

УДК 532.546:536.421

© 2003 г. М. М. АЛИМОВ

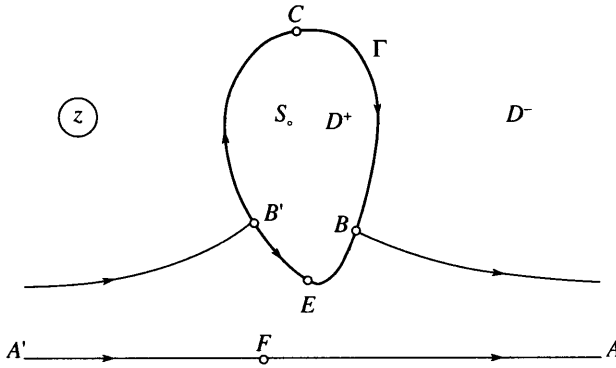
## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СМЫКАНИЯ ЛЕДОПОРОДНОГО ТЕЛА В ФИЛЬТРАЦИОННОМ ПОТОКЕ

В пределе малых чисел Пекле проведен асимптотический анализ задачи определения равновесной конфигурации плоского двусвязного ледопородного тела, образующегося вокруг системы двух замораживающих колонок, ориентированных поперек фильтрационного потока. Удерживались два члена асимптотического разложения. Показано, что в этом приближении критерий смыкания двусвязного тела совпадает с критерием неразмыкания односвязного тела. Однако структура решения такова, что учет третьего члена асимптотики может дать второе решение задачи в ситуации, когда ледопородное тело близко к смыканию. Это означает, что размер петли гистерезиса смыкания-размыкания имеет порядок, по крайней мере, квадрата по Пекле.

*Ключевые слова:* фильтрация, ледообразование, малые числа Пекле, асимптотика, гистерезис.

Метод искусственного замораживания водонасыщенных грунтов используется в различных приложениях [1, 2] для создания ледопородных ограждений при проходке стволов шахт, метрополитенов и т.п. При этом одной из основных является проблема определения критерия смыкания ледопородных тел, образующихся вокруг отдельных колонок. В [3] был предложен численно-аналитический метод решения задачи определения равновесной конфигурации плоского ледопородного тела, образующегося вокруг замораживающей колонки в фильтрующей пористой среде. В [4–7] метод был развит на случай различных систем замораживающих колонок. В работах [6, 7] была численно решена задача о равновесной конфигурации плоского двусвязного ледопородного тела, образующегося вокруг системы двух замораживающих колонок в фильтрующей пористой среде. При параметрическом анализе задачи было установлено, что в некотором диапазоне значений определяющих физических параметров процесса (числа Пекле и мощности колонок – хладоисточников) существует два решения задачи. Физически обоснованное предположение о неустойчивости одной из ветвей решения, а также учет ранее полученного решения для уже сомкнувшегося тела [5] позволили сформулировать критерии смыкания и размыкания ледопородного тела.

По результатам численных расчетов была построена фазовая диаграмма процесса [7], т.е. в плоскости определяющих параметров задачи выделены области, в которых ледопородное тело гарантированно односвязно, гарантированно двусвязно и область, где возможны оба типа решения. Анализ диаграммы показывает, что существует гистерезис смыкания-размыкания – в квазистационарном процессе замораживания и таяния ледопородного тела его смыкание и размыкание должно происходить при существенно различных значениях определяющих физических параметров и конфигурациях ледопородного тела. В связи с этим появляется возможность оптимального управления процессом создания и поддержания ледопородного ограждения – добившись смыкания ледопородного тела, можно обеспечить его неразмыкание, значительно уменьшив мощность хладоисточников. Величина "выигранной" мощности (размер петли гистерезиса) – это фактически размер зоны неединственности решения для двусвязного тела. Для практических приложений интересно было бы получить асимптотические оценки размера этой зоны в зависимости от числа Пекле.



Фиг. 1. Физическая плоскость  $z$

**1. Постановка задачи.** В пористой среде установлены две замораживающие колонки, имеющие одинаковую мощность и ориентированные строго поперек заданного на бесконечности фильтрационного потока. Вокруг колонок образуется симметричное двусвязное ледопородное тело. Предполагается, что процесс можно считать установившимся, фильтрацию – плоской и подчиняющейся закону Дарси, жидкость – несжимаемой, теплофизические характеристики пористой среды – постоянными. Вид половины физической плоскости изображен на фиг. 1. Через  $A'$ ,  $A$  обозначены точки действительной оси  $\mp\infty$ , через  $S$  – положение хладоисточника ( $z = i$ ), через  $B'$ ,  $B$  – точки разветвления и схода гидродинамических потоков на поверхности тела, точки контура тела  $C$  и  $E$ , а также точка действительной оси  $F$  – вспомогательные, в которых приращение гидродинамического потенциала равно половине полного приращения на отрезке  $B'B$ .

