

УДК 532.529.2:532.5.013.13:536.412

© 2003 г. Ю. А. ГАПОНЕНКО, В. Е. ЗАХВАТАЕВ

МИКРОКОНВЕКЦИЯ В БИНАРНОЙ СИСТЕМЕ

На основе приближения существенно дозвуковых течений проводятся аналитическое и численное исследования влияния малых изменений плотности среды на формирование естественной конвекции в слабонеизотермической бинарной смеси при очень малых числах Рэлея и постоянном среднем термодинамическом давлении (микрokonвекции). Микрokonвективные течения характеризуются несоленоидальным полем скоростей. По сравнению со случаем микрokonвекции в чистой жидкости наличие примеси и эффекта термодиффузии приводит к ряду новых интересных возможностей. Основное внимание уделяется изучению существенно нестационарных процессов (переходные процессы после приведения в контакт двух различных сред и конвекция в быстропеременных внешних температурных полях), в которых влияние объемного расширения среды весьма значительно. Также рассматриваются условия возникновения монотонных мод длинноволновых неустойчивостей Рэлея – Бенара и Бенара – Марангони.

Ключевые слова: конвекция при малых числах Рэлея, несоленоидальность поля скоростей, микрогравитация.

При пониженной тяжести существенное влияние на формирование естественной конвекции могут оказывать малые изменения теплофизических свойств среды, которые в земных условиях являются незначительными. Экспериментальное изучение этого вопроса сталкивается с трудностями, обусловленными множеством недостаточного хорошо контролируемых возмущений при проведении опытов на борту космических аппаратов [1, 2]. Теоретически, изменения плотности жидкой или газообразной среды, обусловленные вариациями температуры, могут индуцировать ее движение в замкнутом объеме даже при отсутствии тяжести; это движение имеет акустическую природу и существенно влияет на теплоперенос и рост давления в системе [3].

При изучении естественной конвекции в условиях микрогравитации интерес исследователей в последние десять лет вызвал случай изотермически несжимаемой жидкости, когда зависимостью свойств среды от давления можно пренебречь [4]. Для этого случая в [5, 6] определены границы применимости приближения Обербека – Буссинеска при пониженной силе тяжести по отношению к эффекту объемного расширения и с помощью априорных допущений из общих принципов механики сплошных сред выведена модель тепловой конвекции при очень малых числах Рэлея, обобщающая модель Обербека – Буссинеска (см. также [7]). Эта модель, известная как модель микрokonвекции, подробно изучалась в последние десять лет для случая однокомпонентной жидкости [4–10].

В настоящей работе исследуются микрokonвективные течения неизотермической бинарной жидкой смеси при наличии эффекта Соре. Изучение естественной конвекции в средах, в которых существуют градиенты двух и более характеристик с различными коэффициентами молекулярной диффузии (температура, концентрации химических компонент), представляет интерес для многих лабораторных и технологических процессов. С другой стороны, взаимодействие градиентов этих характеристик, формирующее распределение массовой плотности в поле тяжести, порождает режимы конвекции намного более разнообразные по пространственной структуре и временной динамике, условиям и механизмам развития, чем в однокомпонентном случае [11].

1. Определяющие уравнения. Рассматриваемая физическая система представляет собой ньютоновскую изотропную жидкость, состоящую из двух нереагирующих компонент, находящуюся во внешнем силовом поле. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ – декартовы координаты, $\rho_k(\mathbf{x}, t)$ – массовая плотность компонента k ($k = 1, 2$) в точке \mathbf{x} в момент времени t , $\mathbf{v}_k(\mathbf{x}, t)$ – скорость компонента k . Состояние системы описывается следующими полями: $\rho(\mathbf{x}, t)$ – полная плотность; $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1, v_2, v_3)$ – скорость центра масс элемента жидкости; $p^*(\mathbf{x}, t)$ – давление; $\theta(\mathbf{x}, t)$ – абсолютная температура; $c(\mathbf{x}, t)$ – концентрация массы одного из компонентов

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \mathbf{v} = \frac{\rho_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 \mathbf{v}_2}{\rho}, \quad c = \frac{\rho_1}{\rho}$$

Предполагается, что концентрации компонентов и температура в смеси достаточно мало меняются и все физические свойства жидкости, за исключением плотности, постоянны. Поток тепла и диффузионный поток вещества являются линейными функциями от ∇c и $\nabla \theta$, и коэффициенты в этих выражениях постоянны. В частности, плотность диффузионного потока вещества \mathbf{J}_c определяется как

$$\mathbf{J}_c = -k_c(\nabla c - \alpha \nabla \theta)$$

где постоянные коэффициенты k_c и α характеризуют диффузию и термодиффузию (таким образом, k_c/ρ – коэффициент молекулярной диффузии). Эти предположения позволяют рассмотреть в наиболее простом и чистом виде основные свойства и механизмы влияния объемного расширения среды на формирование сверхслабой конвекции.

