2.5), которое необходимо для определяющих законов пластичности геоматериалов. Физически механизм дилатансии объясняется переупаковкой контактирующих жестких зерен – изменение объема упаковки возможно только при одновременном сдвиге.

При изостатическом обжатии возможен [5] и иной механизм необратимого деформирования – за счет дробления зерен. Здесь будем им пренебрегать.

Используемая система замкнута, если известны связи плотностей фаз с их давлениями, проницаемости – с пористостью и напряжением, коэффициента сухого трения, сцепления и скорости дилатансии – с пористостью [2, 3].

Уравнение равновесия (1.4) должно быть дополнено обобщенным законом Гука в упругой (внешней) зоне, где $K$, $G$ – упругие модули матрицы (объема и сдвига), $\varepsilon = \beta K$, $\beta$ – сжимаемость зерен (кварца), $e$ и $e_{ij}$ – объемная деформация и компоненты деформаций

$$\sigma_{ij} = (K - 2/3G)e_{ij} + 2Ge_{ij} + \varepsilon p\delta_{ij} \tag{1.9}$$

Форма записи (1.9) использует эффективные напряжения Терцаги, что позволяет [2, 3] независимо измерять параметры $K$, $G$ и $\beta$.

**2. Нестационарная задача нагнетания.** Первоначально пластическая зона локализована у точки нагнетания (скважины), но за счет высоких перепадов порового давления она интенсивно растет во времени, перемещаясь во внешнюю, упругую, зону. Кроме того, происходит процесс физического внедрения в пласт самого шлама, что приводит к смене песчаной матрицы на гравийную. Подчеркнем, что упругопластическая граница отнюдь не совпадает с границей смены материала.

Предположим, что во всей зоне $a(t) \le r \le b(t)$ внедренного гравия (матрицы шлама) происходит пластическое течение. Здесь $a(t)$ – радиус каверы, возникающей в процессе нагнетания, а $b(t)$ – радиус фронта вытеснения песка гравием. Что касается упругопластической границы $c(t)$, то она движется именно по песчаной массе, которая предполагается более слабой по сравнению с обжатой гравийной матрицей шлама.

Радиус $a(t)$ определяется обращением в нуль эффективного напряжения $\sigma_r = 0$ и заданием порового давления нагнетания $p_a$. Первое условие означает, что каверна радиуса $a(t)$ заполнена шламом в виде суспензии и на этом радиусе происходит переход последней в состояние твердой матрицы. Из второго следует, что радиус каверны является эффективным контуром нагнетания.

Однако пробный расчет показал, что удобнее задаваться расходами обоих фаз $Q_f$ и $Q_s$, но не давлением нагнетания.

Радиус внедрения шлама $b(t)$ находится из балансов масс и условия вытеснения (равенства фронтальных скоростей твердой фазы). Положение упругопластической границы $c(t)$ определяется условием пластичности (1.6).

Постоянные расходы твердой и жидкой фазы $Q_f$ и $Q_s$ заданы в особой точке нагнетания. Это означает, что реальный радиус скважины пренебрежимо мал по сравнению с масштабами воздействия его на пласт. В соответствии с уравнениями (1.1) и (1.2) для массовых потоков имеем

$$\begin{aligned} A_f &= -2\pi rh\rho_f(p)w(r)m_r = \rho_f(p)Q_f \quad (r \to 0) \\ A_s &= -2\pi rh\rho_s v(r)(1 - m_r) = \rho_s Q_s \quad (r \to 0) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Сомножители $rw$ и $rv$ пропорциональны величине $r\partial p/\partial r$ и сохраняют свои конечные значения при предельном переходе $r \to 0$. Все остальные сомножители также конечны. Поэтому потоки масс $A_j$ и объемные расходы $Q_j$ являются параметрами точечного источника, находящегося в начале системы координат. Нагнетание соответствует отрицательным значениям $Q_j$. Тогда скорости смещений будут положительны и направлены в сторону роста радиальной координаты.

