МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2003

УДК 532.546

© 2003 г. М. Н. ДМИТРИЕВ, Н. М. ДМИТРИЕВ, В. В. КАДЕТ

ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ДАРСИ И СТРУКТУРА ФАЗОВЫХ И ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ ДЛЯ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В АНИЗОТРОПНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

В инвариантном тензорном виде выписан обобщенный закон Дарси при фильтрации двух несмешивающихся жидкостей для кристаллографических точечных групп симметрии и анизотропных текстур. Для всех групп симметрии проанализированы представление тензоров коэффициентов фазовых проницаемостей и структура выражений для относительных фазовых проницаемостей. Связь между тензорами коэффициентов фазовых и абсолютных проницаемостей задается тензором четвертого ранга с внешней симметрией, совпадающей с внешней симметрией тензоров фазовых проницаемостей. Показано, что внешняя симметрия тензоров коэффициентов фазовых проницаемостей может не совпадать с внешней симметрией тензора абсолютной проницаемости. Для триклинных и моноклинных групп симметрии показано, что тензоры коэффициентов фазовых проницаемостей могут быть не соосны между собой и с тензором абсолютной проницаемости, более того, положение главных осей тензоров коэффициентов фазовых проницаемостей может зависеть от насыщенности.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, анизотропия, фазовые проницаемости, относительные фазовые проницаемости.

Проблема обобщения классических моделей теории двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей, использующих тензоры коэффициентов фазовых проницаемостей, на случай анизотропных фильтрационных свойств относится к числу актуальных, поскольку реальные пористые и трещиноватые среды, коллекторы углеводородного сырья, как правило, проявляют анизотропию. В работах [1–3] была установлена структура связей для тензоров коэффициентов абсолютных, фазовых и относительных проницаемостей для сред, проявляющих анизотропные фильтрационные свойства, выписаны и проанализированы тензоры фазовых и относительных проницаемостей, установлен общий вид функций относительных фазовых проницаемостей. Однако были рассмотрены только наиболее простые типы анизотропии: обобщенные законы Дарси для сред с трансверсально-изотропными и ортотропными фильтрационными свойствами. В то же время при задании материальных свойств тензорами четвертого ранга (в рассматриваемом случае относительных фазовых проницаемостей) число различных вариантов значительно больше [4], поэтому рассмотрим и проанализируем обобщенный закон Дарси для всех возможных типов анизотропных сред.

1. Основные соотношения. В феноменологической теории двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей (например, нефть и вода) полагается, что закон Дарси выполняется для каждой из фаз. Таким образом, наряду с тензором коэффициентов абсолютной проницаемости k_{ij}, который задает материальные свойства в законе Дарси при фильтрации одной однородной жидкости, вводятся еще дополнительные материальные характеристики в виде тензоров фазовых проницаемостей k_{ij}^{α}, где индекс $\alpha = 1, 2$ здесь и далее задает номер фазы. Тензоры k_{ij}^{α} определяют и задают фильтрационные свойства при совместном течении двух несмешивающихся однородных жидкостей.

Экспериментально установлено, что для изотропных пористых сред между тензорами k_{ij}^{α} и k_{ij} имеется связь вида

$$k^{\alpha}\delta_{ij} = f^{\alpha}(s_1, s_2)k\delta_{ij}, \tag{1.1}$$

где δ_{ij} – дельта Кронекера, k и k^{α} – коэффициенты абсолютных и фазовых проницаемостей соответственно, $f^{\alpha}(s_1, s_2)$ – относительные фазовые проницаемости, которые являются функциями от насыщенностей s_1, s_2 пористой среды фазами. Так как насыщенности в сумме равны единице, то в качестве аргумента можно принять только одну из них. Обычно за аргумент принимается водонасыщенность, которая обозначается через s.

Обобщение связи (1.1) на случай анизотропных сред имеет вид [1]

$$k_{ij}^{\alpha} = F_{ijkl}^{\alpha}k_{kl} \tag{1.2}$$

где F_{ijkl}^{α} – компоненты тензора четвертого ранга симметричного по первой и второй паре индексов и их перестановке; по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование. Компоненты F_{ijkl}^{α} определяют и задают тензоры коэффициентов относительных фазовых проницаемостей. Заметим, что в кристаллофизике тензоры, которые задают материальные свойства, называются материальными. Симметрия материальных тензоров по индексам, которая обусловлена физикой процесса, называется внутренней, а симметрия, которая следует из группы симметрии кристаллической решетки, – внешней [5]. Явный вид тензоров k_{ij} и k_{ij}^{α} определяется в независимых экспериментах и в общем случае внешняя симметрия тензоров (тип анизотропии) может не совпадать [2]. При этом симметрия тензора k_{ij} выше или совпадает с симметрией k_{ij}^{α}, поэтому внешняя симметрия тензоров F_{ijkl}^{α} в общем случае совпадает с внешней симметрией тензоров k_{ij}^{α} [2]. Рассмотрим явный вид выражений (1.2) для всех типов анизотропных тензоров F_{ijkl}^{α}, переходя от менее сложной анизотропии к более сложной.