Микроконвективные течения, характеризующиеся скоростями порядка 10 мкм/с и менее, можно описывать моделью существенно дозвуковых течений при наличии произвольных изменений плотности. Эта модель представляет собой предельную форму полной системы уравнений Навье – Стокса и теплопереноса при стремлении к нулю числа Маха и параметра, характеризующего гидростатическую сжимаемость [12, 13].

В приближении дозвукового течения полное давление представляется как сумма пространственно однородной термодинамической составляющей $P(t)$ и составляющей, учитывающей динамический и гидростатический эффекты $p(\mathbf{x}, t)$; последняя исключается из уравнения состояния, что обеспечивает "фильтрацию" акустики. В этой работе рассмотрения ограничены ситуациями, когда термодинамическое давление P постоянно, что соответствует случаю изотермической несжимаемой жидкости [4]. Этот случай реализуется в некоторых типичных ситуациях, как-то: область, занимаемая жидкостью, открыта атмосфере; суммарный нормальный поток тепла через непроницаемые твердые стенки замкнутого резервуара с флюидом равен нулю (в частности, система изолирована). В рассматриваемом случае система уравнений имеет вид [13]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho + \rho \nabla \mathbf{v} &= 0, \quad \rho \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla c \right) = k_c (\nabla^2 c + \alpha \nabla^2 \theta) \\ \rho c_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \theta \right) &= k (\nabla^2 \theta + \alpha' \nabla^2 c) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p' + \eta \nabla \nabla \mathbf{T} + (\rho - \rho_0) g \mathbf{k}, \quad \rho = \rho(\theta, c)$$

$$p' = p - \rho_0 g \mathbf{k} \mathbf{x}, \quad T_{ik} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \mathbf{v} \right)$$

Здесь η – сдвиговая вязкость; k – теплопроводность; коэффициент k_c характеризует молекулярную диффузию; коэффициенты α и α' характеризуют перекрестные явле-

ния, соответственно, термодиффузию и эффект Дюфура; c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении; g – величина ускорения внешних массовых сил; \mathbf{k} – единичный вектор, сонаправленный вектору ускорения внешних массовых сил; \mathbf{T} – декартовый тензор с компонентами T_{ik} ; δ_{ik} – единичный тензор. Объемная вязкость полагается равной нулю.

В качестве уравнения состояния выберем линейную зависимость удельного объема жидкости от изменений температуры и концентрации химических компонент

$$\rho = \rho_0(1 + \beta T + \gamma C)^{-1}, \quad T = \theta - \theta_0, \quad C = c - c_0 \quad (1.2)$$

где θ_0, c_0 – некоторые постоянные средние значения температуры и концентрации; ρ_0 – средняя плотность смеси; β и γ – (постоянные) температурный и концентрационный коэффициент плотности. В этом случае в рамках результирующей системы уравнений удастся определить соленоидальное векторное поле, что облегчает исследование некоторых аспектов задачи [5].

В результате уравнения конвекции неизотермической бинарной смеси принимают вид

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= (\beta \chi + \gamma \delta \alpha) \nabla^2 T + (\gamma \delta + \beta \chi \alpha') \nabla^2 C \\ \mathbf{v}_t + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} &= (1 + \beta T + \gamma C) \{ - \nabla p'' / \rho_0 + \mathbf{v} \nabla^2 \mathbf{v} \} - \mathbf{g} (\beta T + \gamma C) \\ T_t + \mathbf{v} \nabla T &= \chi (1 + \beta T + \gamma C) (\nabla^2 T + \alpha' \nabla^2 C) \\ C_t + \mathbf{v} \nabla C &= \delta (1 + \beta T + \gamma C) (\nabla^2 C + \alpha \nabla^2 T) \\ p'' &= p' - (\eta/3) \nabla \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\chi = k/(\rho_0 c_p)$ – коэффициент температуропроводности; $\delta = k_c/\rho_0$ – коэффициент диффузии; $\nu = \eta/\rho_0$ – кинематический коэффициент вязкости. (Первое уравнение системы (1.3) получено комбинацией первых трех уравнений системы (1.1) и уравнения (1.2).) Величины χ, δ, ν в (1.3) положительны.

Система (1.3) соответствует модели микроконвекции для однокомпонентной жидкости [5, 6] (см. также [7]), выведенной из аксиом механики сплошной среды путем априорных допущений. Приведенный выше вывод позволяет определить место модели микроконвекции в иерархии моделей конвективных течений и строже оправдать границы применимости некоторых специальных допущений, сделанных в [5, 6].