В безразмерной форме математическая модель процесса записывается в виде системы уравнений с соответствующими граничными условиями [6, 7]

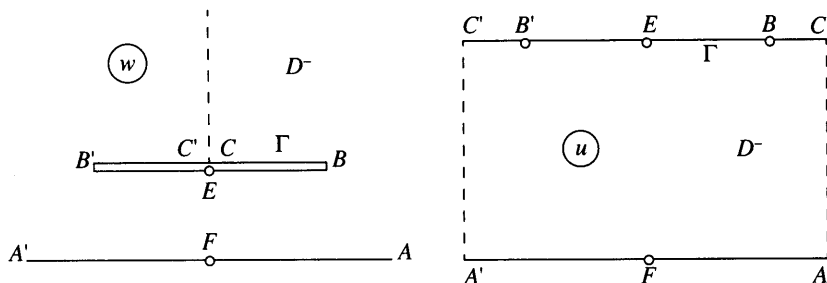
$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\nabla p, \quad \nabla \mathbf{v} = 0, \quad \text{Re}(\mathbf{v}\nabla\theta^-) = \Delta\theta^-, \quad z \in D^- \\ \theta^-(z) &= \theta^-(\bar{z}), \quad z \in \bar{D}^-, \quad \bar{z} \in D^- \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \Delta\theta^+ &= 0, \quad z \in D^+ \\ \theta^+(z) &= \theta^+(\bar{z}), \quad z \in \bar{D}^+, \quad \bar{z} \in D^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= v_x = 1, \quad \theta^- = 1, \quad |z| \rightarrow \infty \\ \frac{\partial\theta^+}{\partial n} &= \frac{\partial\theta^-}{\partial n}, \quad \theta^+ = \theta^- = 0, \quad z \in \Gamma \cup \bar{\Gamma} \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ 2\pi r \frac{\partial\theta^+}{\partial r} \right\} = q, \quad z = \pm i + re^{i\sigma}$$

Здесь  $D^- \cup \bar{D}^-$  – область фильтрации;  $D^+$ ,  $\bar{D}^+$  – симметричные части двусвязной области, занятой ледопородным телом;  $\Gamma = \partial D^+$  и  $\bar{\Gamma} = \partial \bar{D}^+$  – ее граница;  $n$  – нормаль к границе  $\Gamma \cup \bar{\Gamma}$ , внешняя по отношению к области  $D^+ \cup \bar{D}^+$ ;  $\mathbf{v}$  – скорость фильтрации;  $v$  –

Фиг. 2. Вспомогательные плоскости  $w$  и  $u$ 

ее модуль;  $p$  – давление в жидкости;  $\theta^-, \theta^+$  – температуры в областях  $D^- \cup \bar{D}^-$  и  $D^+ \cup \bar{D}^+$  соответственно;  $Re$  – число Пекле, построенное по половине расстояния между хладоисточниками;  $q$  – мощность каждого из 2-х хладоисточников ( $q > 0$ ). Знак черты над объектом следует понимать как знак комплексного сопряжения. Это справедливо и по отношению к  $\bar{\Gamma}, \bar{D}^-, \bar{D}^+$ , хотя последние и принимаются как обозначения.

Процесс полностью определяется заданием двух физических параметров  $Re$  и  $q$ . Однако наличие свободной границы  $\Gamma \cup \bar{\Gamma}$  делает затруднительным ее исследование непосредственно в постановке (1.1), (1.2) и непосредственно от этих определяющих параметров. Целесообразно использовать параметризацию [3–7] в широком смысле слова – это и введение в качестве определяющих параметров вспомогательных переменных (полуобратная постановка), и введение различных вспомогательных плоскостей, позволяющих упрощать краевые задачи.

Введем комплексный тепловой потенциал  $w^+ = -\theta^+ + i\psi^+$ , где  $\psi^+$  – тепловая функция тока, и безразмерный гидродинамический потенциал  $w = \varphi + i\psi$ , причем  $\varphi = -p/a$ , а  $\psi$  – безразмерная функция тока,  $2a$  – приращение гидродинамического потенциала между точками разделения и схода потоков. Область изменения переменной  $w$  представляет собой плоскость с двумя параллельными и симметричными относительно осей координат разрезами (фиг. 2,а). Точкам  $B'$  и  $B$ , являющимся концами верхнего разреза, соответствуют значения  $w$ , равные  $-1 + ih, 1 + ih$ , где  $h$  – вспомогательный параметр, обозначающий половину расстояния между разрезами. Точкам  $A'$  и  $A$  соответствуют значения  $w$ , равные  $-\infty + i\infty$ , точкам  $F$  и  $E$  – значения  $w$ , равные  $0$  и  $ih$ . В силу наличия у системы (1.1), (1.2) симметрии относительно действительной оси оба потенциала также обладают ею

$$w^+(\bar{z}) = \bar{w}^+(z), \quad w(\bar{z}) = \bar{w}(z) \quad (1.3)$$

Далее в соответствии с [6, 7] задача (1.1), (1.2) расщепляется на задачу теплообмена двух пластинок (разрезов в плоскости  $w$ ) с равномерно набегающим потоком и задачу сопряжения. Первая из них после введения функции  $\mu(\varphi)$  – линейной плотности источников, распределенных на разрезах, – и вспомогательного параметра  $P$

$$\mu(\varphi) = \left[ \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} \right]_{w \in \Gamma} \equiv \left[ \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} \right]_{w \in \bar{\Gamma}}, \quad P = Re \frac{a}{2} \quad (1.4)$$