2. Представление тензоров фазовых и относительных фазовых проницаемостей. При построении связей (1.2) для различных типов симметрии будем полагать, что все тензоры в уравнении соответствуют одному и тому же классу симметрии.

В случае симметрии групп кубической сингонии тензоры k_{ij} и F_{ijkl}^{α} имеют вид

$$k_{ij} = k\delta_{ij}, \quad F_{ijkl}^{\alpha} = f_1^{\alpha}\delta_{ij}\delta_{kl} + f_2^{\alpha}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + f_3^{\alpha}O_{(h)ijkl} \tag{2.1}$$

где k – абсолютная проницаемость, f_i^{α} – функции от насыщенности, $O_{(h)ijkl}$ – простой (базисный) тензор, задающий симметрию групп кубической сингонии. Здесь и далее обозначения базисных тензоров и представление материальных тензоров, если это не будет специально оговорено, принимаются такими же, как и в [4]. Подстановка тензоров (2.1) в равенство (1.2) приводит к соотношениям

$$k_{ij}^{\alpha} = (f_1^{\alpha} + 2f_2^{\alpha} + f_3^{\alpha})k\delta_{ij} \tag{2.2}$$

Получаем, что тензоры коэффициентов фазовых проницаемостей, как и тензор абсолютной проницаемости, изотропные, но отличаются от случая изотропных фильтрационных свойств наличием еще одной материальной функции f_3^α, которая появилась вследствие анизотропии тензора четвертого ранга. Данное обстоятельство еще раз, теоретически, подтверждает отсутствие универсальных функций для относительных фазовых проницаемостей.

Если тензоры имеют симметрию анизотропных текстур и групп симметрии гексагональной сингонии, то

$$\begin{aligned} k_{ij} &= k_1\delta_{ij} + k_2 B_{ij} \\ F^\alpha_{(1)ijkl} &= f_1^\alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + f_2^\alpha(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + f_3^\alpha(\delta_{ij}B_{kl} + B_{ij}\delta_{kl}) + \\ &+ f_4^\alpha(\delta_{ik}B_{jl} + \delta_{il}B_{jk} + B_{ik}\delta_{jl} + B_{il}\delta_{jk}) + f_5^\alpha B_{ij}B_{kl} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Подстановка тензоров (2.3) в равенство (1.2) приводит к соотношениям

$$k_{ij}^\alpha = (F_1^\alpha + F_2^\alpha\theta_{31})k_1\gamma_{ij} + (F_3^\alpha + F_4^\alpha\theta_{13})k_3 B_{ij} \tag{2.4}$$

В соотношениях (2.4) материальные функции и тензоры определяются равенствами

$$\begin{aligned} &\gamma_{ij} = \delta_{ij} - B_{ij}, \quad F_1^\alpha = 2(f_1^\alpha + f_2^\alpha), \quad F_2^\alpha = (f_1^\alpha + f_3^\alpha), \quad F_3^\alpha = 2F_2^\alpha \\ &F_4^\alpha = f_1^\alpha + 2(f_2^\alpha + f_3^\alpha) + 4f_4^\alpha + f_5^\alpha, \quad k_3 = k_1 + k_2, \quad \theta_{ij} = k_i/k_j \end{aligned} \tag{2.5}$$

где B_{ij} – базисный тензор, задающий симметрию анизотропных текстур. В [2] дано иное представление связи (2.4), но оба представления эквивалентны и получаются одно из другого переопределением вида материальных функций F_β^α

В случае симметрии тетрагональной сингонии для групп симметрии $\bar{4}\cdot$ m, 4 : 2, 4 · m, m · 4 : m (обозначение групп симметрии здесь и далее дается по А.В. Шубникову) тензоры k_{ij} и F^α_{ijkl} имеют вид

$$k_{ij} = k_1\delta_{ij} + k_2B_{ij}, \quad F^\alpha_{(2)ijkl} = F^\alpha_{(1)ijkl} + f_6^\alpha O_{(h)ijkl} \tag{2.6}$$