Пусть T^* – характерный перепад температуры в системе; C^* – характерная разность концентраций; d – характерный линейный размер. Уравнения модели микроконвекции (1.3) характеризуется следующими безразмерными параметрами: $\epsilon = \beta T^*$ – параметр Буссинеска; $R = \epsilon g d^3 / (\nu \chi)$ – число Рэлея; $\xi = \gamma C^* (\beta T^*)^{-1}$ – отношение характерных ускорений сил плавучести, индуцируемых неоднородностью поля концентраций и поля температуры; $Pr = \nu/\chi$ – число Прандтля; $Le = \delta/\chi$ – число Льюиса; $\sigma = -\alpha\gamma/\beta$ – отношение разделения. (Эффектом Дюфура, малозначительным в жидкостях, в большинстве случаев будем пренебрегать.)

Пусть число Рэлея достаточно мало. Следуя [5], сравним вклады сил плавучести и фактора объемного расширения в формирование поля скоростей. Для умеренных чисел Рэлея порядок скорости течения, вызванного силой плавучести, есть $(\beta T^* + \gamma C^*) d^2 g \nu^{-1}$. Вклад объемного расширения оценивается из первого из соотношений (1.3), его порядок равен $(\chi \beta T^* + \gamma \delta C^*) d^{-1}$. Из этих оценок можно заключить, что приближение Обербека – Буссинеска неприменимо для описания естественной конвекции при условии

$$G \frac{1 + \xi}{1 + \xi Le} \leq O(1), \quad G = \frac{R}{\epsilon} = \frac{g d^3}{\nu \chi} \quad (1.4)$$

где G – число Галилея. При типичном для водных растворов и для многих жидких растворов условии $Le \ll 1$ имеем вместо (1.4) $G(1 + \xi) \leq O(1)$. Если при этом $\xi = O(1)$, что имеет место для многих жидких растворов при индуцировании изменений концентрации эффектом $Sore$, то в этом случае приближение Обербека – Буссинеска становится физически некорректным при условии $G \leq O(1)$. Последнее условие применимости приближения Обербека – Буссинеска аналогично случаю однокомпонентной жидкости [5].

Для большинства веществ ограничение $G \leq O(1)$ вполне реалистично при уровне микроускорений порядка $10^{-5}g_0 - 10^{-4}g_0$ (g_0 – ускорение силы тяжести на Земле), достижимых на борту современных космических аппаратов. В земных условиях также встречаются ситуации, в которых конвекция происходит при малых числах Рэлея, например, случай длинноволновой конвекции в бинарных смесях, индуцируемой эффектом $Sore$ [14].

2. О разрешимости граничных и начальных задач. Система уравнений (1.3) является системой не типа Коши – Ковалевской, относясь к классу систем, не разрешенных относительно старшей производной. Главная часть (1.3) недиагональна, но результаты о существовании слабых, сильных и классических решений граничных и начальных задач для этой системы во многом аналогичны тем, которые имеют место для соответствующих уравнений Обербека – Буссинеска. Опишем некоторые из них, опуская здесь доказательство.

Однозначная разрешимость краевых задач для линеаризованной системы уравнений (1.3) в различных функциональных пространствах устанавливается с помощью хорошо известных методов [15]. Отметим, что линеаризованная система (1.3), после определения соленидального векторного поля

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - (\beta\chi + \gamma\delta\alpha)\nabla T - (\gamma\delta + \beta\chi\alpha')\nabla C$$

и соответствующим образом преобразованного давления q , в модифицированных переменных \mathbf{w} , q , T , C является, по терминологии [16], системой псевдопараболического типа. Соответственно для этого случая имеют место теоремы о разрешимости задачи Коши и смешанной задачи в пространствах Соболева с экспоненциальным весом, а также результаты о корректности, приведенные в [16]. В стационарном случае эта система уравнений является системой, эллиптической в смысле Дуглиса – Ниренберга [17].

В случае достаточно малых значений параметров β и γ при соответствующих условиях гладкости и согласования на основе принципа сжимающих отображений можно доказать однозначную разрешимость в пространствах Гёльдера и пространствах Соболева начально-краевых и краевых задач для системы уравнений (1.3) в ограниченной области с условиями прилипания для вектора скорости и условиями Неймана для температуры и концентрации, а также задачи Коши (для последней также в пространствах Соболева с экспоненциальным весом). Доказательства вполне аналогичны [8].

Существование в целом обобщенного решения краевой задачи двумерной задачи для нелинейной системы уравнений (1.3) доказывается с помощью введения соленидального векторного поля \mathbf{w} (при соответствующих граничных условиях для скорости) обычным функционально-аналитическим методом [15]. Точные формулировки и доказательства соответствующих результатов предполагается опубликовать в другом месте.

