

УДК 532.526.5

© 2003 г. Г. Л. КОРОЛЕВ, ВИК. В. СЫЧЕВ

**О ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ТРЕХМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ**

Рассмотрено стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса около малой пространственной неровности, расположенной на гладкой поверхности обтекаемого тела и ориентированной почти вдоль линий поверхностного трения. Детально изучен режим, когда в масштабах неровности реализуется квазидвумерное течение с заданным градиентом давления. Получено численное решение соответствующей краевой задачи для уравнений пограничного слоя. Показано, что это решение в отличие от плоского случая единственно.

*Ключевые слова:* пограничный слой, локальные возмущения, особенности, отрыв.

К настоящему времени, начиная с работ [1, 2], хорошо изучено влияние малых пространственных неровностей на течение в двумерном пограничном слое, а также и в трехмерном пограничном слое, когда обе составляющие безразмерного поверхностного трения принимают вблизи неровности конечные значения (см. библиографию в [3–7]). Представляет интерес рассмотреть течения, в которых локальная неровность ориентирована таким образом, что в приходящем к ней пограничном слое, находящемся под действием внешнего градиента давления, одна из составляющих поверхностного трения мала, т.е. соответствующий профиль скорости является предотрывным или содержит слабые противотоки. В данной работе изучается один из возможных режимов такого обтекания, когда в масштабах неровности реализуется квазидвумерное течение с заданным распределением давления, определяемым одновременно формой неровности и течением в целом. В этом случае происходит зарождение отрыва в малой окрестности изолированной точки нулевого поверхностного трения.

1. Рассмотрим пространственное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое, развивающемся на гладкой поверхности твердого тела. Введем следующие обозначения:  $lx, ly, lz$  – криволинейные ортогональные координаты, связанные с поверхностью ( $y = 0$ );  $u_\infty u, u_\infty v, u_\infty w$  – соответствующие составляющие вектора скорости и  $p_\infty + \rho u_\infty^2 p$  – давление. Здесь  $l$  – характерный размер тела,  $u_\infty$  и  $p_\infty$  – значения скорости и давления в однородном набегающем потоке,  $\rho$  – плотность жидкости. Число Рейнольдса  $Re = u_\infty l / \nu \rightarrow \infty$ ,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости.

Система уравнений трехмерного пограничного слоя вместе с краевыми условиями имеет вид [8]

$$u = U(x, Y, z) + o(1), \quad v = Re^{-1/2} V(x, Y, z) + o(Re^{-1/2})$$

$$w = W(x, Y, z) + o(1), \quad p = P(x, z) + o(1), \quad y = Re^{-1/2} Y$$

$$\frac{U \partial U}{h_1 \partial x} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{W \partial U}{h_2 \partial z} + \frac{UW \partial h_1}{h_1 h_2 \partial z} - \frac{W^2 \partial h_2}{h_1 h_2 \partial x} + \frac{1 \partial P}{h_1 \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$$

$$\frac{U \partial W}{h_1 \partial x} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{W \partial W}{h_2 \partial z} + \frac{UW \partial h_2}{h_1 h_2 \partial x} - \frac{U^2 \partial h_1}{h_1 h_2 \partial z} + \frac{1 \partial P}{h_2 \partial z} = \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}, \quad P = P_e(x, z) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(h_2 U)}{\partial x} + h_1 h_2 \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial(h_1 W)}{\partial z} = 0$$

$$Y = 0: \quad U = V = W = 0$$

$$Y \rightarrow \infty: \quad U \rightarrow U_e(x, z), \quad W \rightarrow W_e(x, z)$$

Здесь  $h_1(x, z)$ ,  $h_2(x, z)$  и  $h_3 = 1$  – коэффициенты Ламэ. Давление  $P_e(x, z)$  определено из решения внешней задачи и связано с распределением скорости уравнением Бернулли:

$$U_e^2 + W_e^2 + 2P_e = 1.$$

Пусть пространственная неровность расположена в малой окрестности начала системы координат и ее продольный и поперечный размеры (в направлении осей  $x$  и  $z$  соответственно) суть величины порядка  $\mu$  и  $\varepsilon$ , а высота –  $O(h\text{Re}^{-1/2})$ . При этом  $\mu = \mu(\text{Re}) \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(\text{Re}) \rightarrow 0$  и  $h\text{Re}^{-1/2} \rightarrow 0$  при  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . Будем полагать также, что неровность вытянута вдоль оси  $x$ , т.е.  $\mu\varepsilon^{-1} \rightarrow \infty$ . Пусть далее линия поверхностного трения  $S$  – предельная линия тока (фиг. 1), проходящая (в масштабах  $x = O(1)$ ,  $z = O(1)$ ) через начало системы координат, составляет с осью  $x$  малый угол  $\alpha = \sigma\alpha_0$ , где  $\sigma = \sigma(\text{Re}) \rightarrow 0$  при  $\text{Re} \rightarrow \infty$  и  $\alpha_0$  – постоянная. Тогда  $\tau_z = \partial W / \partial Y|_{Y=0}$  – составляющая поверхностного трения в направлении оси  $z$  в этой точке равна в главном члене  $\alpha\tau_x(0, 0)$ , где  $\tau_x = \partial U / \partial Y|_{Y=0}$ . Поэтому, а также в силу регулярности решения внешней задачи при  $|x| \rightarrow 0$ ,  $|z| \rightarrow 0$ , для профиля скорости в пограничном слое справедливо представление

$$U = U_0(Y) + O(x) + O(z) + O(\sigma), \quad V = O(1) \quad (1.2)$$

$$W = W_0(Y) + O(x) + O(z) + \sigma W_1(Y) + o(\sigma), \quad W_1 = \alpha_0 U_0$$