Для представления тензора четвертого ранга принято следующее обозначение: первое слагаемое в (2.6) представляет собой правую часть равенства, задающего тензор четвертого ранга в (2.3). Аналогичные обозначения будут использованы и далее. Подстановка тензоров (2.6) в равенство (1.2) приводит к соотношениям вида (2.4), но с другими материальными функциями F_β^α

$$\begin{aligned} &F_1^\alpha = 2(f_1^\alpha + f_2^\alpha) + f_6^\alpha, \quad F_2^\alpha = (f_1^\alpha + f_3^\alpha), \quad F_3^\alpha = 2F_2^\alpha \\ &F_4^\alpha = f_1^\alpha + 2(f_2^\alpha + f_3^\alpha) + 4f_4^\alpha + f_5^\alpha + f_6^\alpha \end{aligned} \tag{2.7}$$

Для групп симметрии $\bar{4}$, 4, 4 : m тетрагональной сингонии тензор четвертого ранга имеет вид

$$F^\alpha_{(3)ijkl} = F^\alpha_{(2)ijkl} + f_7^\alpha(\Omega_{i\alpha}O_{(h)\alpha jkl} + O_{(h)ijk\alpha}\Omega_{l\alpha} + O_{(h)ikl\alpha}\Omega_{j\alpha} + O_{(h)ij\alpha ll}\Omega_{k\alpha}) \tag{2.8}$$

где Ω_{ij} – базисный тензор. Представление тензора k_{ij} остается таким же, как в (2.6). Подстановка тензора (2.8) в равенство (1.2) приводит к равенствам (2.4) с видом материальных функций (2.7).

Тензор четвертого ранга для групп симметрии 3 : 2, 3 · m, $\bar{6}$ · m тригональной сингонии имеет вид

$$F^{\alpha}_{(4)ijkl} = F^{\alpha}_{(1)ijkl} + f^{\alpha}_6(D_{(3d)ijkl} + D_{(3d)jikl} + D_{(3d)jkil} + D_{(3d)jkli}) \tag{2.9}$$

где $D_{(3h)ijkl}$ – базисный тензор. Тензор k_{ij} остается таким же, как и для групп симметрии тетрагональной сингонии. Подстановка тензора (2.9) и тензора второго ранга из (2.6) в равенство (1.2) приводит к равенствам (2.4) с видом материальных функций (2.7).

Тензор четвертого ранга для групп симметрии $\bar{6}$ и 3 тригональной сингонии имеет вид

$$F^{\alpha}_{(5)ijkl} = F^{\alpha}_{(4)ijkl} + f^{\alpha}_7(D_{(3d)ijk\alpha}\Omega_{l\alpha} + D_{(3d)jik\alpha}\Omega_{l\alpha} + D_{(3d)jki\alpha}\Omega_{l\alpha} + D_{(3d)\alpha jki}\Omega_{l\alpha}) \tag{2.10}$$

тензор второго ранга k_{ij} остается прежним, как в равенстве (2.6). Подстановка тензоров k_{ij} и F^{α}_{ijkl} в равенство (1.2) приводит к равенствам (2.4) с видом материальных функций (2.7).

Соотношения (2.4) задают фильтрационные свойства, которые часто называют трансверсально-изотропными.

Для групп симметрии ромбической сингонии тензоры k_{ij} и F^{α}_{ijkl} имеют вид

$$k_{ij} = k_1 a_i a_j + k_2 c_i c_j + k_3 b_i b_j,$$

$$\begin{aligned} F^{\alpha}_{ijkl} = {} & f^{\alpha}_1\delta_{ij}\delta_{kl} + f^{\alpha}_2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + f^{\alpha}_3(\delta_{ij}D_{(2h)kl} + D_{(2h)ij}\delta_{kl}) + \\ & + f^{\alpha}_4(\delta_{ik}D_{(2h)jl} + \delta_{il}D_{(2h)jk} + D_{(2h)ik}\delta_{jl} + D_{(2h)il}\delta_{jk}) + \\ & + f^{\alpha}_5(\delta_{ij}M_{kl} + M_{ij}\delta_{kl}) + f^{\alpha}_6(\delta_{ik}M_{jl} + \delta_{il}M_{jk} + M_{ik}\delta_{jl} + M_{il}\delta_{jk}) + \\ & + f^{\alpha}_7 D_{(2h)ij}D_{(2h)kl} + f^{\alpha}_8(D_{(2h)il}M_{jk} + D_{(2h)ik}M_{jl} + D_{(2h)jl}M_{ik} + D_{(2h)jk}M_{il}) + f^{\alpha}_9 M_{ij}M_{kl} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь a_i, c_j, b_k – для компонент ортов кристаллофизической системы координат $\mathbf{e}_i$, для которых приняты следующие обозначения: $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$, $D_{(2h)ij}$, M_{ij} – базисные тензоры, k_α – главные значения тензора абсолютной проницаемости вдоль соответствующих координатных осей. Представление тензора второго ранга принято иным, чем в [4], для упрощения выкладок и представления результата.