На фронте вытеснения песка $b(t)$ следует сформулировать условия баланса масс для обеих фаз (их плотности предполагаются постоянными) и непрерывности радиальных усилий

$$\left[m\left(w - \frac{db}{dt}\right)\right] = 0, \quad \left[(1 - m)\left(v - \frac{db}{dt}\right)\right] = 0 \tag{2.2}$$

$$[\sigma_r] = 0 \quad [p] = 0 \tag{2.3}$$

Условие вытеснения определяется равенством фронтальной скорости и скорости самой твердой фазы: $v = db/dt$, что означает тождественное выполнение второго уравнения (3.2), тогда как первое принимает следующий вид

$$[m(w-v)] = \left[-\left(\frac{k}{\mu}\right)\frac{dp}{dr}\right] = 0 \tag{2.4}$$

На внешней упругопластической границе $r = c(t)$, определяемой предельным условием (1.5), вводятся дополнительные условия непрерывности скоростей смещений и радиальных усилий

$$\left[(1-m)\left(v-\frac{dc}{dt}\right)\right] = 0, \quad [\sigma_r] = 0, \quad r = c(t) \tag{2.5}$$

На бесконечности ($r/a \to \infty$) и в начальный момент времени, по предположению, выполнены одинаковые условия

$$m = m_0, \quad p = p_0, \quad \sigma_r = -(P-p_0) \quad P = -\Gamma_r \tag{2.6}$$

Если одно и то же предельное условие (1.5) используется и как критерий разрушения геоматериала, и как условие текучести разрушенного материала внутри зоны пластичности, то окружные напряжения будут непрерывны. (В рассматриваемом случае условие (1.5) применено с обеих сторон от границы $r = c(t)$, но только из-за отсутствия данных о трении в ходе пластического течения шлама.)

Внутри пластической зоны уравнение равновесия в форме (1.7) и дилатансионная связь (1.8) выполняются одновременно. Закон Дарси (1.3) справедлив и в упругой, и в пластической зонах.

В упругой зоне уравнение баланса сил представляется в ином виде [6]

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{2G}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) - \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{2.7}$$

поскольку окружное и радиальное напряжения определяются приведенной комбинацией радиального смешения в соответствии с законом Гука (1.9). Скорости смещения матрицы (песка или гравия) являются производной по времени от смещения: $v = \partial u/\partial t$.

**3. Инвариантное (автомодельное) решение задачи о нагнетании шлама.** Наиболее простая формулировка задачи соответствует автомодельному решению, которое сводится к некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для построения такого решения введем автомодельную переменную $\xi$

$$\begin{gathered}\xi = \frac{r}{\sqrt{\kappa t}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{2t}\xi\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{\kappa t}}\frac{d}{d\xi} \\ \kappa = \frac{k(K+G)}{\mu}, \quad w\sqrt{\frac{t}{\kappa}} = w^*, \quad v\sqrt{\frac{t}{\kappa}} = v^*, \quad \frac{u}{\sqrt{\kappa t}} = u^*\end{gathered} \tag{3.1}$$

В этом пространстве все границы оказываются фиксированными

$$\frac{a}{\sqrt{\kappa t}} = \xi_a, \quad \frac{b}{\sqrt{\kappa t}} = \xi_b, \quad \frac{c}{\sqrt{\kappa t}} = \xi_c \tag{3.2}$$

Выражение для $v$ переписывается как

$$v^* = \sqrt{\frac{t}{\kappa}}\frac{\partial}{\partial t}(u^*\sqrt{\kappa t}) \tag{3.3}$$

что в автомодельных переменных означает [7, 8]

$$v^* = \frac{u^*}{2} - \frac{1}{2}\xi\frac{du^*}{d\xi} \tag{3.4}$$

Тогда все граничные условия становятся стационарными, хотя в реальном пространстве эти границы двигаются во внешнюю область со скоростями, обратно пропорциональными $\sqrt{t}$.

Следующие граничные условия по существу определяют интенсивность сингулярного источника в точке $\xi = 0$

$$\begin{aligned} Q_f^* &= \frac{Q_f}{\kappa h} = -2\pi r w(r) m = -2\pi m \xi w^* \\ Q_s^* &= \frac{Q_s}{\kappa h} = -2\pi r v(r)(1-m) = -2\pi(1-m)\xi v^* \end{aligned} \tag{3.5}$$

Соответственно скорости обеих фаз имеют порядок $O(1/\xi)$. Это представление будет использовано при очень малом значении координаты $\xi$.