Функции  $U_0(Y)$ ,  $W_0(Y)$  определяются из решения задачи в целом [8]. При этом при  $Y \rightarrow 0$

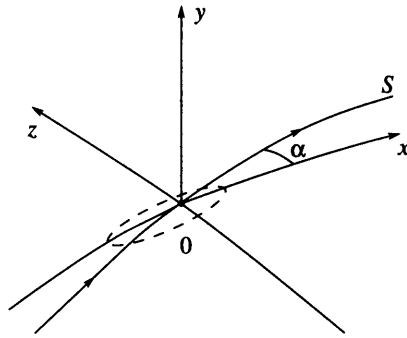
$$U_0 = a_0 Y + O(Y^2), \quad W_0 = b_0 Y^2 / 2 + O(Y^4) \quad (1.3)$$

$$W_1 = b_1 Y + O(Y^2), \quad a_0 > 0, \quad b_0 > 0, \quad b_1 = \alpha_0 a_0$$

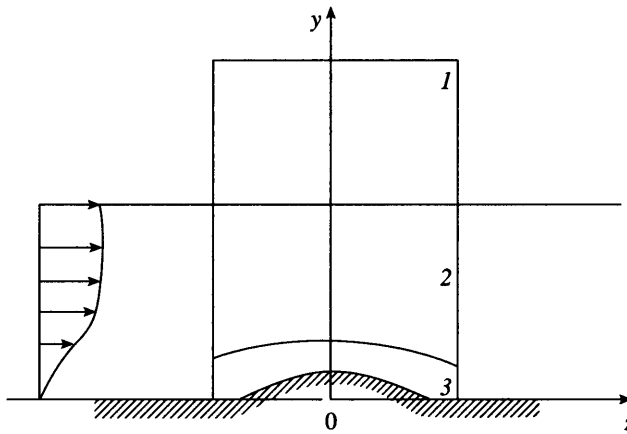
Из второго уравнения в (1.1) следует, что  $b_0 = P_{20} h_{20}^{-1}$ , где  $P_{20} = \partial P_e / \partial z$  при  $x = z = 0$ , и  $h_{20} = h_2(0, 0)$ . Известно, что  $U_0(\infty) = U_e(0, 0)$ ,  $W_0(\infty) = W_e(0, 0)$ .

Таким образом, если неровность расположена почти ( $\alpha$  – мало) вдоль линий поверхностного трения, то в поперечном направлении к ней приходит профиль скорости (1.2), (1.3) с малым поверхностным трением  $\tau_z = \sigma\alpha_0 a_0 + o(\sigma)$ , которое положительно при  $\alpha_0 > 0$  и отрицательно при  $\alpha_0 < 0$ . В [9] было рассмотрено плоское течение с таким приходящим к неровности профилем скорости. В соответствии с исходным предположением о регулярности решения внешней задачи ограничимся, как и в [9], изучением течений с локальными зонами отрыва. Ясно, что если неровность является достаточно сильно вытянутой в продольном направлении (соответствующие оценки будут даны ниже), то в поперечном направлении будет иметь место течение, подобное плоскому из [9]. Воспользуемся результатами этой работы.

Согласно [9], в масштабах неровности изучаемое течение имеет трехслойную структуру: вязкий пристеночный подслой (обл. 3, фиг. 2), где скорость мала; основная часть пограничного слоя (обл. 2), в которой в главном приближении сохраняется при-



Фиг. 1. Схема течения около неровности



Фиг. 2. Асимптотическая структура течения около неровности в сечении  $x = \text{const}$

ходящий профиль скорости, и область  $1$  – слабовозмущенного потенциального течения. В [9] было показано, что если масштаб длины неровности (в принятых обозначениях – в поперечном направлении)  $\epsilon = \epsilon_0 = \text{Re}^{-2/7}$ , то при  $z = O(\epsilon_0)$  имеет место течение со взаимодействием и при этом  $\sigma = \epsilon_0^{1/4}$ , а высота неровности есть величина  $O(\text{Re}^{-1/2} \epsilon_0^{1/4})$ .

Если же этот масштаб по порядку величины является бóльшим:  $\epsilon = \epsilon_0 \Delta_0^{1/2}$ ,  $\Delta_0 \rightarrow \infty$ , то при  $z = O(\epsilon)$  градиент давления будет заданным и  $\sigma = \epsilon_0^{1/4} \Delta_0^{1/8}$ , а высота  $O(\text{Re}^{-1/2} \epsilon_0^{1/4} \Delta_0)$ . При значениях  $\sigma$ , бóльших указанных в масштабах неровности, как и в [9, 10], реализуются течения, которые описываются решениями краевых задач для течений с конечным трением.