3. Длинноволновые неустойчивости Рэлея – Бенара и Бенара Марангони, индуцируемые эффектом $Sore$. Интересный класс задач о микроконвекции возникает при рассмотрении неустойчивости слоя бинарной жидкости при наличии достаточно сильного эффекта $Sore$. Известно, что в задаче о неустойчивости Рэлея – Бенара критическое число Рэлея убывает и стремится к нулю при возрастании величины отношения разделения σ , характеризующего влияние эффекта $Sore$ [14]. При этом критическое волновое число уменьшается (стремится к нулю в рамках линейной теории), если

стенки непроницаемы для вещества. Экспериментально этот вид неустойчивости был обнаружен сравнительно недавно [14]. Аналогичное явление имеет место для неустойчивости Бенара – Марангони. В этом разделе рассматривается влияние малых изменений плотностей на условия возникновения длинноволновой неустойчивости, индуцируемой эффектом Соре, при малых числах Рэлея.

Рассмотрим бесконечный плоский горизонтальный слой бинарной жидкости толщины d , ограниченный двумя твердыми непроницаемыми стенками, на которых задан нормальный поток тепла. Система находится в постоянном однородном поле тяжести, величина ускорения силы тяжести равна g . Ограничимся двумерным стационарным случаем.

Пусть x, z – декартовы координаты, ось z направлена вертикально вверх; u, w – соответственно x - и z -компоненты вектора скорости. Будем исходить из системы уравнений (1.3). Условия на границах слоя имеют вид $u = w = 0, T_z = -\theta^*/d, C_z = -\alpha T_z$ при $z = 0, d$.

Выберем следующие единицы измерения: расстояния – d ; скорости – $V^* = \beta T^* \chi / d$; температуры – θ^* ; концентрации – $(\beta/\gamma)\theta^*$; давления $p'' - \rho_0 V^* v / d$. Поскольку в исходном уравнении состояния (1.2) по существу отброшены все члены порядка $O(\epsilon^2)$, будем пренебрегать слагаемыми порядка $O(\epsilon^2)$ во всех уравнениях. Тогда определяющие уравнения и граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= S \nabla^2 T + Le \nabla^2 C, \quad Pr^{-1} \epsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} = -\nabla p'' + \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{G(T+C)\mathbf{k}}{1 + \epsilon(T+C)} \\ \epsilon \mathbf{v} \nabla T &= \nabla^2 T, \quad \epsilon \mathbf{v} \nabla C = Le \nabla^2 (C - \sigma T) \\ z = 0, \quad z = 1: u &= w = 0, \quad T_z = -1, \quad C_z = \sigma T_z \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$S = 1 - Le \sigma$$

В качестве основного состояния рассмотрим механическое равновесие

$$u_0 = w_0 = 0, \quad T_{0z} = -1, \quad C_{0z} = -\sigma$$

Линеаризуем систему (3.1) на этом состоянии, вводя

$$(u, v, T, C) = (u_0, v_0, T_0, C_0) + (u', v', T', C')$$

и введем функцию тока ψ'

$$u' = \psi'_z + ST'_x + LeC'_x, \quad w' = -\psi'_x + ST'_z + LeC'_z$$

Рассмотрим нормальные возмущения вида

$$(\psi', T', C') = (\psi'(z), T'(z), C'(z)) \exp(-i\alpha x)$$

Тогда получим следующую систему:

$$\begin{aligned} (D^2 - \alpha^2)^2 \psi' + i\alpha G(T' + C') &= 0, \quad -\epsilon(i\alpha \psi' + SDT' + LeDC') = (D^2 - \alpha^2)T' \\ -\epsilon\sigma(i\alpha \psi' + SDT' + LeDC') &= Le(D^2 - \alpha^2)(C' - \sigma T') \\ z = 0, 1: D\psi' &= i\alpha(ST' + LeC'), \quad \psi' = DT' = DC' = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$D = \frac{d}{dz}, \quad G = \frac{G}{1 + \epsilon(T_0 + C_0)^2}$$

Определим границы устойчивости с помощью метода регулярных возмущений. Предположим, что волновое число α мало. Будем искать решение в виде $(\psi', T', C') = (\psi^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}) + \alpha(\psi^{(1)}, T^{(1)}, C^{(1)}) + \dots$ Рассматривая (3.2) в порядках $O(1)$, $O(\alpha)$, находим

$$\begin{aligned} T^{(0)}, C^{(0)} &= \text{const}, \quad \psi^{(0)} = 0, \quad T^{(1)}, C^{(1)} = \text{const} \\ \psi^{(1)} &= i(ST_0 + \text{Le}C_0)z - i\left(\frac{G'(T_0 + C_0)}{24} + 3(ST_0 + \text{Le}C_0)\right)z^2 + \\ &+ i\left(\frac{G'(T_0 + C_0)}{12} + 2(ST_0 + \text{Le}C_0)\right)z^3 - i\frac{G'(T_0 + C_0)}{24}z^4 \end{aligned}$$

В результате получим следующее выражение для критического числа Рэлея монотонной моды неустойчивости

$$R_c = \frac{\text{Le}}{\sigma + \text{Le} + \sigma\text{Le}} \left(720 + \frac{36}{7}(\varepsilon(1 + \sigma))^2 + O((\varepsilon(1 + \sigma))^3) \right) \quad (3.3)$$

В рассматриваемом приближении эффект изменения плотности повышает порог неустойчивости Рэлея – Бенара, но в большинстве практических случаев это повышение мало. Однако, как показывает численное исследование (численный метод описан ниже) этой задачи в ограниченной области, критические числа Рэлея значительно более сильно, чем это выражено (3.3), зависят от параметра Буссинеска ε при уменьшении отношения горизонтальных размеров слоя к вертикальным.