Шлам движется по пласту в компактном состоянии, критерием чему служит ненулевые эффективные напряжения при $\xi > \xi_a$ (в суспензии эти напряжения равны нулю, а силовое взаимодействие реализуется через давление в жидкости).

Фронт вытеснения определяется равенствами (2.2) поровых давлений, эффективных напряжений и расходов жидкости, а также условием вытеснения. В автомодельных переменных последние имеют вид

$$[m(w^* - \xi_b/2)] = 0, \quad v^* = \xi_b/2 \tag{3.6}$$

Второе условие (3.6) собственно и определяет положение указанного фронта.

Между фронтом вытеснения и шламом в жидком состоянии внутри каверны масса шлама сложена в компактную матрицу

$$m = m_s, \quad \xi_a < \xi < \xi_b \tag{3.7}$$

В интервале $\xi_b < \xi < \xi_c$ выполняется система уравнений пластического течения

$$\frac{dv^*}{d\xi} + \frac{v^*}{\xi} = \Lambda\theta\left(\frac{dv^*}{d\xi} - \frac{v^*}{\xi}\right) \tag{3.8}$$

$$\frac{d\sigma^*}{d\xi} - \frac{(N-1)\sigma^* - Y^*}{\xi} - \frac{dp^*}{d\xi} = 0, \quad \frac{Y}{Y_0} = Y^* \tag{3.9}$$

а упругопластическая граница $\xi = \xi_c$ определяется вступлением условия (1.6), причем скорости твердой фазы и продвижения границы здесь не равны

$$[(1-m)(v^* - \xi_c/2)] = 0 \tag{3.10}$$

При этом следует дополнительно учесть возможность скачкообразного изменения пористости. Оно должно быть связано с изменением сцепления. Например, если на упругопластической границе происходит дробление частиц (зерен) среды, она должна учитываться некоторой функцией $m = m(\sigma)$ или даже в виде $m^+ - m^- = \text{const}$, т.е. с использованием значений пористости с разных сторон от этой границы.

Внешняя, упругая, зона контролируется иной формой уравнения равновесия и законом Гука [6]

$$\frac{d\sigma^*}{d\xi}+\frac{2G}{\xi Y_0}\left(\frac{du^*}{d\xi}-\frac{u^*}{\xi}\right)-\frac{dp^*}{d\xi} = 0 \tag{3.11}$$

$$\frac{dv^*}{d\xi} = -\frac{v^*}{\xi}\frac{\nu}{1-\nu}-\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{Y_0\xi}{G4}\left(\frac{d\sigma^*}{d\xi}-\varepsilon\frac{dp^*}{d\xi}\right)$$
$$p^* = \frac{p}{Y_0},\quad \sigma^* = \frac{\sigma_r}{Y_0} \tag{3.12}$$

где $\nu$ – коэффициент Пуассона.

Эта система может быть упрощена, если фазовые плотности предполагаются постоянными, а сжимаемостью зерен пренебрегается. Тогда объем внедренного шлама определится только упругими модулями матрицы и пластическим деформированием порового пространства части песчаного пласта.

Уравнения баланса (1.1)–(1.3) в автомодельных переменных принимают вид

$$\frac{\xi}{2}\frac{dm}{d\xi} = \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}(\xi m w^*) \tag{3.13}$$

$$\frac{\xi}{2}\frac{dm}{d\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}(\xi(1-m)v^*) = 0 \tag{3.14}$$

$$m(w^*-v^*) = -\frac{Y_0}{K+G}\frac{dp^*}{d\xi} \tag{3.15}$$

При компьютерной реализации решения предполагаем, что условия на бесконечности могут быть выполнены на некотором достаточно большом радиусе $R(t) \gg a(t), b(t), c(t)$, который играет роль контура питания в стационарных случаях ($R = \xi_R\sqrt{\kappa t}$), причем

$$m_R = m_0,\quad p_R^* = p_0^*,\quad \sigma^* = -(P^*-p_0^*),\quad \xi = \xi_R \tag{3.16}$$

Соответствующая осесимметричная автомодельная задача решается далее численно. Шесть искомых величин $p^*$, $u^*$, $v^*$, $m^*$, $w^*$, $\sigma_r^*$ будут определены в ходе расчета. На каждом этапе счета проверяется условие (1.6).