Дальнейший анализ будет посвящен рассмотрению течений с заданным градиентом давления. Следуя [9] и на основании сказанного, представим решение в области вязкого пристеночного подслоя (обл. 3) в виде следующих асимптотических разложений

$$z = \epsilon_0 \Delta_0^{1/2} z^*, \quad y = \text{Re}^{-1/2} \epsilon_0^{1/4} [\Delta_0 F(x^*, z^*) + \Delta_0^{1/8} y^*]$$

$$x = \mu x^*, \quad \epsilon_0 = \text{Re}^{-2/7}, \quad \sigma = \epsilon_0^{1/4} \Delta_0^{1/8}$$

$$w = \varepsilon_0^{1/2} \Delta_0^{1/4} w^*(x^*, y^*, z^*) + \dots$$

$$v = \operatorname{Re}^{-1/2} \varepsilon_0^{-1/4} [\Delta_0^{3/4} V_0^*(x^*, y^*, z^*) + \mu^{-1} \varepsilon_0^{3/4} \Delta_0^{9/8} V_1^*(x^*, y^*, z^*) + \dots + \Delta_0^{-1/8} v^*(x^*, y^*, z^*)] + \dots \quad (1.4)$$

$$u = \varepsilon_0^{1/4} \Delta_0^{1/8} u^*(x^*, y^*, z^*) + \dots$$

$$p = p_{00} + \mu P^*(x^*, y^*, z^*) + \varepsilon_0 \Delta_0^{1/2} p^*(x^*, y^*, z^*) + \dots$$

$$2P_{00} = 1 - U_0^2(\infty) - W_0^2(\infty)$$

Продольный масштаб  $\mu$  остается пока произвольным, а порядок составляющей  $u$  определяется на основании (1.3). Здесь функция  $F(x^*, z^*)$  задает форму неровности.

Будем полагать, что  $F \rightarrow 0$  при  $x^{*2} + z^{*2} \rightarrow \infty$  и является гладкой.

В результате подстановки (1.4) в систему исходных уравнений Навье – Стокса или в (1.1) получаем

$$\begin{aligned} \frac{w^* \partial w^*}{h_{20} \partial z^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + M_0 \frac{u^* \partial w^*}{h_{10} \partial x^*} + \frac{1}{h_{20}} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} &= \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} \\ h_{10} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} + h_{10} h_{20} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + M_0 h_{20} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} &= 0 \\ \frac{w^* \partial u^*}{h_{20} \partial z^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + M_0 \frac{u^* \partial u^*}{h_{10} \partial x^*} &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial z^*} = \frac{\partial P^*}{\partial y^*} = \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0, \quad V_0^* = \frac{w^* \partial F}{h_{20} \partial z^*}, \quad V_1^* = \frac{u^* \partial F}{h_{10} \partial x^*}$$

$$h_{10} = h_1(0, 0), \quad h_{20} = h_2(0, 0), \quad M_0 = (\varepsilon_0 \Delta_0^{1/2})^{3/4} \mu^{-1}$$

Здесь  $M_0$  – параметр подобия, характеризующий отношение поперечного размера неровности к продольному. Если  $M_0 \rightarrow 0$ , то течение будет квазидвумерным, т.е. зависимость решения от  $x^*$  параметрической.

Решение системы уравнений (1.5) должно удовлетворять условию прилипания

$$w^* = v^* = u^* = 0 \quad (1.6)$$

при  $y^* = 0$ . Кроме того, из срачивания с приходящим к неровности профилем скорости (1.2), (1.3) следует, что

$$w^* \rightarrow b_0 y^{*2}/2 + b_1 y^*, \quad u^* \rightarrow a_0 y^*, \quad \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \rightarrow P_{20} \quad (1.7)$$

$$z^* \rightarrow -\infty, \quad |x^*| \rightarrow \infty$$

В основной части пограничного слоя (обл. 2), сохраняющей толщину  $O(\operatorname{Re}^{-1/2})$ , главные члены разложений – функции  $W_0$  и  $U_0$  из (1.2). Поэтому в соответствии с (1.3)

на внешней границе вязкого подслоя, т.е. при  $y^* \rightarrow \infty : w^* \rightarrow b_0 y^{*2} / 2, u^* \rightarrow a_0 y^*$ . Тогда из (1.5) находим, что

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{b_0}{2} y^{*2} + A^*(x^*, z^*) y^* + O(1) \\ v^* &= -\frac{1}{2h_{20}} \frac{\partial A^*}{\partial z^*} y^{*2} + O(y^*) \\ u^* &= a_0 y^* + B^*(x^*, z^*) + o(1) \\ B^* &= a_0 b_0^{-1} [A^*(x^*, z^*) - b_1] \end{aligned} \tag{1.8}$$

при  $y^* \rightarrow \infty$ . Функция  $A^*(x^*, z^*)$  остается произвольной, известно только, что  $A^* \rightarrow b_1$  при  $z^* \rightarrow -\infty, |x^*| \rightarrow \infty$ .

Используя (1.8), а также выражения для  $V_0^*, V_1^*$  в (1.5) и (1.4), представим решение для области 2 в виде

$$\begin{aligned} z &= \varepsilon_0 \Delta_0^{1/2} z^*, \quad y = \text{Re}^{-1/2} [\varepsilon_0^{1/4} \Delta_0 F(x^*, z^*) + Y^*], \quad x = \mu x^* \\ w &= W_0(Y^*) + \varepsilon_0^{1/4} \Delta_0^{1/8} W_1^*(x^*, Y^*, z^*) + \dots \\ v &= \text{Re}^{-1/2} \varepsilon_0^{-3/4} \Delta_0^{1/2} [V_0^0(x^*, Y^*, z^*) + \\ &+ \Delta_0^{-7/8} V_1^*(x^*, Y^*, z^*) + \dots + \varepsilon_0 \Delta_0^{1/2} \mu^{-1} V_1^0(x^*, Y^*, z^*) + \dots] \\ u &= U_0(Y^*) + \varepsilon_0^{1/4} \Delta_0^{1/8} U_1^*(x^*, Y^*, z^*) + \dots \\ p &= p_{00} + \mu P_1^*(x^*, Y^*, z^*) + \varepsilon_0 \Delta_0^{1/2} p_1^*(x^*, Y^*, z^*) + \dots \end{aligned} \tag{1.9}$$