Рассмотрим теперь задачу о неустойчивости Бенара – Марангони. Исследуемая физическая система остается прежней, но верхняя граница слоя является сейчас свободной недеформируемой поверхностью, а поле тяжести отсутствует. Зависимость коэффициента поверхностного натяжения τ от температуры и концентрации аппроксимируется линейной, $\tau = \tau_0 + \tau_T T + \tau_C C$. На свободной границе выполняются стандартные соотношения

$$\eta u_z = \tau_T T_x + \tau_C C_x, \quad w = 0, \quad T_z = \text{const}, \quad C_z = -\alpha T_z \quad (z = d)$$

Условие возникновения неустойчивости выражается с помощью числа Марангони $M = -\tau_T T^* d / \eta \chi$, характеризующего отношение касательных напряжений на границе к вязким напряжениям и теплопроводности. Анализ, аналогичный предыдущему, показывает, что в этом случае критическое число Марангони монотонной моды неустойчивости определяется как

$$M_c = \frac{\text{Le}}{\text{Le} + (1 + \text{Le})S'} \left(48 + \frac{6}{5}\varepsilon(1 + \sigma) + O((\varepsilon(1 + \sigma))^2) \right), \quad S' = -\frac{\alpha\tau_c}{\tau_T} \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) видно, что эффект объемного расширения среды оказывает значительно большее влияние на изменение порога неустойчивости Бенара – Марангони, нежели неустойчивости Рэлея – Бенара.

4. Одномерное нестационарное течение. Влияние изменений плотности на микроконвективные течения проявляется главным образом в существенно нестационарных процессах. Для того чтобы выяснить некоторые особенности этого влияния, рассмотрим линеаризованную систему (1.3), положим, что внешних сил нет и $\alpha' = 0$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= (\beta\chi + \gamma\beta\alpha)\nabla^2 T + \gamma\delta\nabla^2 C, \quad \mathbf{v}_t = -\nabla p'' / \rho_0 + \nu\nabla^2 \mathbf{v} \\ T_t &= \chi\nabla^2 T, \quad C_t = \delta(\nabla^2 C + \alpha\nabla^2 T) \end{aligned} \quad (4.1)$$

в простейшем случае одномерного нестационарного движения, в котором все поля зависят лишь от одной координаты $x_1 = x$

$$v_1 = u(x, t), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad T = T(x, t), \quad C = C(x, t), \quad p'' = p''(x, t)$$

Ограничимся двумя наиболее важными для изучения рассматриваемого эффекта ситуациями: развитие резко нестационарных процессов в момент приведения в контакт двух различных сред и конвекция в быстропеременных внешних температурных полях.

Рассмотрим течение в области $-\infty < x < \infty$ с начальными данными (при $t = 0$)

$$u = 0 \quad (-\infty < x < \infty); \quad T = T_1, \quad C = C_1 \quad (x < -x_\epsilon)$$

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} + x \frac{T_2 - T_1}{2x_\epsilon}, \quad C = \frac{C_1 + C_2}{2} + x \frac{C_2 - C_1}{2x_\epsilon} \quad (-x_\epsilon < x < x_\epsilon)$$

$$T = T_2, \quad C = C_2 \quad (x > x_\epsilon)$$

где $x_\epsilon > 0$, T_1, T_2, C_1, C_2 – заданные константы. Эти начальные условия соответствуют приведению в контакт двух сред с разными постоянными значениями температуры и концентрации, разделенных переходным слоем толщины $2x_\epsilon$. Можно видеть, что в этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{T_2 - T_1}{4x_\epsilon} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x_\epsilon - x}{2(\chi t)^{1/2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x_\epsilon + x}{2(\chi t)^{1/2}} \right) \right) \\ \frac{\partial C}{\partial x} &= \left(\frac{C_2 - C_1}{4x_\epsilon} - \frac{\alpha \delta}{\chi - \delta} \frac{T_2 - T_1}{4x_\epsilon} \right) \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x_\epsilon - x}{2(\delta t)^{1/2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x_\epsilon + x}{2(\delta t)^{1/2}} \right) \right) + \frac{\alpha \delta}{\chi - \delta} \frac{\partial T}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$u = (\beta \chi + \alpha \gamma \delta) \frac{\partial T}{\partial x} + \gamma \delta \frac{\partial C}{\partial x} + u_0$$

$$u_0 = -(\beta \chi + \alpha \gamma \delta) \frac{\partial T}{\partial x}(t=0) - \gamma \delta \frac{\partial C}{\partial x}(t=0) = \text{const}$$

где $\operatorname{erf}(\cdot)$ – интеграл вероятностей; давление определяется из второго уравнения (4.1). Соотношения (4.2) описывают процесс релаксации рассматриваемой системы.