**4. Исходные данные.** Вертикальное горное давление на глубине 1707 м песчаного пласта составляло 387 атм, что использовано для выбора пластических параметров – внутреннего трения и скорости дилатансии песка.

Горизонтальное эффективное горное давление: $P$ = 221 атм. Давление нагнетания[1] $p_a$ = 303–310 атм на забое скважины (на устье 97 атм). Хотя скважины, вскрывающие песчаный пласт, имели наклон в 30° к вертикали, в расчетах они считались вертикальными.

Начальное поровое давление пласта, как и поровое давление на бесконечности, считалось гидростатическим (170 атм). Плотность нагнетаемого шлама составляла 1.199 г/см$^3$.

[1] Наблюдавшиеся колебания расходов/давлений [1] при расчетах не учитывались. Их период составлял 30 дней, что означает определенную связь с твердотельными приливами, типичными для высоких широт (по мнению Ю.Н. Авсюка) и соответствующими изменениями проницаемости пласта.

*Таблица 1*

| № | $P_C$, МПа | $E$, МПа | $\nu$ | $G$, МПа | $\tau_y$, МПа | $\tau_f$, МПа | $\alpha$ | $Y$, МПа | $\Lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 630 | – | 263 | 7.0 | 7.4 | 0.68 | 2.3 | |
| 2 | 2.6 | 1990 | 0.2 | 830 | 18.2 | 21.0 | 0.66 | 2.8 | –0.76 |
| 3 | 5.1 | 3050 | 0.19 | 1280 | 27.3 | 32.2 | 0.44 | 10.6 | –0.47 |
| 4 | 10.1 | 3710 | 0.17 | 1585 | 32.6 | 40.3 | 0.16 | 24.0 | –0.28 |
| 5 | 17.8 | 4452 | 0.17 | 1900 | 38.5 | 49.7 | 0.02 | 31.0 | –0.19 |

Расходы морской воды – при нагнетании шлама – составляли 0.0477 м$^3$/с (по другим оценкам, были в интервале 0.0318–0.0556 м$^3$/с). При добавлении взвеси гравия интенсивность нагнетания оценивалась как 0.064 м$^3$/с. Пренебрежем разницей морской воды и пластовой, полагая их вязкость равной $10^{-9}$ МПа · с.

Эффективная мощность песчаного пласта принималась $h$ = 90 м (хотя по другим оценкам она составляла 150 или даже 300 м). Он имел первоначально пористость $m_0$ = 30% и проницаемость $k_0$ = 500 миллидарси = $5 \cdot 10^{-13}$ м$^2$. Будем относить это значение к упругой зоне песка. Для пластической зоны примем $k = 9 \cdot 10^{-14}$ м$^2$.

Начальная пористость в зоне шлама 0.24. Внутри пласта шлам упаковывается в пористую среду с первоначальными значениями пористости $m_s$ = 24.3% и проницаемости $k_s$ = 13 миллидарси = $1.3 \cdot 10^{-14}$ м$^2$. Для простоты принималось, что $k = k_s$.

Конечно, в ходе процесса внедрения шлама в пласт их параметры будут меняться. Так, проницаемость песка уменьшается вплоть до значения до 90 миллидарси.

Изменения проницаемости учитывались по формуле Козени–Кармана

$$\frac{k_0}{k} = \frac{(1-m)^2 m_0^3}{m^3(1-m_0)^2}$$

Начальное поровое давление было $p_0$ = 17 МПа. Начальное радиальное напряжение $\sigma_{r0}$ = –22 МПа. Давление нагнетания было $p_a$ = 30 МПа, однако это значение получается из расчета, а потому не считается заданным.