(здесь  $[\ ]$  обозначают скачок функции на верхнем и нижнем берегах разрезов) сводится к граничному интегральному уравнению относительно  $\mu(\varphi)$  [3]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \mu(\varphi) e^{P(\varphi - \phi)} \sum_{k=\pm 1} K_0(P \sqrt{(\varphi - \phi)^2 + (1-k)^2 h^2}) d\phi = 1, \quad \varphi \in [-1, 1] \quad (1.5)$$

Его решение позволяет найти связь теплового расхода хладоисточника  $q$  с вспомогательными параметрами  $P$  и  $h$ , а также распределение температуры  $\theta^-$  в плоскости  $w$

$$q = \int_{-1}^1 \mu(\phi) d\phi \tag{1.6}$$

$$\theta^-(\phi, \psi) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \mu(\phi) e^{P(\phi-\psi)} \sum_{k=\pm 1} K_0(P\sqrt{(\phi-\psi)^2 + (\psi - kh)^2}) d\phi$$

Задача сопряжения формулируется следующим образом [3]: найти функцию  $w(z)$ , аналитическую всюду в  $D^+$ , со следующей нормировкой в бесконечности

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{a}, \quad |z| \rightarrow \infty \tag{1.7}$$

и функцию  $w^+(z)$ , аналитическую всюду в  $D^+$ , за исключением точки  $z = i$ , в которой она имеет особенность вида

$$w^+(z) \sim -\frac{q}{2\pi} \ln(z - i), \quad z \sim i \tag{1.8}$$

по граничным условиям на контуре  $\Gamma$

$$\text{Im}w = h, \quad \text{Re}w^+ = 0, \quad i \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} \frac{dw}{dz} = \frac{dw^+}{dz}, \quad z \in \Gamma \tag{1.9}$$

и дополнительным условиям симметрии (1.3).

Проведем асимптотический анализ обеих задач в предположении малости числа Пекле с удержанием двух старших членов асимптотики.

**2. Асимптотическое решение задачи теплообмена при  $Re \ll 1$ .** Основной интерес представляют ситуации, когда двусвязное ледопородное тело близко к смыканию. В этом случае параметры  $a$  и  $h$  из физических соображений имеют порядок 1. Отсюда следует, что выбором достаточно малого  $Re$  всегда можно добиться, чтобы выполнялись условия  $P \ll 1, Ph \ll 1$ . Будем искать решение задачи теплообмена в виде асимптотического разложения

$$\mu(\phi) = \mu_0(\phi) + P\mu_1(\phi) + o(P), \quad \mu_0 \sim 1, \quad \mu_1 \sim 1 \tag{2.1}$$

Для этого разложим ядро интегрального уравнения (1.5) по малому параметру  $P$ , отбрасывая члены порядка  $o(P)$  [8]

$$K_0(Pr) = -\ln\left(\frac{Pr}{2}\right) - \gamma + O(P^2) \tag{2.2}$$

где  $r \sim 1, \gamma = 0.5772\dots$  – константа Эйлера. Разделив члены разных порядков по  $P$ , из (1.5) получим интегральные уравнения для  $\mu_0(\phi)$  и  $\mu_1(\phi)$  соответственно

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \mu_0(\phi) \sum_{k=\pm 1} \ln \sqrt{(\phi-\psi)^2 + (1-k)^2 h^2} d\phi = C_\mu \tag{2.3}$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 [\mu_1(\phi) - \mu_0(\phi)\phi] \sum_{k=\pm 1} \ln \sqrt{(\phi-\psi)^2 + (1-k)^2 h^2} d\phi = -\phi \tag{2.4}$$

$$\phi \in [-1, 1], \quad C_\mu = 1 - \frac{q}{\pi} \left( \ln \frac{2}{P} - \gamma \right) = \text{const} \tag{2.5}$$

Правая часть уравнения для  $\mu_0(\varphi)$  зависит от  $\ln P$ , т.е. асимптотическое представление (2.1) для  $\mu(\varphi)$ , строго говоря, не имеет места. Вместе с тем естественно предположить, что результирующая зависимость  $C_\mu$  от  $P$  будет иметь вид

$$C_\mu = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \ln P}{\alpha_3 + \alpha_4 \ln P} \quad (2.6)$$

где  $\alpha_{1,2,3,4}$  – некоторые константы порядка 1 (найденная в следующем пункте зависимость  $q$  от  $P$  при учете (2.5) подтверждает это предположение). Очевидно, что зависимость  $\mu_{0,1}(\varphi)$  от  $P$ , выражаемая множителем вида (2.6), не меняет асимптотического характера разложения (2.1) [9]. Поэтому для упрощения выкладок при асимптотическом анализе формально можно считать величину  $\ln P$  порядка 1, т.е. работать с разложением (2.1) для  $\mu(\varphi)$  и аналогичного вида разложениями для других функций.