Подстановка тензоров (2.11) в равенство (1.2) приводит к следующим соотношениям

$$\begin{aligned} k^{\alpha}_{ij} = {} & (F^{\alpha}_{11} + F^{\alpha}_{12}\theta_{21} + F^{\alpha}_{13}\theta_{31})k_1 a_i a_j + (F^{\alpha}_{12}\theta_{12} + F^{\alpha}_{22} + F^{\alpha}_{23}\theta_{32})k_2 c_i c_j + \\ & + (F^{\alpha}_{13}\theta_{13} + F^{\alpha}_{23}\theta_{23} + F^{\alpha}_{33})k_3 b_i b_j \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} F^{\alpha}_{\beta\beta} &= f^{\alpha}_1 + 2f^{\alpha}_2 + 2(f^{\alpha}_3 + 2f^{\alpha}_4)\lambda_\beta + (2f^{\alpha}_5 + 4f^{\alpha}_6 + f^{\alpha}_7)\lambda^{\alpha}_\beta + 4f^{\alpha}_8\lambda^3_\beta + f^{\alpha}_9\lambda^4_\beta \\ F^{\alpha}_{\beta\gamma} &= f^{\alpha}_1 + f^{\alpha}_3(\lambda_\beta + \lambda_\gamma) + f^{\alpha}_5(\lambda^2_\beta + \lambda^2_\gamma) + f^{\alpha}_7\lambda_\beta\lambda_\gamma + f^{\alpha}_9\lambda^2_\beta\lambda^2_\gamma \end{aligned} \tag{2.13}$$

По повторяющимся греческим индексам в (2.13) суммирование не проводится. Свойства, задаваемые тензорами (2.12), часто называют ортотропными.

Тензоры четвертого и второго ранга для групп симметрии моноклинной сингонии имеют вид

$$F^{\alpha}_{(6)ijkl} = f^{\alpha}_{11}a_i a_j a_k a_l + f^{\alpha}_{12}(a_i a_j c_k c_l + c_i c_j a_k a_l) +$$

$$+f_{13}^{\alpha}(a_ia_jb_kb_l+b_ib_ja_ka_l)+f_{22}^{\alpha}c_ic_jc_kc_l+f_{33}^{\alpha}b_ib_jb_kb_l+$$

$$+f_{23(13)}^{\alpha}(c_ic_jb_kb_l+b_ib_jc_kc_l)+$$

$$+f_{15}^{\alpha}(a_ia_jb_ka_l+a_ia_ja_kb_l+b_ia_ja_ka_l+a_ib_ja_ka_l)+$$

$$+f_{25}^{\alpha}(c_ic_jb_ka_l+c_ic_ja_kb_l+b_ia_jc_kc_l+a_ib_jc_kb_l)+$$

$$+f_{35}^{\alpha}(b_ib_jb_ka_l+b_ib_ja_kb_l+b_ia_jb_kb_l+a_ib_jb_kb_l)+ \tag{2.14}$$

$$+f_{44}^{\alpha}(c_ib_jc_kb_l+b_ic_jc_kb_l+b_ic_jc_kb_l+b_ic_jb_kc_l)+$$

$$+f_{46}^{\alpha}(c_ib_ja_kc_l+c_ib_jc_ka_l+a_ic_jc_kb_l+c_ia_ja_kb_l+b_ic_ja_kc_l+$$

$$+a_ic_jb_kc_l+b_ic_jc_ka_l+c_ia_jb_kc_l)+$$

$$+f_{55}^{\alpha}(b_ia_jb_ka_l+b_ia_ja_kb_l+a_ib_jb_ka_l+a_ib_ja_kb_l)+$$

$$+f_{66}^{\alpha}(a_ic_ja_kc_l+a_ic_jc_ka_l+c_ia_ja_kc_l+c_ia_jc_ka_l)$$

$$k_{ij} = k_{11}a_ia_j+k_{31}(a_ib_j+b_ia_j)+k_{22}c_ic_j+k_{33}b_ib_j$$

где f_{mn}^{α} – функции от насыщенности, k_{kl} – компоненты тензора коэффициентов абсолютной проницаемости. Номера индексов в обозначении коэффициентов f_{mn}^{α} приняты такими же, как в кристаллофизике при матричном представлении тензоров четвертого ранга [5]. Переход от четырех индексов к двум осуществляется путем замены пары индексов одним по правилу

$$\begin{gathered}(11)\leftrightarrow 1,\quad (22)\leftrightarrow 2,\quad (33)\leftrightarrow 3,\\ (23)=(32)\leftrightarrow 4,\quad (31)=(13)\leftrightarrow 5,\quad (12)=(21)\leftrightarrow 6\end{gathered} \tag{2.15}$$

Выписанные тензоры (2.14) отличаются от тех, которые представлены для групп симметрии моноклинной сингонии в [4], установкой координатных осей [5]. При написании тензоров (2.14) была использована кристаллофизическая установка. При кристаллофизической установке осей системы координат XYZ ось Y совпадает с осью симметрии второго порядка для групп симметрии 2 и 2 : m или перпендикулярна плоскости симметрии для группы симметрии m. В работе [4] система координат ориентирована так, что вместо оси Y направлена ось Z.