Данные стандартных "трехосных" испытаний приведены в табл. 1. Отсутствие сведений изостатического сжатия не позволило исключить эффекты дробления, а потому скорость дилатансии получилась несколько завышенной. Заметим также, что обработка экспериментальных данных велась по условию (1.6), но здесь фигурируют осевое напряжение $\sigma_a$ и радиальное (обжатия), равное $P_c$ (сжимающие напряжения положительны, как это принято в горной механике)

$$\sigma_a - \sigma_r = \alpha(\sigma_r + \sigma_a) + Y(\sigma_r) \tag{4.1}$$

Таблица 1 представляет упругие параметры, соответствующие дифференциальным напряжениям $\tau = \sigma_r - \sigma_\theta$ ниже предела пластичности песка $\tau < \tau_y$ при давлении $P_c$. Упругое деформирование нелинейно, т.е. указанные модели следует понимать как деформационные (косвенно учитывающие допредельную пластичность [2, 3]). В связи с этим в расчетах были использованы их осредненные значения.

Обратим внимание, что дифференциальные напряжения разрушения (развала) испытанных образцов песка выше значений, реализуемых при его пластическом течении: $\tau_f > \tau_y$.

Значения скорости дилатансии отрицательны, что соответствует пластическому уплотнению песка (контрактации), за счет чего и было можно нагнетать шлам в пласт.

*Таблица 2*

| № | Расход воды $Q_f$, м$^3$/с | Расход твердой фазы $Q_s$, м$^3$/с | Зона шлама $b = b/a$ | Зона пластичности $c = c/R$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | –0.0537 | –0.0175 | 4.44 | 0.023 |
| 2 | –0.0338 | –0.0100 | 18.05 | 0.018 |

*Таблица 3*

| № | Каверна $\xi_a = a/(\kappa t)^{1/2}$ | Зона шлама $\xi_b = b/(\kappa t)^{1/2}$ | Зона пластичности $\xi_c = c/(\kappa t)^{1/2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.00117 | 0.0052 | 0.023 |
| 2 | 0.00022 | 0.0040 | 0.018 |

Данные табл. 1 были аппроксимированы зависимостями $\sigma_r = P_c$

$$\alpha = 0.68 - 0.0077P_c; \quad Y = 2.3 + 0.1923P_c, \quad 0 < P_c < 2.6 \text{ МПа}$$

$$\alpha = 0.9419 - 0.1176P_c + 0.0037P_c^2, \quad Y = -8.077 + 4.393P_c - 0.1233P_c^2,$$

$P_c > 2.6$ МПа

Во всем рассматриваемом интервале напряжений справедливы следующие выражения для модуля сдвига и скорости дилатансии (правильнее – контрактации)

$$G = 251.085 + 287.98P_C - 21.077P_c^2 + 0.5679P_c^3$$

$$\Lambda = -(9.941 - 1.114P_c + 0.0374P_c^2)$$

С ростом эффективного давления поверхность текучести песка плавно переходит от формы Кулона к форме Треска, а дилатансионный эффект уменьшается. В то же время сцепление растет.

**5. Варианты расчета и результаты.** Переход от условия Кулона (зависящего от порового давления) к условию Треска ($\tau = Y = 31$ MPA = const) происходит в песке при окружном (обжимающем) напряжении $\sigma_\theta = 18$ МПа.

Предполагается, что $\Lambda = -0.7$, хотя более низкие значение (большие по абсолютной величине) реализуются при $\sigma_\theta < 18$ МПа. Подобный выбор обусловлен нестабильностью вычислений при $\Lambda < -0.7$. Поскольку при $\sigma_\theta > 18$ МПа экспериментальных данных нет, положим, что здесь $\Lambda = -0.01$. Таким образом