Элементарный анализ уравнений (2.3), (2.4) показывает, что  $\mu_0(\varphi)$  – функция четная, а  $\mu_1(\varphi)$  – нечетная. Поэтому величину теплового расхода  $q$  с точностью  $o(P)$  определяет уже главный член асимптотики

$$q = \int_{-1}^1 \mu_0(\varphi) d\varphi + o(P)$$

Наличие логарифмических ядер в интегральных уравнениях (2.3), (2.4) позволяет ввести комплексные потенциалы  $f$  и  $g$  воображаемых течений в плоскости  $w$  такие, что

$$\operatorname{Re} f(w) = -C_\mu - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \mu_0(\varphi) \sum_{k=\pm 1} \ln \sqrt{(\varphi - \phi)^2 + (1-k)^2 h^2} d\varphi \quad (2.7)$$

$$\operatorname{Re} g(w) = \varphi - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 [\mu_1(\varphi) - \mu_0(\varphi)\varphi] \sum_{k=\pm 1} \ln \sqrt{(\varphi - \phi)^2 + (1-k)^2 h^2} d\varphi \quad (2.8)$$

Учитывая четность  $\mu_0(\varphi)$  и нечетность  $\mu_1(\varphi)$ , из определений потенциалов  $f$  и  $g$  найдем их поведение на бесконечности

$$\operatorname{Re} f(w)|_{\varphi \rightarrow \infty} = -\frac{q}{\pi} \ln \varphi - C_\mu + O(\varphi^{-2}), \quad \operatorname{Re} g(w)|_{\varphi \rightarrow \infty} = \varphi + O(\varphi^{-1}) \quad (2.9)$$

Граничные интегральные уравнения (2.3), (2.4) дадут граничное условие для функций  $f(w)$ ,  $g(w)$

$$\operatorname{Re} f(w) = \operatorname{Re} g(w) = 0, \quad w \in \Gamma \cup \bar{\Gamma} = \{\psi = \pm h, \varphi \in [-1, 1]\} \quad (2.10)$$

Таким образом, задача свелась к определению аналитических в плоскости  $w$  функций  $f(w)$ ,  $g(w)$  по граничному условию (2.10) и условиям на бесконечности (2.9).

Решение строится методом особых точек [10] с использованием эллиптических функций. Последние требуют для своего представления некоторую вспомогательную плоскость  $u$ , с которой связано такое понятие, как параллелограмм периодов эллиптической функции. Область  $D$  в плоскости  $u$  соответствует прямоугольнику, представленный на фиг. 2,б. Точкам  $A'$  и  $A$  соответствуют значения  $u$ , равные 0 и 1, а точкам  $F$  и  $E$  – значения  $u$ , равные  $1/2$  и  $(1 + i\tau)/2$ . Параметр  $\tau$  – вспомогательный ( $\operatorname{Im} \tau = 0$ ), связанный с  $h$  сложной зависимостью. Для дальнейших рассуждений положим, что  $h = H(\tau)$ . Конкретный вид функции  $H(\tau)$  не важен, достаточно знать, что она монотонно возрастающая и, следовательно, между  $h$  и  $\tau$  есть взаимно однозначное соответствие (вопрос сводится к классической задаче об исследовании зависимости емкости плоского конденсатора от

расстояния между пластинами [11]). Боковые стороны прямоугольника соответствуют разрезу, проведенному по штриховой линии в плоскости  $w$ . Конформное отображение плоскости  $u$  на плоскость  $w$  осуществляет функция [12]

$$w(u) = -\left(\frac{h}{\pi}\right) \frac{d}{du} \ln \vartheta_1(u|i\tau) \quad (2.11)$$

где  $\vartheta_1(u|i\tau)$  – тэта-функция (обозначения по [12]). Восстанавливая функции  $f(u)$ ,  $g(u)$  по особенностям [10], найдем

$$f(u) = \frac{q}{\pi} \ln \frac{\vartheta_1(u|2i\tau)}{\vartheta_4(u|2i\tau)}, \quad g(u) = -\frac{h}{q} f'(u) \quad (2.12)$$

С учетом известного вида функции  $w(u)$  эти выражения определяют вид зависимостей  $f(w)$ ,  $g(w)$ .

Используя разложение (2.2) ядра интегрального оператора (1.6) по малому параметру  $P$  [8] и учитывая определения (2.7), (2.8) функций  $f(u)$ ,  $g(u)$ , получим представление температуры  $\theta^-$  в плоскости  $w$

$$\theta^-(\varphi, \psi) = -\operatorname{Re} f(u) - P[\operatorname{Re} g(u) + \varphi \operatorname{Re} f(u)] + o(P) \quad (2.13)$$

где связь между  $u$  и  $w$  устанавливается формулой (2.11). Соответственно для плотности потока тепла на поверхности пластин будем иметь [13]

$$\frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} \Big|_{w \in \Gamma} = -i \left[ \frac{df}{du} + P \left( \frac{dg}{du} + \varphi \frac{df}{du} \right) \right] \left( \frac{dw}{du} \right)^{-1} \Big|_{u \in \Gamma} + o(P) \quad (2.14)$$

Формулы (2.13), (2.14) дают асимптотическое разложение решения задачи теплообмена (1.5) с учетом двух старших членов асимптотики.