Подставив тензоры F_{ijkl}^{α} и k_{ij} в равенство (1.2), получим явный вид тензоров фазовых проницаемостей в пористой среде с моноклинной симметрией фильтрационных свойств

$$k_{ij}^{\alpha} = f_1^{\alpha}k_{11}a_ia_j+f_2^{\alpha}k_{22}c_ic_j+f_3^{\alpha}k_{33}b_ib_j+f_5^{\alpha}k_{13}(a_ib_j+b_ia_j) \tag{2.16}$$

или в покомпонентной форме записи

$$k_{11}^{\alpha} = f_{11}^{\alpha}k_{11}+f_{12}^{\alpha}k_{22}+f_{13}^{\alpha}k_{33}+2f_{15}^{\alpha}k_{13}$$

$$
\begin{aligned}
k_{22}^{\alpha} &= f_{12}^{\alpha}k_{11} + f_{22}^{\alpha}k_{22} + f_{23}^{\alpha}k_{33} + 2f_{25}^{\alpha}k_{13} \\
k_{13}^{\alpha} &= f_{13}^{\alpha}k_{11} + f_{23}^{\alpha}k_{22} + f_{33}^{\alpha}k_{33} + 2f_{35}^{\alpha}k_{13}
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

$$
k_{31}^{\alpha} = f_{15}^{\alpha}k_{11} + f_{25}^{\alpha}k_{22} + f_{35}^{\alpha}k_{33} + 2f_{55}^{\alpha}k_{31}
$$

Из сравнения соотношений (2.16) и (2.17) несложно получить представление функций f_{β}^{α} через f_{kl}^{α}, которые из-за их громоздкости не приводятся.

Тензоры четвертого и второго ранга для групп симметрии триклинной сингонии имеют наиболее общий вид, представляются громоздкими выражениями и поэтому не приводятся в явном виде.

Их подстановка в равенство (1.2), дает следующий вид тензоров фазовых проницаемостей в пористой среде с триклинной симметрией фильтрационных свойств

$$
\begin{aligned}
k_{ij}^{\alpha} &= f_1^{\alpha}k_{11}a_ia_j + f_6^{\alpha}k_{12}(a_ic_j + c_ia_j) + f_5^{\alpha}k_{31}(a_ib_j + b_ia_j) + \\
&+ f_4^{\alpha}k_{23}(c_ib_j + b_ic_j) + f_2^{\alpha}k_{22}c_ic_j + f_3^{\alpha}k_{33}b_ib_j
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

3. Анализ основных соотношений. В разд. 2 были выписаны все возможные варианты связи (1.2) в предположении, что все материальные тензоры обладают внешней симметрией, соответствующей рассматриваемой группе симметрии. При этом оказалось, что симметрия тензора фазовых проницаемостей совпадает с симметрией тензора абсолютной проницаемости. Однако несложно показать, что симметрия тензоров абсолютной проницаемости может оказаться выше, чем симметрия тензора коэффициентов фазовой проницаемости. Для доказательства рассмотрим случай моноклинной сингонии. Из соотношений (2.17) легко видеть, что симметрия тензоров k_{ij}^{α} не изменится, если тензор k_{ij} будет иметь более высокую симметрию, вплоть до изотропной. В самом деле, для групп симметрии ромбической сингонии (ортотропные фильтрационные свойства) в равенстве (2.17) надо положить $k_{13} = 0$, для трансверсальной изотропии – $k_{13} = 0$ и $k_{11} = k_{33}$, для изотропии – $k_{13} = 0$ и $k_{11} = k_{22} = k_{33}$. Но, наложив соответствующие условия на вид компонент k_{ij}, во всех перечисленных случаях из равенств (2.17) имеем, что $k_{13}^{\alpha} \neq 0$ и $k_{11}^{\alpha} \neq k_{22}^{\alpha} \neq k_{33}^{\alpha}$. Следовательно, моноклинная внешняя симметрия тензоров k_{ij}^{α} сохраняется. Таким образом, при переходе от тензора абсолютных проницаемостей к тензорам фазовых проницаемостей симметрия фильтрационных свойств может не сохраниться. При этом при переходе к двухфазному течению от тензоров абсолютной проницаемости с более высокой симметрией (с известным положением всех трех главных осей) в тензорах фазовых проницаемостей остается известным положение только одной главной оси. При моноклинной симметрии тензоров абсолютной и фазовых проницаемостей направление априори известной главной оси сохраняется, но положения двух других главных осей у тензоров абсолютной и фазовых проницаемостей могут быть различными. Рассмотрим доказательство сделанного утверждения.