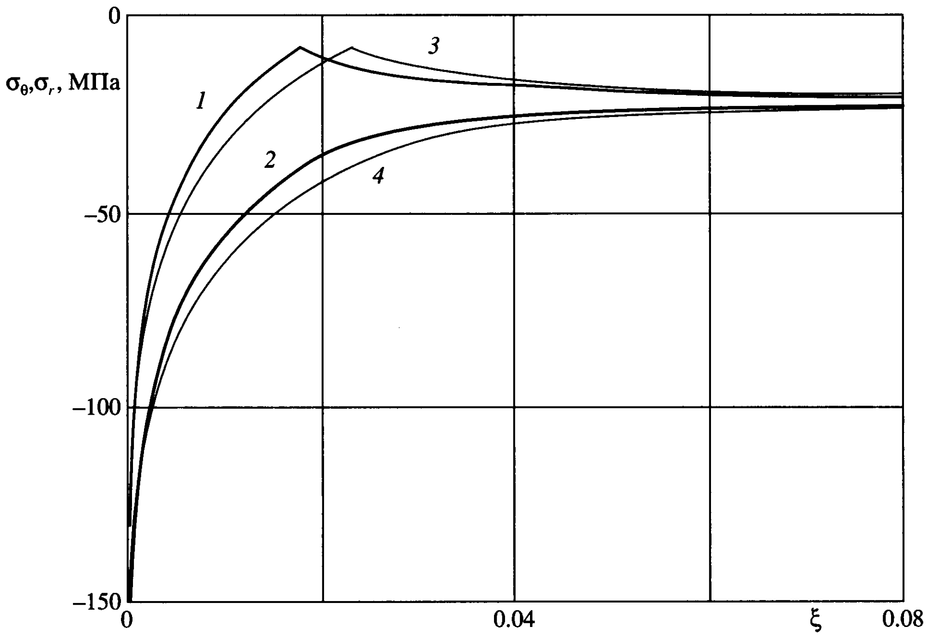
$$\Lambda = -0.7, \quad \sigma_\theta < 18 \text{ МПа}; \quad \Lambda = -0.01 \quad \sigma_\theta > 18 \text{ МПа}$$

В зоне шлама $\Lambda = 0$ и применяется условие Треска: $\sigma_\theta - \sigma_r = 31$ МПа = const.

Время релаксации оценивается как $T = R^2/\kappa$, причем $\kappa = 2.07$ м$^2$/с. Контур питания задавался как $R = \xi_R\sqrt{\kappa t}$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.8)–(3.16) решалась модифицированным методом предиктор – корректор Хаммингса.

Вычисления начинались с задания значений расходов на контуре питания $Q_f(R)$, $Q_s(R)$ и $\xi_R$ (последний принимался равным 1). Если $Q_f$ и $Q_s$ оказывались не равными их




Фиг. 1. Зависимости окружных и радиальных напряжений от автомодельной переменной: *1*, *2* – окружное и радиальное напряжения для варианта *2*; *3*, *4* – для варианта 1

заданным значениям при $\xi = \xi_a$, то значения $Q_f(R)$, $Q_s(R)$ и $\xi_a$ изменялись, и расчет повторялся.

Здесь приводятся результаты расчета для двух вариантов, приведенных в табл. 2. Они соответствуют указанным практическим сведениям.

Важный результат – скорость роста эффективного радиуса каверны (табл. 3). Для ориентации укажем такие цифры. Получилось, что за первый месяц радиус каверны достигает значения $a = 2.73$ м в варианте 1 и $a = 0.51$ м в варианте 2.

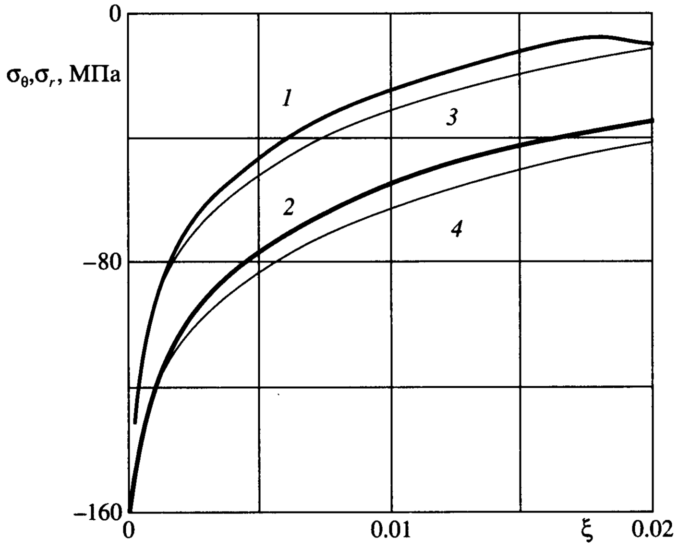
Приведем соответствующие оценки для продвижения шлама в пласт за первый месяц: $b = 12.1$ м (вариант *1*) и $b = 9.2$ м (вариант *2*) и фронта пластичности в песчаном слое: $c = 53.5$ м (вариант *1*) и $c = 41.4$ м (вариант *2*).