**3. Анализ решения задачи теплообмена и выбор определяющих параметров.** В полной постановке (1.1), (1.2) безразмерный тепловой расход  $q$  определяется разностью между температурой на пластинах и температурой на бесконечности [6, 7]. Здесь это условие использовать нельзя, поскольку в главном члене найденного асимптотического разложения на бесконечности имеется логарифмическая особенность, и соответствующая разность бесконечна. Тем не менее, задание определенной константы для функции  $\operatorname{Re} f(w)$  на пластинах приводит к вполне определенной константе порядка 1 в разложении (2.9) функции  $\operatorname{Re} f(w)$  в окрестности бесконечности. Этого достаточно для определения  $q$ . Действительно, рассмотрим окрестность точки  $A$  в плоскости  $u$ :  $u = 1 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . В ней, используя соотношение (2.12), найдем вид  $\operatorname{Re} f(u)$

$$\operatorname{Re} f(u)|_{u = \pi - \varepsilon} = \frac{q}{\pi} \left( \ln \left| \frac{\vartheta_1'(0|2i\tau)}{\pi \vartheta_4(0|2i\tau)} \right| + \ln \varepsilon \right) [1 + O(\varepsilon^2)] \quad (3.1)$$

и соответственно используя выражение (2.11), найдем вид  $\varphi(u)$

$$\varphi(u)|_{u = \pi - \varepsilon} = \frac{h}{\pi \varepsilon} [1 + O(\varepsilon^2)]$$

Комбинируя два полученных соотношения, получим выражение

$$\operatorname{Re} f(w)|_{\varphi \rightarrow \infty} = \frac{q}{\pi} \ln \left| \frac{\vartheta_1'(0|2i\tau)}{\pi \vartheta_4(0|2i\tau)} \right| - \frac{q}{\pi} \ln \frac{\varphi}{n} + O(\varphi^{-2})$$

Сравнивая его с первым выражением в (2.9), при учете (2.5) установим соотношение

$$\frac{\pi}{q} = \ln \frac{2}{H(\tau)P} - \gamma - \ln \left| \frac{\vartheta_1'(0|2i\tau)}{\pi\vartheta_4(0|2i\tau)} \right| + o(P) \quad (3.2)$$

которое определяет суммарный поток тепла  $q$  к каждой из пластин в плоскости  $w$  как функцию параметров  $\tau$  и  $P$ .

Вид полученного решения задачи теплообмена говорит о том, что в качестве определяющих параметров задачи удобно выбрать вспомогательные параметры  $\tau$  и  $P$ . В такой полуобратной постановке следует решить задачу сопряжения, найти соответствующие конфигурации ледопородного тела и вид зависимости  $a(P, \tau)$ . Затем с помощью соотношения (1.4), связывающего  $P$ ,  $Re$  и  $a$ , перейти от пары определяющих параметров  $\tau$  и  $P$  к паре  $Re$  и  $\tau$ . В результате вопрос о неединственности решения в прямой постановке, когда определяющими параметрами являются  $Re$  и  $q$ , сведется к анализу характера зависимости  $q = Q(Re, \tau)$  от  $\tau$  при фиксированном  $Re$ : если эта зависимость монотонная, то решение единственно, если немонотонная, то неединственно.

Подчеркнем, что соответствия  $w(u), f(u), g(u)$  вполне определены. С помощью этих же функций определяются и соответствия  $f(w), g(w)$ , хотя и неявным образом. В то же время соответствия  $w(z), f(z), g(z), z(u)$  будут устанавливаться в результате применения метода асимптотических разложений к задаче сопряжения. Поэтому для них справедливы представления

$$w(z) = w_0(z) + Pw_1(z) + o(P), \quad w_0 \sim 1, \quad w_1 \sim 1$$

$$f(z) = f_0(z) + Pf_1(z) + o(P), \quad f_0 \sim 1, \quad f_1 \sim 1$$

$$g(z) = g_0(z) + Pg_1(z) + o(P), \quad g_0 \sim 1, \quad g_1 \sim 1$$

$$z(u) = z_0(u) + Pz_1(u) + o(P), \quad z_0 \sim 1, \quad z_1 \sim 1$$

Как и в представлении (2.1), зависимость от  $\ln P$  формально не указывается. Аналогичное представление справедливо и для параметра  $a$

$$a(P, \tau) = a_0(\tau) + Pa_1(\tau) + o(P), \quad a_0 \sim 1, \quad a_1 \sim 1 \quad (3.3)$$

Зависимость  $q(P, \tau)$  с точностью  $o(P)$  уже установлена – это соотношение (3.2). Его вид говорит о том, что вклад порядка  $P$  в зависимость  $q(P, \tau)$  равен нулю. Вместе с тем для расхода как функции параметров  $Re$  и  $\tau$  вполне уместно представление

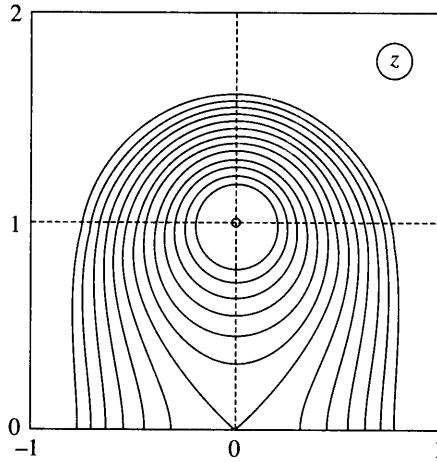
$$Q(Re, \tau) = Q_0(Re, \tau) + PQ_1(Re, \tau) + o(P), \quad Q_0(Re, \tau) \sim 1, \quad Q_1(Re, \tau) \sim 1$$

и оценка величины  $Q_1(Re, \tau)$  задача нетривиальная и содержательная.