Тензоры коэффициентов фазовых и абсолютной проницаемостей с моноклинной симметрией могут быть приведены к главным осям поворотом вокруг оси Y на угол φ, величина которого определяется из равенства

$$
\operatorname{tg} 2\varphi^{\alpha} = \frac{2k_{13}^{\alpha}}{k_{11}^{\alpha} - k_{33}^{\alpha}}
\tag{3.1}
$$

Однако, если в равенстве (3.1) для абсолютных проницаемостей значения k_{13}, k_{11}, k_{33} являются константами и угол φ фиксирован, то для фазовых проницаемостей значения компонент k_{13}^{α}, k_{11}^{α}, k_{33}^{α} зависят от насыщенности и изменяются, поэтому и значения углов φ^{α} также могут изменяться. В самом деле, как следует из соотношений (1.2), коэффициенты f_{mn}^{α} – безразмерные величины, которые представляются в виде функций насыщенности, поэтому компоненты тензоров коэффициентов фазовых проницаемостей k_{ij}^{α} можно представить в виде $k_l^{\alpha} = f_l^{\alpha}(s, \pi_{ij})k_l$, $\pi_{ij} = k_i/k_j$ где и переход от двух индексов к одному индексу проводится по правилу (2.15). Тогда равенства (3.2) можно представить в виде

$$\operatorname{tg}2\varphi^{\alpha} = \frac{2f_5^{\alpha}(s, \pi_{ij})k_5}{f_1^{\alpha}(s, \pi_{ij})k_1 - f_3^{\alpha}(s, \pi_{ij})k_3} \tag{3.2}$$

где $f_l^{\alpha}(s, \pi_{ij})$ – функции, зависящие от насыщенности и отношения компонент тензора абсолютной проницаемости. Условие совпадения направления главных осей тензоров k_{ij}^{α} и k_{ij} в плоскости XZ накладывает на функции $f_l^{\alpha}(s, \pi_{ij})$ связи

$$\begin{aligned}
\pi_{13} &= \frac{f_3^{\alpha}(s, \pi_{ij}) - f_5^{\alpha}(s, \pi_{ij})}{f_1^{\alpha}(s, \pi_{ij}) - f_5^{\alpha}(s, \pi_{ij})} \\
\pi_{13} &= \frac{f_3^{1}(s, \pi_{ij})f_5^{2}(s, \pi_{ij}) - f_3^{2}(s, \pi_{ij})f_5^{1}(s, \pi_{ij})}{f_1^{1}(s, \pi_{ij})f_5^{2}(s, \pi_{ij}) - f_1^{2}(s, \pi_{ij})f_5^{1}(s, \pi_{ij})}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Однако проверить выполнение условий (3.3) путем сопоставления с экспериментальными данными в настоящее время не представляется возможным в силу отсутствия таковых исследований для кернов с установленным типом анизотропии фильтрационных свойств [6], поэтому смоделируем возможный вариант поведения тензора фазовых проницаемостей. Для этого рассмотрим сечения указательных поверхностей тензора k_{ij}^{α} плоскостью XZ.

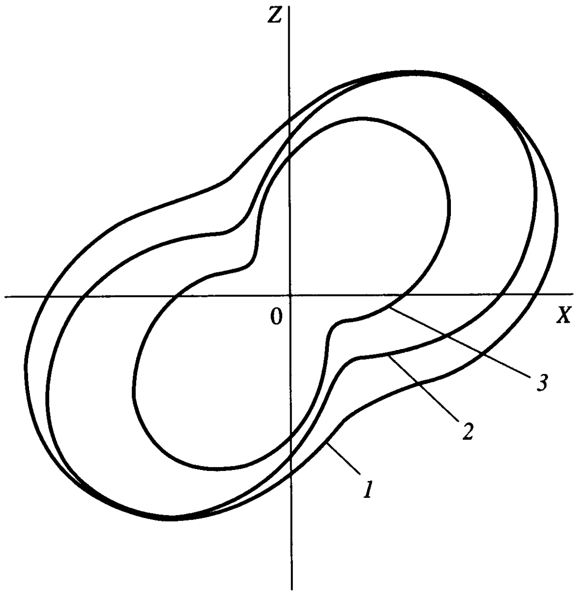
Указательная поверхность фильтрационных свойств определяется равенством $k^{\alpha}(n) = k_{ij}^{\alpha}n_in_j$, в котором n_i – компоненты орта, задающего направление, вдоль которого определяется направленная фазовая проницаемость $k^{\alpha}(n)$. В плоскости XZ для тензоров (2.17) выражение для указательной поверхности принимает вид

$$k^{\alpha}(n) = k_{11}^{\alpha}\cos^2\beta + 2k_{31}^{\alpha}\cos\beta\sin\beta + k_{33}^{\alpha}\sin^2\beta \tag{3.4}$$