На фиг. 1–5 представлены распределения по автомодельной переменной приведенных значений эффективных напряжений, порового давления, скоростей твердой и жидкой фаз.

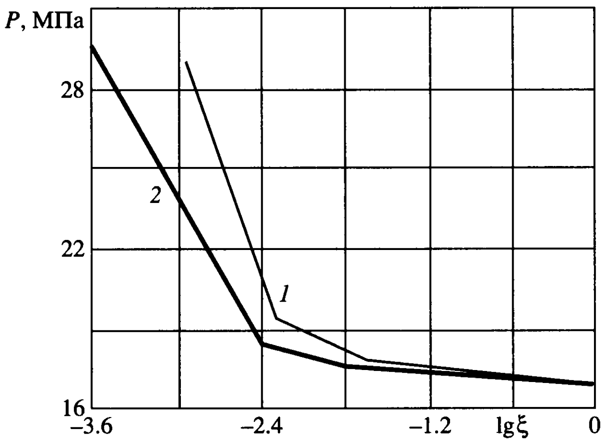
Из фиг. 1 и 2 (на последнем рисунке увеличен масштаб ближней зоны) видны монотонное изменение радиальных напряжений с расстоянием и немонотонное поведение окружных напряжений. Минимальные (по абсолютной величине) значения последних достигаются как раз на границе зоны пластичности с упругой зоной. В зоне шлама реализуются особенно большие напряжения, что и предопределяет его компакцию в пластическую массу. Во всей области радиальные напряжения превосходят кольцевые. При увеличении расходов радиальные напряжения увеличиваются, а кольцевые возрастают в пластической области и убывают в упругой.

Профили порового давления (фиг. 3) кусочно-логарифмические, а его изломы соответствуют границам зоны шлама и песка и переходу к упругому состоянию.

Сложным оказывается распределение пористости по расстоянию (фиг. 4). В пластической зоне песчаного слоя наблюдается ее уменьшение за счет контрактации.




Фиг. 2. Зависимости окружных и радиальных напряжений от автомодельной переменной вблизи каверны: *1*, *2* – окружное и радиальное напряжения для варианта *2*; *3*, *4* – для варианта *1*

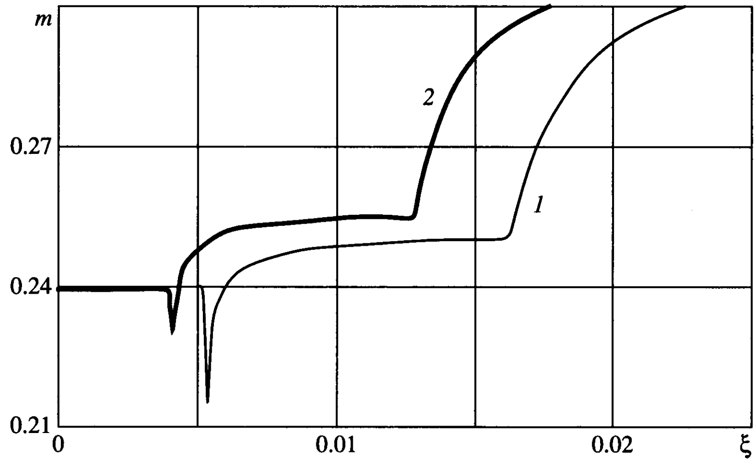



Фиг. 3. Зависимости порового давления от автомодельной переменной: *1*, *2* – номера вариантов