**4. Решение задачи сопряжения в главном члене асимптотики.** Как видно из соотношения (2.13), в главном члене асимптотики малых  $P$  температура  $\theta^-$  является аналитической функцией переменной  $u$ , а значит и переменной  $w$ . Поэтому, учитывая действующие на границе  $\Gamma$  соотношения (2.10), (2.14), граничное условие (1.9) в задаче сопряжения можно записать в виде

$$Re f_0(z) = Rew_0^+ = 0, \quad \frac{df_0}{dz} = \frac{dw_0^+}{dz}, \quad z \in \Gamma_0$$

Это есть условие аналитического продолжения [13], и, следовательно, во всей плоскости  $z$  существует единый тепловой потенциал  $\chi_0(z)$ , удовлетворяющий условиям



Фиг. 3. Конфигурация контуров ледопородного тела в главном члене асимптотического приближения

симметрии типа (1.3) и совпадающий с  $f_0(z)$  в области  $D^-$  и с  $w_0^+(z)$  в области  $D^+$ . В соответствии с (1.8) и (1.7), (2.9) он будет иметь логарифмические особенности в областях  $D^+ \cup \bar{D}^+$  и  $D^- \cup \bar{D}^-$

$$\begin{aligned} \chi_0(z) &\sim -\frac{q}{2\pi} \ln(z \mp i), \quad z \sim \pm i \\ \chi_0(z) &\sim -\frac{q}{\pi} \ln \frac{x}{a_0} - C_\mu + O(x^{-1}), \quad z = x \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{4.1}$$

Этих условий достаточно, чтобы полностью восстановить вид функции  $\chi_0(z)$ , которую с учетом выражения (2.4) представим в виде

$$\chi_0(z) = -\frac{q}{2\pi} \ln \frac{z^2 + 1}{M_0^2}, \quad M_0 = \frac{2a_0}{P} \exp\left(-\frac{\pi}{q} - \gamma\right) \tag{4.2}$$

Выражение для  $M_0$  с учетом формул (1.4), (2.20) преобразуется к виду

$$M_0 = \frac{4}{\text{Pe}} \exp\left(-\frac{\pi}{q} - \gamma\right) [1 + O(P)] \tag{4.3}$$

Теперь, полагая  $\text{Re} \chi_0(z) = 0$ , можно найти конфигурацию  $\Gamma \cup \bar{\Gamma}$  ледопородного тела в главном члене асимптотики

$$\Gamma_0 \cup \bar{\Gamma}_0: |z^2 + 1| = M_0^2 \tag{4.4}$$

На фиг. 3 приведены конфигурации тела в зависимости от величины  $M_0$  в диапазоне значений от 0.4 (ближайший к хладоисточнику контур) до 1.6 с шагом 0.1. Тело будет оставаться двусвязным при условии  $M_0 < 1$ , однако формула (4.4) работает и в случае  $M_0 > 1$ , определяя конфигурацию односвязного, т.е. уже сомкнувшегося тела [5].



Условие смыкания в главном члене асимптотического приближения записывается в виде  $M_0 = 1$  или при учете формулы (4.3) в виде

$$\tau = 0: \frac{\pi}{q} = \ln \frac{4}{\text{Pe}} - \gamma + O(P)$$

и совпадает с условием размыкания [5]. Сравнивая вид (4.2) функции  $\chi_0(z)$  с видом (2.11) функции  $f(u)$  и учитывая, что в области  $D^-$  последняя совпадает с  $\chi_0(u)$ , легко найти главный член асимптотического разложения для функции  $z(u)$

$$z_0(u) = \left[ M_0^2 \frac{\vartheta_4^2(u|2i\tau)}{\vartheta_1^2(u|2i\tau)} - 1 \right]^{1/2} \quad (4.5)$$

С учетом известной зависимости  $w(u)$  выражение (4.5) определяет также и зависимость  $w_0(z)$ . Кроме того, в этом приближении контуры (4.4) ледопородного тела получаются симметричными относительно осей координат. Поэтому при любых  $\text{Pe}$  и  $q$  точке  $F$  отвечают значения  $u = 0.5$  и  $z = 0$ . Учитывая формулы преобразования тета-функций при сдвиге аргумента на полпериода [8], из выражения (4.5) найдем соотношение, связывающее  $M_0$  и  $\tau$

$$M_0 = \lambda^{1/4}(2\tau), \quad \lambda(\tau) = \frac{\vartheta_2^4(u|i\tau)}{\vartheta_3^4(u|i\tau)} \quad (4.6)$$

где  $\lambda(\tau)$  – так называемая эллиптическая модулярная функция [14].