Внося эти разложения в систему исходных уравнений, находим решение, удовлетворяющее условиям сращивания при  $Y^* \rightarrow 0$  с разложениями (1.4), (1.8)

$$\begin{aligned} W_1^* &= b_0^{-1} A^*(x^*, z^*) W_0'(Y^*) \\ V_0^0 &= \frac{1}{h_{20}} \frac{\partial F}{\partial z^*} W_0(Y^*), \quad V_1^0 = \frac{1}{h_{10}} \frac{\partial F}{\partial x^*} U_0(Y^*) \\ V_1^* &= -\frac{1}{b_0 h_{20}} \frac{\partial A^*}{\partial z^*} W_0(Y^*) \\ U_1^* &= b_0^{-1} [A^*(x^*, z^*) - b_1] U_0'(Y^*) \\ P_1^* &= P^* = P_0(x^*), \quad p_1^* = p^* = p_0(x^*, z^*) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Рассмотрев наконец слабозмущенное потенциальное течение в области 1 с масштабами  $z = O(\varepsilon_0 \Delta_0^{1/2}), y = O(\varepsilon_0 \Delta_0^{1/2}), x = O(\mu)$ , получаем выражение для составляющей градиента давления из первого уравнения в (1.5) через форму неровности, поскольку последняя (см. (1.10), (1.9)) определяет в главном члене значение для нормальной

компоненты вектора скорости на внешней границе пограничного слоя. Это выражение имеет вид

$$\frac{\partial p^*}{\partial z^*} = \frac{\partial p_0}{\partial z^*} = P_{20} + \frac{q_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2 (t - z^*)} dt, \quad q_0 = \frac{W_0^2(\infty)}{h_{20}} \quad (1.11)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Итак, для описания течения в пристеночной области необходимо найти решение краевой задачи (1.5)–(1.8) для уравнений пограничного слоя с заданным градиентом давления (1.11).

2. С помощью аффинного преобразования

$$x^* = a_0 \beta^3 h_{10}^{-1} X', \quad y^* = \beta Y', \quad z^* = b_0 \beta^4 h_{20}^{-1} Z'$$

$$u^* = a_0 \beta U', \quad v^* = \beta^{-1} V', \quad w^* = b_0 \beta^2 W' \quad (2.1)$$

$$p_0 = b_0^2 \beta^4 P', \quad F = \beta F', \quad A^* = b_0 \beta A, \quad \beta = b_0^{-3/7} W_0^{2/7}(\infty)$$

задача (1.5)–(1.8), (1.11) приводится к виду

$$W \frac{\partial W}{\partial Z} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + M_0 U \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial Z} + \frac{\partial V}{\partial Y} + M_0 \frac{\partial U}{\partial X} = 0$$

$$W \frac{\partial U}{\partial Z} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + M_0 U \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$$

$$Y = 0 : W = V = U = 0$$

$$Y \rightarrow \infty : W = \frac{Y^2}{2} + A(Z, X)Y + O(1) \quad (2.2)$$

$$V = -\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial Z} Y^2 + O(Y)$$

$$U = Y + [A(Z, X) - \Omega_0] + o(1)$$

$$Z \rightarrow -\infty, \quad |X| \rightarrow \infty : W \rightarrow \frac{Y^2}{2} + \Omega_0 Y, \quad \frac{\partial P}{\partial Z} \rightarrow 1$$

$$A \rightarrow \Omega_0, \quad U \rightarrow Y$$

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2 (t - Z)} dt, \quad \Omega_0 = \frac{b_1}{b_0 \beta}$$

Здесь  $\Omega_0$  – параметр, характеризующий величину малого поперечного трения в приходящем к неровности потоке. Если  $\Omega_0 < 0$  (т.е.  $\alpha_0 < 0$ , см. (1.3)), то в этом приходящем профиле скорости есть противотоки. Заметим также, что функция  $A(Z, X)$  опре-

деляется в процессе решения. (В (2.2) и всюду ниже штрихи в обозначениях (2.1) опущены.)

В дальнейшем будем рассматривать только квазидвумерное течение, соответствующее значениям  $M_0 = \varepsilon^{3/4} \mu^{-1} \rightarrow 0$ . Уравнение для функции  $U(Z, Y, X)$  при этом отделяется от системы (2.2).