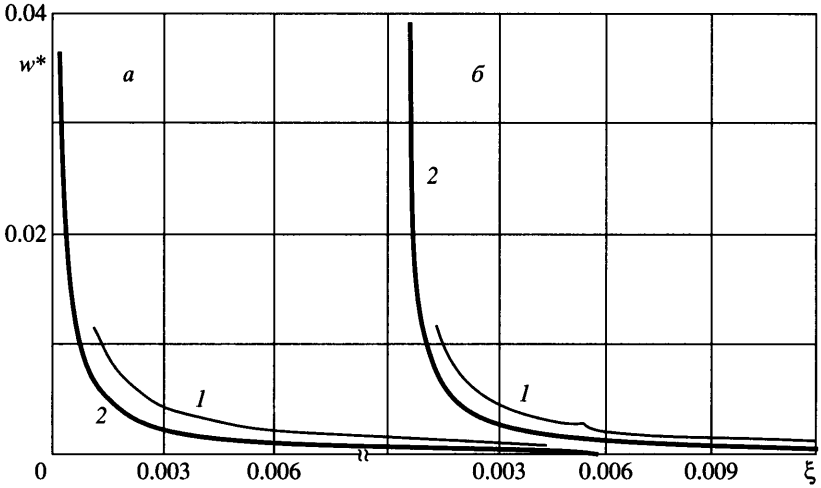
Максимальная степень уплотнения реализуется на границе шлам – песок. С увеличением расходов уплотнение интенсифицируется.

Кинематические (истинные) скорости твердой и жидкой фаз убывают с расстоянием монотонно (фиг. 5). Наиболее интенсивное изменение скоростей происходит в ближней зоне скважины нагнетания, занятой шламом.

**Заключение.** Нагнетание шлама можно моделировать математически. Однако неожиданно высокие эффективные напряжения, возникающие в пласте, требуют даль-




Фиг. 4. Зависимости пористости от автомодельной переменной: *1*, *2* – номера вариантов




Фиг. 5. Зависимости приведенных скоростей движения фаз от автомодельной переменной: *1*, *2* – номера вариантов

нейшего совершенствования схемы расчета. А именно следует учитывать и смещения горного массива, направленные к его свободной поверхности, что в принципе может привести к явлениям расслаивания в пласте и к снижению эффективного коэффициента пьезопроводности.

Гидроразрыв по радиусу пласта вряд ли возможен. Действительно, возникшие высокие окружные напряжения – в силу интенсивной дивергентности потока при внедрении твердой массы – оказываются сжимающими (если бы они были отрицательными, нагнетание шлама происходило бы и за счет возникновения вертикальных трещин в массиве шлама или песка, но это ставилось под сомнение в публикации [1]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Schmidt J.H., Friar W.I., Bill M.L., Cooper G.D.* Large-scale injection of North Slope drilling cuttings // SPE 52738. Soc. Petrol. Engrs. 1999.
2. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. С. 232. = *Nikolaevskij V.N.* Mechanics of Porous and Fractured Media. Singapore: World Scientific, 1990. 472 p.
3. *Николаевский В.Н.* Геомеханика и флюидодинамика. С приложениями к проблемам газовых и нефтяных пластов. М.: Недра, 1996. С. 448. = *Nikolaevskiy V.N.* Geomechanics and Fluidodynamics. With applications to Reservoir Engineering. Dordrecht: Kluwer, 1996. 349 p.
4. *Terzaghi K.* Theoretical Soil Mechanics. N.Y.: Wiley, 1944. = *Терцаги К.* Теория механики грунтов. М.: Госстройиздат, 1961. 507 с.
5. *Вонг Г.К., Капустянский С.М., Николаевский В.Н., Шляпоберский Я.В.* Упругопластический расчет поврежденности призабойной зоны скважины // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 121–135.
6. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solids // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. № 2. P. 168–186.
7. *Графутко С.Б., Николаевский В.Н.* Задача о выносе песка в работающую скважину // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 5. С. 130–138.
8. *Капустянский С.М., Николаевский В.Н.* Автомодельная задача о выносе песка в скважину из пласта // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 874–883.


Санкт-Петербург
Москва
Даллас

Поступила в редакцию
22.IV.2002