Ясно, что в приближении Обербека – Буссинеска в данной задаче скорость тождественно равна нулю. Рассматриваемое микроконвективное течение обусловлено исключительно вариациями плотности. Очевидно, что чем более резкие градиенты температуры и концентрации создаются в начальный момент времени в переходном слое, тем больше скорость микроконвекции в начальный период переходного процесса.

Из (4.2) видно, что скорость микроконвекции, вообще говоря, существенно возрастает по сравнению со случаем чистой жидкости при $\beta \chi \sim \gamma \delta$, что может иметь место, например, для газовых смесей. На основе (4.2) можно также оценить время затухания возмущений скорости, порождаемых неоднородностями полей температуры и концентрации. В частности, при условии $Le = \delta/\chi \ll 1$, характерном для водных растворов, влияние примеси проявляется в существенном увеличении времени релаксации системы по сравнению с чистой жидкостью. В следующем разделе с помощью численного исследования для задачи, родственной рассматриваемой, получены те же качественные выводы.

Рассмотрим течение в полупространстве $0 \leq x < \infty$ в рамках задачи без начальных условий. Ограничимся сначала случаем чистой жидкости ($C, \delta \equiv 0$). При условиях

$$u = 0, \quad T = T_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (x = 0); \quad |T(x, t)|, |u(x, t)| < \infty$$

где ω , φ , T_0 – заданные постоянные, из (4.1) имеем

$$u = \beta T_0 \left(\frac{\omega \chi}{2} \right) \left(-\exp\left(-\frac{\omega}{2\chi} x\right) \left(\cos\left(\left(-\frac{\omega}{2\chi}\right)x + \omega t + \varphi\right) + \sin\left(-\left(\frac{\omega}{2\chi}\right)x + \omega t + \varphi\right) \right) + \cos(\omega t + \varphi) + \sin(\omega t + \varphi) \right)$$

при условиях

$$u = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = T_0' \cos(\omega t + \varphi) \quad (x = 0); \quad |T(x, t)|, |u(x, t)| < \infty$$

где $T_0' = \text{const}$, из (4.1) получаем

$$u = \beta \chi T_0' \left(\exp\left(-\frac{\omega}{2\chi} x\right) \cos\left(\left(-\frac{\omega}{2\chi}\right)x + \omega t + \varphi\right) - \cos(\omega t + \varphi) \right)$$

Для рассматриваемой системы, таким образом, максимальная скорость микроконвективного течения пропорциональна корню квадратному из частоты внешнего воздействия, $(\omega)^{1/2}$, в случае условия первого рода для температуры; если же на границе задан поток тепла, то амплитуда колебаний скорости не зависит от частоты внешнего воздействия. Заметим, что значения скорости не зависят от вязкости. При достаточно большой частоте ω и температуропроводности χ максимальная скорость достигает внушительных значений. К сожалению, получить большие ω на практике затруднительно. Аналогичные выводы получаются для полной задачи (4.1) при условиях

$$u = 0, \quad T = T_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad \frac{\partial C}{\partial x} = -\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad (x = 0)$$

$$|T(x, t)|, |C(x, t)|, |u(x, t)| < \infty$$

Для ограниченной области характер зависимости максимальной скорости конвекции от частоты внешнего температурного воздействия может быть существенно иной (см. ниже).

5. Численное исследование. Рассмотрим две основные задачи о микроконвекции в прямоугольной области $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq H$, ограниченной непроницаемыми для вещества твердыми стенками. В первой задаче область теплоизолирована: $T_y = 0$ при $y = 0, H$; $T_x = 0$ при $x = 0, L$, а начальные данные соответствуют приведению в контакт двух сред с различными постоянными значениями температуры и концентрации

$$T = T_1, \quad C = C_1 \quad (0 \leq x \leq L/2), \quad T = T_2, \quad C = C_2 \quad (L/2 \leq x \leq L)$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad (0 \leq x \leq L)$$

(Аналогичная задача для изотермической бинарной смеси рассматривалась в [7]). Во второй – на верхней и нижней границах задан периодический по времени поток тепла: $T_y = \Theta \cos(\Omega t)$ при $y = 0, H$; $T_x = 0$ при $x = 0, L$, начальные условия соответствуют состоянию равновесия. Предполагается, что $\alpha' = 0$ (эффект Дюфура не учитывается).