Исследуем сначала линейную задачу. Пусть  $F = HG(Z, X)$ , где  $H$  мало. В силу параметрической зависимости решения от  $X$  справедливы результаты [9] для плоского течения. В частности, составляющая поверхностного трения в поперечном направлении определяется выражением

$$\begin{aligned} \tau_Z &= \left. \frac{\partial W}{\partial Y} \right|_{Y=0} = H^{1/2} A_1(Z, X) + O(H), \quad \Omega_0 = H^{1/2} \omega_1 \\ A_1^2 &= \omega_1^2 + B(Z, X), \quad B = -\frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{2}\Gamma(5/4)} \int_Z^\infty \frac{\partial^2 G(t, X)}{\partial t^2} \frac{dt}{(t-Z)^{1/2}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для продольной составляющей вектора скорости в результате линеаризации [9] приходим к задаче

$$U = Y + H^{1/2} U_1(Z, Y, X) + O(H)$$

$$\frac{Y^2}{2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial Z} - \frac{\partial A_1}{\partial Z} \right) = \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2}$$

$$Y = 0 : U_1 = 0, \quad |Z| \rightarrow \infty : U_1 \rightarrow 0$$

$$Y \rightarrow \infty : U_1 \rightarrow A_1 - \omega_1$$

Из ее решения находим, в частности, что

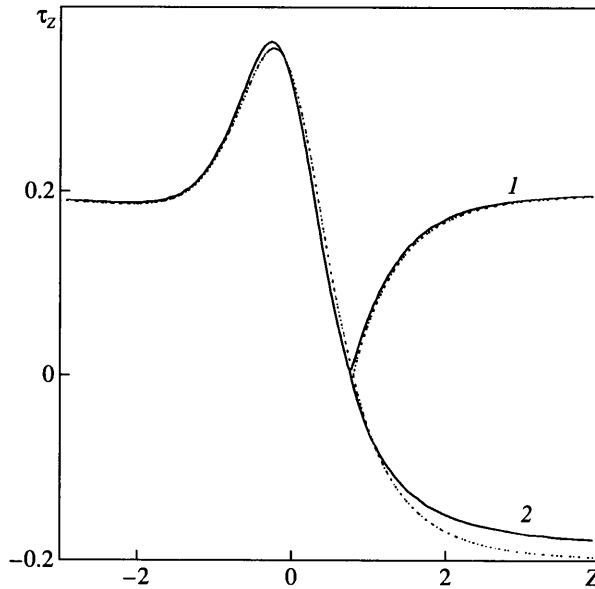
$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right|_{Y=0} = \frac{1}{2^{5/4} \Gamma(5/4)} \int_{-\infty}^Z \frac{\partial A_1(t, X)}{\partial t} \frac{dt}{(Z-t)^{1/4}}$$

Для определенности будем считать, что  $\omega_1 > 0$ . Решения линейной задачи для плоского течения неединственны [9]. Если в (2.3)  $G = c_0 g(Z)$ ,  $c_0 > 0$ , то существует критическое значение постоянной  $c_0 = c^*$ , такое что при  $c_0 < c^*$  трение  $\tau_Z(Z) > 0$ , а при  $c_0 > c^*$  решение (2.3) становится комплекснозначным. Наконец, при  $c_0 = c^*$  функция  $\tau_Z(Z)$  обращается в нуль в единственной точке  $Z = Z_s$  и через эту точку решение может быть продолжено двумя следующими способами [11]. Если при  $Z > Z_s$  взять в (2.3) в качестве решения положительный корень, т.е.

$$A_1 = A_+(Z) = \omega_1 (1 + \omega_1^{-2} B(Z))^{1/2}$$

при всех  $Z$  (пунктирная кривая 1, фиг. 3), то в точке  $Z = Z_s$  возникает устраняемая особенность [11] и  $A_+(Z)$  ведет себя как  $|Z - Z_s|$  при  $|Z - Z_s| \rightarrow 0$ . Если же при  $Z > Z_s$  полагать  $A_1 = A_- = -A_+(z)$  (пунктирная кривая 2, фиг. 3), то решение гладко проходит через точку нулевого поверхностного трения  $Z = Z_s$  [12].

Заметим, что неединственность и зависимость решения от параметра  $c_0$  (в отличие от решения линейных задач для течений с конечным трением [1, 2]) связаны с тем, что выражения (2.3) находят из условия разрешимости краевой задачи Стюартсона [13].



Фиг. 3. Распределение поверхностного трения при критическом значении параметра высоты для  $\Omega_0 = 0.2$ . Сплошная линия – решение задачи (2.2), (2.4); пунктир – решение (2.3), (2.4)

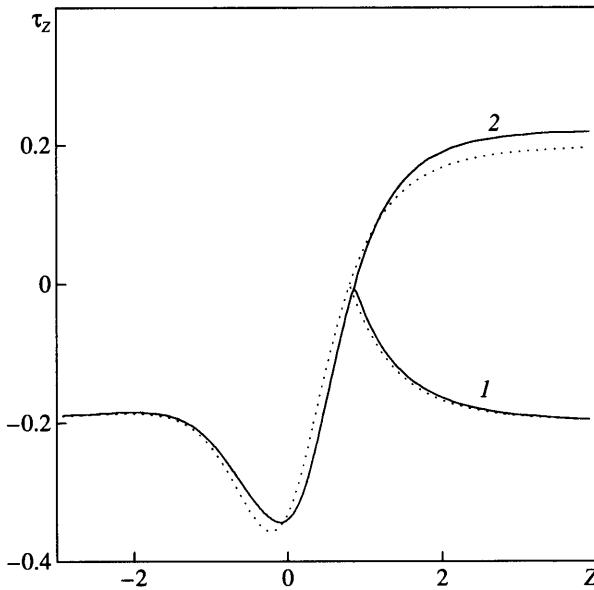
Все сказанное относится и к неровностям в виде углубления ( $c_0 < 0$ , см. [9]). Наконец, если  $\omega_1 < 0$ , то соответствующее решение линейной задачи отличается от приведенного только знаком (см. [9] и фиг. 4).