где β – угол между координатной осью X и ортом n_i. Переходя от компонент тензоров коэффициентов фазовых проницаемостей к компонентам тензора абсолютных проницаемостей, перепишем равенство (3.4) в виде

$$k^{\alpha}(n) = f_1^{\alpha}(s, \pi_{ij})k_1\cos^2\beta + 2f_5^{\alpha}(s, \pi_{ij})k_5\cos\beta\sin\beta + f_3^{5}(s, \pi_{ij})k_3\sin^2\beta$$

Используя результаты численного и лабораторного эксперимента [6, 7], можно задаться значениями функций $f_l^{\alpha}(s, \pi_{ij})$ и проанализировать поведение сечений поверхности фазовых проницаемостей. На фигуре 1 представлены результаты подобного



Сечение поверхности тензора коэффициентов фазовых проницаемостей k_{ij}^2 для разных значений функций относительных фазовых проницаемостей $f_l^2(s, \pi_{ij})$. *1* – $f_1^2 = f_3^2 = f_5^2 = 1$; *2* – $f_1^2 = 0.85$, $f_3^2 = 0.9$, $f_5^2 = 0.375$; *3* – $f_1^2 = 0.46$, $f_3^2 = 0.795$, $f_5^2 = 0.295$

моделирования. Наличие компоненты k_{13}^α (или, что то же, k_5^α) в равенстве (3.4) приводит к изменению ориентации главных осей тензора фазовых проницаемостей при изменении насыщенности.

С помощью аналогичных выкладок можно показать, что ориентация главных осей тензоров фазовых проницаемостей зависит от насыщенности и в случае триклинной симметрии фильтрационных свойств. В самом деле, разрешая вековое (характеристическое) уравнение для тензоров абсолютной и фазовых проницаемостей, можно определить главные значения и главные направления тензоров. Совместив одну из координатных осей с главным направлением, получим ситуацию, аналогичную рассмотренной при моноклинной симметрии фильтрационных свойств. Однако, если при моноклинной симметрии положение одной из координатных осей было фиксировано (ось Y), при триклинной симметрии фильтрационных свойств положение всех главных осей у тензоров фазовых проницаемостей будет зависеть от насыщенности.

4. О представлении функций относительных фазовых проницаемостей для ортотропных и трансверсально-изотропных пористых сред.

В [3] был получен явный вид для функций относительных фазовых проницаемостей аппроксимирующих результаты численного эксперимента [7], в котором предельные насыщенности s_* и s^* принимали значение нуль и единица соответственно. Однако для решения прикладных задач больший интерес представляет случай, когда предельные насыщенности отличны от нуля и единицы, поэтому рассмотрим обобщение явного вида функций относительных фазовых проницаемостей на данный случай. Общий вид полученных в (2.12) функций относительных фазовых проницаемостей представляется выражениями

$$\varphi_i^\alpha = F_{ij} + F_{ik}\theta_{ki} + F_{il}\theta_{li} \tag{4.1}$$

которые удовлетворяют условиям: при $s = s_{(i)*}$ $\varphi_i^1 = 0$ и при $s = s_{(i)}^*$ $\varphi_i^2 = 0$. Предположив, что все функции F_{ij} одного порядка, выражения (4.1) можно преобразовать к следующим приближенным равенствам

$$\varphi_i^1 = \frac{I_1(k)}{k_i} F_{ii}(s - s_{(i)*}), \quad \varphi_i^2 = \frac{I_1(k)}{k_i} F_{ii}(s_{(i)}^* - s) \tag{4.2}$$

в которых суммирование по i отсутствует. Множители $(s - s_{(i)*})$ и $(s_{(i)}^* - s)$ при F_{ii} гарантируют выполнение приведенных выше условий и соответствуют общепринятой аппроксимации относительных фазовых проницаемостей для изотропных пористых сред [8]. Множитель $I_1(k)/k_i$, где $I_1(k)$ – первый инвариант тензора коэффициентов абсолютной проницаемости, обусловлен анизотропией.