Вводя соленоидальное векторное поле (модифицированную скорость) \mathbf{w} и модифицированное давление q

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2) = \mathbf{v} - (\beta \chi + \gamma \delta \alpha) \nabla T - \gamma \delta \nabla C$$

$$q = \frac{p''}{\rho_0} - (\beta \chi + \gamma \delta \alpha) (\mathbf{v} - \chi) \nabla^2 T - \gamma \delta (\mathbf{v} - \delta) \nabla^2 C$$

запишем уравнения (1.3) в переменных: температура T , концентрация C , вихрь ω и функция тока ψ

$$\omega = w_{2x} - w_{1y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = w_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -w_2$$

Для первой задачи масштабный множитель для температуры положим равным $T^* = T_1 - T_2$, для второй $-T^* = \Theta H$. Для обеих задач в качестве масштабов длины, скорости, времени, модифицированного давления и концентрации выберем соответственно

$$H, \frac{\chi}{H}, \frac{H^2}{\chi}, \rho_0 \left(\frac{\nu \chi}{H} \right)^2, \frac{\beta}{\gamma} T^*$$

В безразмерных переменных система (1.3) примет вид $0 \leq x \leq A, 0 \leq y \leq 1$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= -\omega, \quad \omega_t + u\omega_x + v\omega_y = K_\omega \nabla^2 \omega + F_\omega \\ C_t + uC_x + vC_y &= K_C (\nabla^2 C - \sigma \nabla^2 T) + F_C, \quad T_t + uT_x + vT_y = K_T \nabla^2 T + F_T \\ K_\omega &= \text{Pr}(1 + \varepsilon T + \varepsilon C); \quad K_C = \text{Le}(1 + \varepsilon T + \varepsilon C); \quad K_T = (1 + \varepsilon T + \varepsilon C) \\ F_\omega &= -\varepsilon(1 - \sigma \text{Le}) \{ \omega \Delta T + \nabla \omega \nabla T \} - \varepsilon \text{Le} \{ \omega \Delta C + \nabla \omega \nabla C \} - \\ & - (\varepsilon - \varepsilon \sigma \text{Le})^2 \{ T_y \Delta T_x - T_x \Delta T_y \} - (\varepsilon \text{Le})^2 \{ C_y \Delta C_x - C_x \Delta C_y \} \\ & - \varepsilon(\varepsilon - \varepsilon \sigma \text{Le}) \{ (C_y \Delta T_x - C_x \Delta T_y) + \text{Le}^2 (T_y \Delta C_x - T_x \Delta C_y) \} \\ & + \varepsilon \text{GPr} \{ k_1 T_y - k_2 T_x \} + \varepsilon \text{GPr} \{ k_1 C_y - k_2 C_x \} \\ & + \varepsilon \text{Pr} \{ q_x (T_y + C_y) - q_y (T_x + C_x) + \nabla^2 w_2 (T_x + C_x) - \nabla^2 w_1 (T_y + C_y) \} \\ F_C &= -\varepsilon \text{Le} |\nabla C|^2 - \varepsilon(1 - \sigma \text{Le}) (\nabla C \nabla T), \quad F_T = -\varepsilon(1 - \sigma \text{Le}) |\nabla T|^2 - \varepsilon \text{Le} (\nabla C \nabla T) \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $A = L/H$ – аспектное отношение, компоненты нормированного вектора ускорения внешних сил \mathbf{k} обозначены как k_1, k_2 .

Граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} x = 0 : \psi &= 0, \quad \psi_x = \varepsilon(1 - \sigma \text{Le}) T_y + \varepsilon \text{Le} C_y, \quad T_x = 0, \quad C_x = 0 \\ x = A : \psi &= A \varepsilon f(t), \quad \psi_x = \varepsilon(1 - \sigma \text{Le}) T_y + \varepsilon \text{Le} C_y, \quad T_x = 0, \quad C_x = 0 \\ y = 0, 1 : \psi &= x \varepsilon f(t), \quad \psi_y = -\varepsilon(1 - \sigma \text{Le}) T_x - \varepsilon \text{Le} C_x, \quad T_y = f(t), \quad C_y = \sigma f(t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