Для квазидвумерного течения решение единственно. Действительно, если при каком-то значении параметра  $X = X_0$  функция  $G = c_0 g(Z, X_0)$ ,  $c_0 > 0$ , принимает максимальное значение, то при критическом значении параметра высоты неровности  $c_0 = c^*$  в (2.3)  $A_1(Z_s, X_0) = 0$ . Через точку  $(Z_s, X_0)$  решение можно продолжить двумя указанными способами. Однако при сколь угодно близком к  $X_0$  значении  $X = X_i$  функция  $A_1(Z, X_i) > 0$ , т.е.  $A_1 = A_+ = (\omega_1^2 - B(X, Z))^{1/2}$  при  $X \neq X_0$ . Поэтому во избежание появления скачкообразного изменения  $A_1(X, Z)$  при переходе от  $X_0$  к  $X_i$  необходимо, чтобы  $A_1 = A_+(Z, X_0)$  при всех  $Z$ .

Заметим, что  $\omega_1 \neq 0$ , поскольку в противном случае решение (2.3) теряет смысл будучи комплекснозначным, т.е. несправедливым становится исходное предположение о безотрывности течения в целом. Это означает, что если неровность вытянута строго вдоль линии поверхностного трения ( $\omega_1 = 0$ , т.е.  $\Omega_0 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ , см. (2.3), (2.2), (1.3)), то такое течение, как и вообще течение с малым поверхностным трением [10, 14, 15], является стационарно неустойчивым: сколь угодно малые возмущения поверхности приводят к изменению структуры течения в целом.

Решение нелинейной задачи (2.2) (при  $M_0 = 0$ ) было получено с помощью численного метода, разработанного в [16]. В этой работе впервые были представлены решения краевых задач для уравнений пограничного слоя Прандтля для плоских течений с заданным регулярным градиентом давления, продолжимые через точку нулевого поверхностного трения (при критическом значении параметра) двумя описанными выше способами [11, 12].



Фиг. 4. То же, что на фиг. 3 для  $\Omega_0 = -0.2$ 

При численном решении данной задачи, записанной для переменных  $\omega$  и  $\Psi$  (где  $\omega = \partial W / \partial Y = \partial^2 \Psi / \partial Y^2$ ), использовалась независимая переменная  $s = (2/\pi) \arctg Z$ . Полученная в результате система уравнений аппроксимировалась конечно-разностными схемами второго порядка точности, а система нелинейных конечно-разностных уравнений решалась методом Ньютона – Канторовича с использованием метода матричной прогонки для обращения матрицы Якоби на итерации. Более подробно об используемых конечно-разностных схемах и методах решения получаемых систем нелинейных конечно-разностных уравнений см. [17, гл. 7].

Интересной особенностью задачи (2.2) с точки зрения решения уравнений пограничного слоя является нетрадиционная постановка краевых условий при отрицательных значениях параметра  $\Omega_0$ .

При  $\Omega_0 > 0$  достаточно задать начальный профиль скорости, чтобы для значений параметра высоты неровности, меньших критического, однозначно определить решение. При критическом значении этого параметра (и  $\Omega_0 > 0$ ) для получения второй (гладкой) ветви решения необходимо задавать профиль скорости возвратного течения при  $Z = \infty (s = 1)$

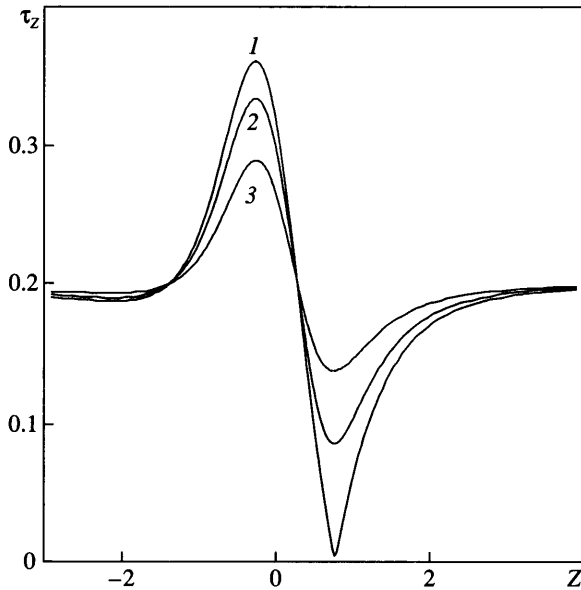
$$\omega = Y - \Omega_0, \quad 0 \leq Y \leq 2\Omega_0$$

При  $\Omega_0 < 0$  и докритических значениях параметра высоты неровности на всем диапазоне изменения  $Z (-1 \leq s \leq 1)$  вблизи стенки имеет место возвратное течение. Поэтому здесь использовалось начальное условие при  $Z = \infty (s = 1)$

$$\omega = Y + \Omega_0, \quad 0 \leq Y \leq -2\Omega_0$$

При критическом значении указанного параметра (и  $\Omega_0 < 0$ ) для получения второй ветви решения уже не нужно задавать профиль скорости при  $Z = \infty$ , так как он не содержит области возвратного течения.

В численном решении задачи (2.2) аппроксимация Рейнера и Флюгге – Лотц (см. [17, гл. 7]) для течения в области возвратных токов не использовалась.