Далее, при построении аппроксимации функций φ_i^α, необходимо учесть условие на другой границе интервала изменения насыщенности. Изначально функции относительных фазовых проницаемостей строились в интервале $s_* \le s \le 1$ (для воды) и $0 \le s \le s^*$ (для нефти или газа). В этом случае значения φ_i^α на границах интервала были фиксированными: $\varphi_i^1(1) = 1$(для воды) и $\varphi_i^2(0) = 1$ (для нефти или газа). Но в последнее время измерения стали проводить в интервале подвижности обеих фаз: $s_* \le s \le s^*$, поэтому значения $\varphi_i^1(s = s^*)$ (для воды) и $\varphi_i^2(s = s_*)$ (для нефти или газа) превращаются в значения "на свободной границе" и определяются экспериментально. Таким образом, исходное простейшее представление функций относительных фазовых проницаемостей для изотропных сред в виде $\varphi = (s - s_*)^\varepsilon/(1 - s_*)$ необходимо заменить на выражение

$$\varphi_i^1 = a_i^1 (s - s_{(i)*})^{\varepsilon_i} / (s_{(i)}^* - s_{(i)*})$$

Если в (4.2) положить, что множитель $I_1(\kappa)F_\gamma/\kappa_\alpha$ обусловлен анизотропией и для изотропных сред равен единице, то представление функций относительных фазовых проницаемостей в случае анизотропии, удовлетворяющее перечисленным условиям для воды и нефти (или газа), может быть задано в виде

$$\varphi_i^1 = \left[a_i + \left(\frac{I_1(k)}{3K_i} - 1\right)(s_{(i)}^* - s)\right]\left(\frac{s - s_{(i)*}}{s_{(i)}^* - s_{(i)*}}\right)^{\varepsilon_i} \tag{4.3}$$

$$\varphi_i^2 = \left[b_i + \left(\frac{I_1(k)}{3K_i} - 1\right)s - s_{(i)*}\right]\left(\frac{s_{(i)}^* - s}{s_{(i)}^* - s_{(i)*}}\right)^{\beta_i} \tag{4.4}$$

где a_i, b_i, ε_i, β_i – параметры, которые определяются экспериментально, при этом $a_i = \varphi_i^1(s_{(i)}^*)$, $b_i = \varphi_i^2 = s_{(i)*}$. Понятно, что требование равенства ε_i и β_i для всех главных направлений является сильным ограничением, так как согласно соотношениям (4.1), каждая из φ_i^α определяется своим набором функций F_{ii}. Тем не менее степени ε_i и β_i должны представляться через инвариантные величины, задающие и определяющие фильтрационно-емкостные параметры среды, и при переходе от анизотропии к изотропному случаю их значение должно соответствовать известным аппроксимациям [8].

Однако экспериментальных данных для проведения подобного анализа в настоящее время еще не достаточно.

Заключение. Для всех типов анизотропии в инвариантном тензорном виде выписаны представления обобщенного закона Дарси при фильтрации двух несмешивающихся жидкостей. Для всех представлений обобщенного закона проанализированы тензоры коэффициентов фазовых проницаемостей и выражения для относительных фазовых проницаемостей. Показано, что симметрия тензоров коэффициентов фазовых проницаемостей может не совпадать с симметрией тензора абсолютной проницаемости. Для триклинных и моноклинных классов симметрии (типов анизотропии) тензоры коэффициентов фазовых проницаемостей могут быть не соосны между собой и с тензором абсолютной проницаемости, более того, положение главных осей тензоров коэффициентов фазовых проницаемостей может зависеть от насыщенности. Полученные соотношения позволяют сформулировать требования к постановке комплексных лабораторных исследований по определению относительных фазовых проницаемостей в анизотропных коллекторах углеводородного сырья.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02--01--00369) и Министерства образования РФ (проект Т 00-42-764 по фундаментальным исследованиям в области технических наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев Н.М., Максимов В.М.* О структуре тензоров коэффициентов фазовых и относительных проницаемостей для анизотропных пористых сред // Докл. РАН. 1998. т. 358. № 3. С. 337–339.
2. *Дмитриев Н.М., Максимов В.М.* Определяющие уравнения двухфазной фильтрации в анизотропных пористых средах // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 2. С. 87–94.
3. *Максимов В.М., Дмитриев Н.М.* Методы нелинейных тензорных функций в моделях двухфазной фильтрации в анизотропных средах // Проблемы современной механики М.: Изд-во МГУ, 1998. С. 76–83.
4. *Лохин В.В., Седов Л.И.* Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып.3. С. 393–417.
5. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1975. 680 с.
6. *Кузнецов А.М.* Научно-методические основы исследования влияния свойств пород коллекторов на эффективность извлечения углеводородов из недр: Автореф. дис. на соискание степени докт. техн. наук. М., ВНИИнефть им. ак. А.П. Крылова. 1998. 50 с.
7. *Bear J., Braester C., Menier P.S.* Effective and relative permeabilities of anisotropic porous media // Transp. Porous Media. 1987. V. 2. № 3.P. 301–316.
8. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1983. 416 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.VII. 2002

E-mail: dmitriev.msc mtu-net.ru