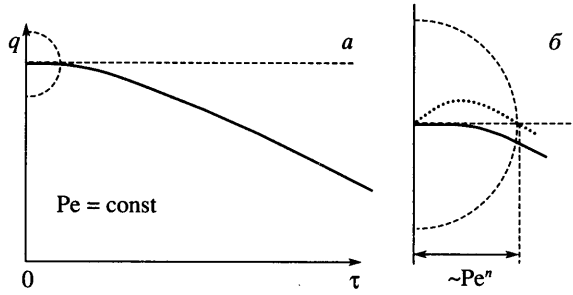
Подставляя выражение (4.6) в соотношение (4.3), найдем выражение суммарного теплового расхода  $q$  через  $\text{Pe}$  и  $\tau$  в главном члене асимптотического разложения по малым  $P$

$$q = Q_0(\text{Pe}, \tau) + O(P), \quad \frac{\pi}{Q_0(\text{Pe}, \tau)} = \ln \frac{4}{\text{Pe}} - \gamma - \frac{1}{4} \ln \lambda(2\tau) \quad (4.7)$$

Известно, что эллиптическая модулярная функция монотонно убывает по  $\tau$  в пределах от 0 ( $\tau = \infty$ ) до 1 ( $\tau = 0$ ), причем в точке  $\tau = 0$  ее производная обращается в нуль [14]. Отсюда следует, что найденная в главном члене асимптотического разложения зависимость  $Q_0(\text{Pe}, \tau)$  от  $\tau$  при фиксированном  $\text{Pe}$  также монотонна (см. соотношение (4.7) и фиг. 4, а). Поэтому в главном члене асимптотического разложения второго решения задачи в прямой постановке нет, что согласуется с поведением равновесных конфигураций ледопородного тела (фиг. 3). Однако обращение производной модулярной функции, а следовательно и производной функции  $Q_0(\text{Pe}, \tau)$ , в нуль именно при значении  $\tau = 0$ , отвечающему смыканию ледопородного тела, говорит о том, что учет членов следующего порядка малости по  $\text{Pe}$  может дать в окрестности  $\tau = 0$  немонотонность  $q$  по  $\tau$  при фиксированном  $\text{Pe}$ . К примеру, зависимость  $q(\tau)$  может иметь вид изображенной на фиг. 4, б пунктирной кривой, где  $n$  – порядок 1-го члена разложения по  $\text{Pe}$ , дающего ненулевой вклад в эту зависимость.

Полученное в разд. 3 выражение (3.2) для расхода  $q$  с учетом связи (1.4) параметра  $P$  с  $\text{Pe}$  и  $a$  дает соотношение

$$\frac{\pi}{q} = \ln \frac{4}{\text{Pe}} - \gamma - \ln \left( H(\tau) a \left| \frac{\vartheta_1'(0|2i\tau)}{\vartheta_4(0|2i\tau)} \right| \right) + o(P) \quad (4.8)$$



Фиг. 4. Вид зависимости безразмерного расхода  $q$  от вспомогательного параметра  $\tau$  при фиксированном  $Pe$ :  $a$  – общий вид,  $b$  – возможный вид в окрестности  $\tau = 0$

Сравнение (4.7) с (4.8) показывает, что симметрия функции  $z_0(u)$  позволяет определить вид функции  $a_0(\tau)$  без громоздких выкладок, связанных с решением задачи обтекания контуров (4.4) потенциальным потоком

$$a_0(\tau) = \frac{\lambda^{1/4}(2\tau)}{H(\tau)} \left| \frac{\vartheta_4(0|2i\tau)}{\vartheta_1'(0|2i\tau)} \right| \tag{4.9}$$

Чтобы оценить вклад порядка  $P$  в соотношение (4.8), надо найти  $a_1(\tau)$ , т.е. решить задачу сопряжения в следующем члене асимптотического приближения.

**5. О решении задачи сопряжения для следующих членов асимптотического разложения.** Эффективное решение задачи сопряжения в главном члене асимптотики было получено благодаря тому, что в этом приближении температура  $\theta^-$  является гармонической функцией в плоскости  $w$ . Как видно из найденного в разд. 2 выражения (2.13), в следующем члене асимптотики температура таким свойством не обладает: составляющая температуры  $-P\varphi Ref(w)$  не гармонична. Вместе с тем в постановке задачи сопряжения существенно используются только два момента, касающиеся функции распределения температуры  $\theta^-$ : на границе ледопородного тела температура  $\theta^-$  должна обращаться в нуль, а распределение потока тепла, т.е.  $\partial\theta^-/\partial n$ , должно быть оператором конфигурации этой границы, неявно определяемым выражением (2.14). Поэтому, если вместо негармонической составляющей  $-P\varphi Ref(w)$  в температуре  $\theta^-$  подобрать гармоническую так, чтобы на границе тела температура и поток не менялись, то получим некоторое фиктивное распределение температур  $\theta^-$ , в рамках задачи сопряжения эквивалентное истинному, но в отличие от последнего гармоническое.