Фиг. 5. Распределение поверхностного трения для  $\Omega_0 = 0.2$ . Кривым 1–3 соответствуют  $X = 0; 0.5; 1$

Приводимые ниже результаты расчетов в основном получены с использованием неравномерной сетки с максимальным количеством расчетных точек  $100 \times 100$  и минимальным по  $s$  шагом  $\Delta s = 0.02$  (вблизи точек нулевого трения). Минимальным значением шага по  $Y$  (вблизи поверхности) было  $\Delta Y = 0.2$ .

Проверка полученных результатов проводилась путем увеличения числа расчетных точек в 2 раза: ( $200 \times 200$ ) и уменьшения минимальных значений для шагов по  $s$  и  $Y$  тоже в 2 раза. Максимальные отклонения вычисленных величин в полученных решениях обнаруживались в области максимального градиента давления и не превышали четырех процентов.

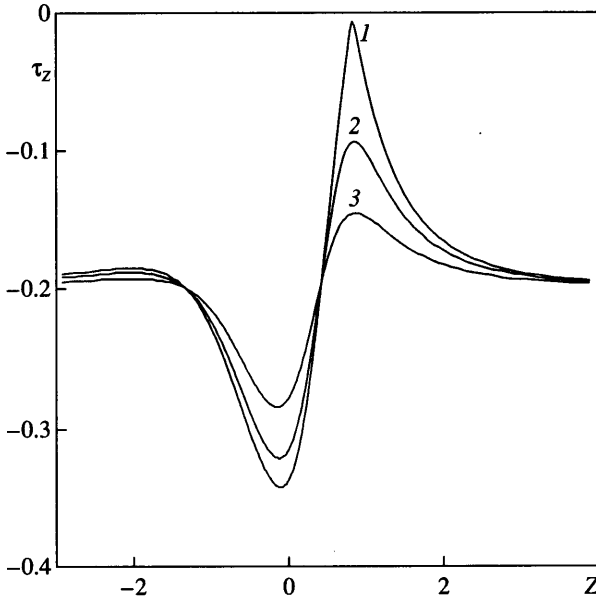
На фиг. 3 и 4 дано сравнение решения задачи (2.2) с (2.3) (плоское течение) для неровности вида

$$\begin{aligned} F &= d_0 g(Z), \quad G = c_0 g(Z) \\ g &= (1 + z^2)^{-1}, \quad d_0 > 0, \quad C_0 > 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

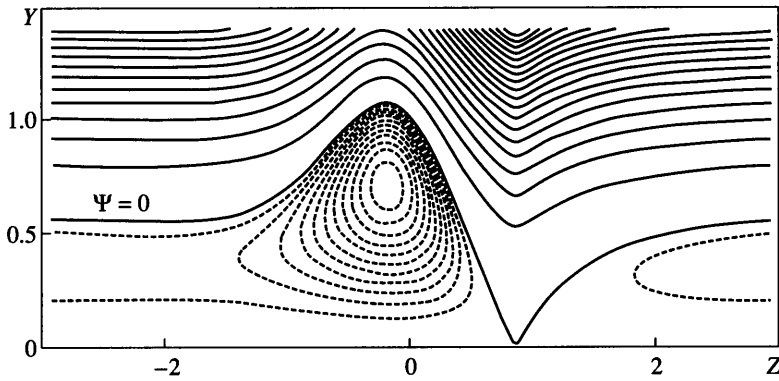
при  $\Omega_0 = H^{1/2} \omega_1 = 0.2$ . Критическое значение высоты для решения линейной задачи (2.3), (2.4), согласно [9], есть  $Hc_0 = Hc^* = 1.0506 \omega_1^2 = 0.0420$ . Решение нелинейной задачи (2.2), (2.4) дало  $d_0 = d_0^+ = 0.0336$  для  $\Omega_0 = 0.2$  и  $d_0 = d_0^- = 0.0557$  для  $\Omega_0 = -0.2$ . Близость решений линейной и нелинейной задач связаны с тем, что значение  $|\Omega_0| = 0.2$  оказалось в данном случае "малым".

На фиг. 5, 6 представлены графики функции  $\tau_z(Z, X)$  для  $\Omega_0 = \pm 0.2$  в (2.2) и неровности вида

$$F = \frac{D_0}{(1 + X^2)(1 + Z^2)}, \quad D_0 > 0 \quad (2.5)$$



Фиг. 6. То же, что на фиг. 5 для  $\Omega_0 = -0.2$



Фиг. 7. Картина линий тока при  $\Omega_0 = -0.2$  и  $D_0 = d_0 = 0.0557$ . Интервал значений  $\Delta\Psi = 0.25$  при  $\Psi > 0$  и  $\Delta\Psi = 0.025$  при  $\Psi < 0$

при критических значениях  $D_0$ , которые в силу квазидвумерности течения совпадают с  $d_0^\pm$  из (2.4). Для рассматриваемой неровности распределение давления, согласно (2.5), (2.2), есть

$$P = Z + \frac{D_0}{(1 + X^2)} \cdot \frac{(Z^2 - 1)}{(Z^2 + 1)^2}$$

В изолированных точках нулевого поверхностного трения  $Z = Z_s, X = 0$  ( $Z_s = 0.751$  при  $\Omega_0 = 0.2$  и  $Z_s = 0.854$  при  $\Omega_0 = -0.2, D_0 = d_0^\pm$ ) возникают устранимые особенности [11, 18], так что  $\tau_z$  при  $|Z - Z_s| \rightarrow 0, X = 0$  ведет себя как  $k_0|Z - Z_s|\text{sign}\Omega_0$ , где  $k_0$  – положи-

тельная постоянная. В малой окрестности этих точек лежат области взаимодействия, в которых происходит зарождение отрыва потока. Для описания течения в этих областях необходимо воспользоваться результатами теории кромочного отрыва, развитой первоначально для плоских течений в [19, 20] (относительно решений при  $\Omega_0 < 0$  см. [21, 22]), а в дальнейшем и для трехмерных (см. [18, 23] и обзор [24]).

На рис. 7 изображены линии тока ( $\Psi = \text{const}$ ) в плоскости  $X = 0$  при  $\Omega_0 = -0.2$ . В отличие от решения соответствующих линейных задач [9, 10] здесь возникает зона с замкнутыми линиями тока.

При  $D_0 < d_0^\pm$  решение задачи (2.2), (2.5) регулярно и  $\tau_z(Z, X) \neq 0$ , а при  $D_0 > d_0^\pm$ , как обычно, возникает неустранимая особенность [12, 25] и решение теряет смысл.

**Заключение.** Если неровность на поверхности обтекаемого тела вытянута почти вдоль предельных линий тока, то в масштабах этой неровности реализуется, в частности, квазидвумерное течение с малым поверхностным трением. Это течение является стационарно неустойчивым, т.е. малые локальные возмущения (в виде неровностей), большие некоторых критических, приводят к изменению структуры всего течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 01-01-00999, № 00-15-96070).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smith F.T.* Pipeflows distorted by nonsymmetric indentation or branching // *Mathematika*. 1976. V. 23. Pt 1. № 45. P. 62–83.
2. *Smith F.T., Sykes R.I., Brighton P.W.M.* A two-dimensional boundary layer encountering a three-dimensional hump // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 83. Pt 1. P. 163–176.
3. *Боголенов В.В.* Исследование малых пространственных возмущений ламинарного пограничного слоя // ПМТФ. 1987. № 5. С. 69–79.
4. *Smith F.T.* Steady and unsteady 3-D interactive boundary layers // *Comput. and Fluids*. 1991. V. 20. № 3. P. 243–268.
5. *Сычев Вик.В.* О пространственных течениях около неровностей на поверхности осесимметричного тела // Учен. зап. ЦАГИ. 1993. Т. 24. № 1. С. 12–28.
6. *Timoshin S.N., Smith F.T.* Singularities encountered in three-dimensional boundary layers under an adverse of favourable pressure gradient // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1995. V. 352. № 1698. P. 45–87.
7. *Lipatov I.I., Vinogradov I.V.* Three-dimensional flow near surface distortions for the compensation regime // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*. 2000. V. 358. № 1777. P. 3143–3153.
8. *Crabtree L.F., Küchemann D., Sowerby L.* Three-dimensional boundary layers // *Laminar Boundary Layers* / Ed. Rosenhead L. Oxford: Clarendon Press, 1963. P. 409–491.
9. *Сычев Вик.В.* О локальных возмущениях пограничного слоя с малым поверхностным трением // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 6. С. 87–97.
10. *Сычев Вик.В.* О взаимодействии и отрыве для внутренних течений с малым поверхностным трением // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 5. С. 98–111.
11. *Рубан А.И.* Особое решение уравнений пограничного слоя, непрерывно продолжимое через точку нулевого поверхностного трения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 42–52.
12. *Goldstein S.* On laminar boundary-layer flow near a position of separation // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1948. V. 1. Pt 1. P. 43–69.
13. *Stewartson K.* Is the singularity at separation removable? // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 44. Pt 2. P. 347–364.
14. *Tutty O.R.* Nonlinear development of flow in channels with non-parallel walls // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 326. P. 265–284.
15. *Сычев Вик.В.* О локальных зонах отрыва в течениях с малым поверхностным трением // Учен. зап. ЦАГИ. 2002. Т. 33. № 1–2. С. 22–33.
16. *Королев Г.Л.* Отрыв потока и неединственность решения уравнений пограничного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 11. С. 1706–1715.
17. *Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик.В., Королев Г.Л.* Асимптотическая теория отрывных течений / Под ред. В.В. Сычева. М.: Наука, 1987. 256 с.

18. *Заметаев В.Б.* Формирование особенностей в пространственном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 2. С. 58–64.
19. *Рубан А.И.* Асимптотическая теория коротких зон отрыва на передней кромке тонкого профиля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 42–51.
20. *Stewartson K., Smith F.T., Kaups K.* Marginal separation // Stud. Appl. Math. 1982. V. 67. № 1. P. 45–61.
21. *Brown S.N., Stewartson K.* On an integral equation of marginal separation // SIAM J. Appl. Math. 1983. V. 43. № 5. P. 1119–1126.
22. *Ryzhov O.S., Smith F.T.* Short-length instabilities, breakdown and initial value problems in dynamic stall // Mathematika. 1984. V. 31. Pt. 2. № 62. P. 163–177.
23. *Zametaev V.B.* Marginal separation in three-dimensional flows // Theoret. Comput. Fluid Dyn. 1996. V. 8. № 3. P. 183–200.
24. *Kluwick A.* Interacting laminar and turbulent boundary layers // Recent Advances in Boundary Layer Theory / Ed. Kluwick A. Wien: Springer, 1998. P. 231–330.
25. *Brown S.N.* Singularities associated with separating boundary layers // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1965. V. 257. № 1084. P. 409–444.

Москва

Поступила в редакцию  
12.II.2002