Очевидно, необходимость удовлетворения двух граничных условий на границе тела приводит к некорректной задаче для аналитической функции комплексного переменного. Тем не менее, используя структуру граничных условий, удастся построить одно из возможных ее решений. После этого, аналогично разд. 4, решение задачи сопряжения сводится к восстановлению единого теплового потенциала – аналитической функции комплексного переменного  $z$  по известным ее особенностям в физической плоскости. Далее восстанавливается форма контура ледопородного тела уже с точностью порядка  $Pe$ , с той же точностью решается задача его обтекания потенциальным потоком несжимаемой жидкости и определяется приращение потенциала между точками разветвления и схождения потока на границе тела, т.е. величина  $a_1(\tau)$ . В сравнении с главным членом асимптотического приближения контуры ледопородного тела (фиг. 3) деформируются, причем с точностью порядка  $Pe$  деформации обладают свойством нечетной симметрии относительно оси  $y$ . Это необходимо приводит к тому, что  $a_1(\tau) \equiv 0$ , и, следовательно,  $q = Q_0(Pe, \tau) + O(P^2)$ .

Таким образом, размер зоны немонотонности  $q$  по  $\tau$  при фиксированном  $Re$  (см. фиг. 4,б), другими словами, размер  $\Delta q$  зоны неединственности решения задачи в прямой постановке имеет порядок не  $Re$ , а, по крайней мере,  $Re^2$ . Соответственно, обнаружить вторую ветку решения и точно оценить размер петли гистерезиса смыкания–размыкания можно только при учете третьего члена асимптотического разложения по малым  $Re$ . Используя результаты численных расчетов [6], можно убедиться, что в интервале  $Re = 0.3$ – $2$  отношение  $\Delta q/Re^2$  меняется в интервале  $0.2$ – $0.23$ , т.е. действительно примерно постоянно. Точных или даже приближенных аналитических решений задачи определения двусвязного ледопородного в конвективном потоке, которые могли бы лишней раз подтвердить этот вывод, нет (например, известные результаты В.А. Максимова для асимптотики  $Re \gg 1$  касаются только односвязных тел).

Изложенная в этом пункте методика построения решения задачи сопряжения пригодна и для следующих членов асимптотического разложения, но прежде необходимо с той же точностью решить задачу конвективного теплообмена двух пластинок с безграничным и равномерным потоком жидкости. Здесь возникают серьезные трудности, поскольку в отличие от аналогичной задачи для одной пластинки [15] у граничного интегрального оператора (2.3) нет спектрального соотношения.

**Заключение.** Проведенное асимптотическое исследование показывает, что размер петли гистерезиса смыкания–размыкания ледопородного тела имеет порядок, по крайней мере, квадрата по Пекле. Следовательно, наибольшего выигрыша в задаче оптимизации процесса создания и поддержания ледопородных ограждений можно достичь при больших Пекле. Для более точной оценки эффекта необходимо учитывать третий член асимптотического разложения по малым Пекле.

Автор благодарит К.Г. Корневу за полезные обсуждения и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 01-01-00068).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Насонов И.Д. Замораживание фильтрующих горных пород. М.: Недра, 1968. 187 с.
2. Sadvsky A.V., Dorman Y.A. Artificial freezing and cooling of soils at construction sites // Proc. 2-nd Intern. Symp. in Ground Freezing. Trondheim, 1980. Amsterdam: Elsevier, 1980. P. 327–332.
3. Корнев К.Г., Чугунов В.А. Определение равновесной формы тел, образовавшихся при застывании фильтрационного потока // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 991–996.
4. Kornev K., Mukhamadullina G. Mathematical theory of freezing for flow in porous media // Proc. Royal Soc. London. Ser. A. 1994. V. 447. № 1930. P. 281–297.
5. Алимов М.М., Корнев К.Г., Мухамадуллина Г.И. Равновесная форма ледопородного тела, образовавшегося при обтекании жидкостью системы двух замораживающих скважин // ПММ. 1994. Т. 58. № 5. С. 110–124.
6. Алимов М.М., Мухамадуллина Г.И. Смыкание двух ледопородных тел в плоском фильтрационном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 4. С. 75–88.
7. Alimov M., Kornev K., Mukhamadullina G. Hysteretic effects in the problems of artificial freezing // SIAM J. Appl. Math. 1998. V. 59. № 2. P. 387–410.
8. Handbook of mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables / Eds by M. Abramowitz, I.A. Stegun. Washington: Gov. Print. Off., 1964. = Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 830 с.
9. Cole J.D. Perturbation Methods in Applied Mathematics. Toronto; London: Blaisdell Publ. Co., 1968. = Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
10. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
11. Polya G., Szegő G. Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton: Univ. Press, 1951. = Полюа Г., Сеце Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.

12. *Korpenfels W., Stallmann F.* Praxis der Konformen Abbildung. Berlin etc: Springer, 1959 = *Корпенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 406 с.
13. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
14. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
15. *Алимов М.М.* Асимптотическое решение задачи о теплообмене пластины с безграничным и равномерным потоком жидкости // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 86–93.

Казань  
E-mail:mars.alimov@ksu.ru

Поступила в редакцию  
1.III.2002