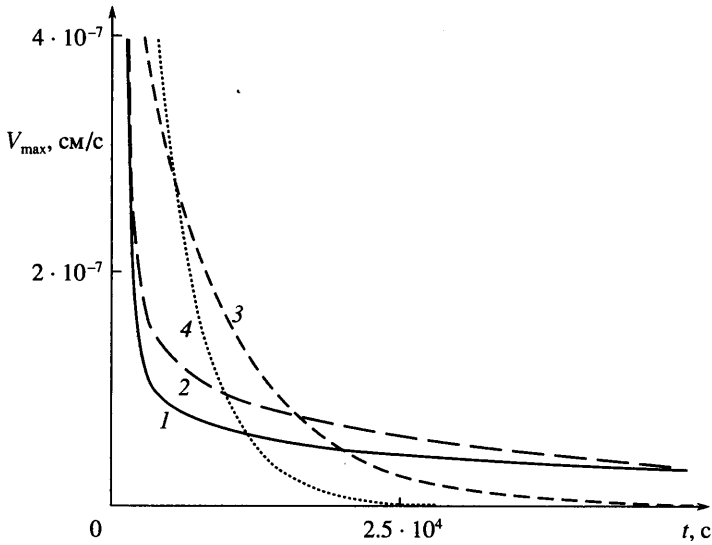
Для первой задачи $f(t) \equiv 0$, для второй $-f(t) = \cos(\Omega t)$, где Ω – безразмерная частота.

В задаче 1 начальные значения температуры и концентрации, определяющие разрыв этих величин при $t = 0$ в середине области $x = A/2$, задавались как 0.5 и -0.5. Вектор внешних сил направлен вдоль оси x , $\mathbf{k} = (1, 0)$.

В задаче 2 в момент времени $t = 0$ задавались следующие распределения полей температуры, концентрации и скорости: $T = y - 0.5$; $C = \sigma(y - 0.5)$; $\mathbf{w} = 0$. Вектор $\mathbf{k} = (0, 1)$.

Поставленные задачи численно изучались на основе (5.1), (5.2) и соответствующих начальных данных.

Для интегрирования системы уравнений использовался численный метод расчета микроконвективных течений в переменных $\omega - \psi$, предложенный [10], обобщенный на случай бинарной неизотермической системы.



Фиг. 1. Зависимость максимальной скорости V_{\max} микроконвекции в расчетной области от времени при $\varepsilon = 7.5 \times 10^{-3}$, $\sigma = 0.38$ для $Le = 0.005; 0.01; 0.05$ и 0.1 (кривые 1–4) (задача 1)

Исследовалось влияние определяющих параметров Ω , ε , Le , σ на характеристики микроконвекции. Принималось, что $G = 1$; $Pr = 13.48$; $A = 2$.

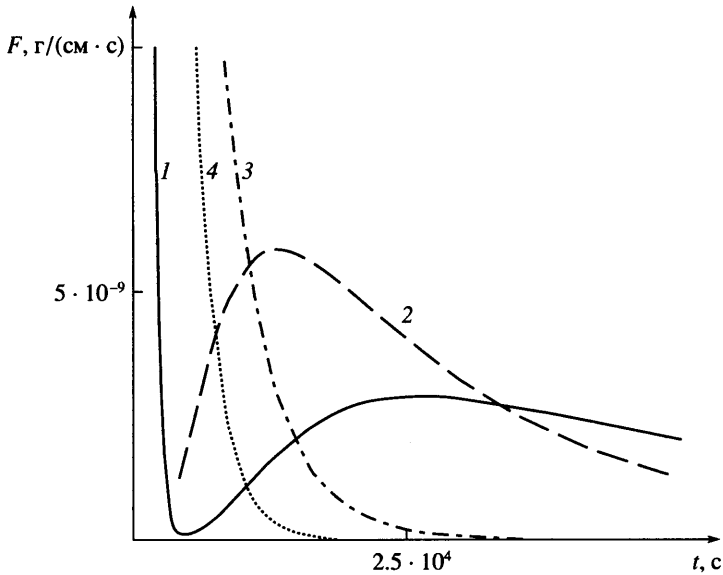
Структура течения в задаче 1 определяется объемным расширением жидкости, связанным с распределением температуры и концентрации в расчетной области, и имеет однонаправленный характер до момента установления термодинамического равновесия. При малых $Le \sim 0.01$ поле концентрации изменяется значительно медленнее, чем поле температуры, поэтому на начальном промежутке времени течение возникает главным образом за счет изменения поля температуры. После того как в области установится температурное равновесие, основным фактором, влияющим на микроконвективное течение, становится изменение поля концентрации. Наличие в системе двух характеристик с различными коэффициентами молекулярной диффузии приводит к появлению новых количественных и качественных эффектов по сравнению с микроконвекцией в однокомпонентной среде.

Фигура 1 иллюстрирует влияние Le на зависимость максимальной скорости микроконвективного течения в расчетной области от времени. С уменьшением Le увеличивается длительность существования микроконвективного течения по сравнению с чистой жидкостью. Этот результат полностью согласуется с анализом точного решения (4.2).

На фиг. 2 приведена типичная зависимость конвективного потока вещества

$$F = \int_0^1 (\rho \mathbf{v} C) dy$$

от времени для различных Le . Для $Le \leq 0.01$ можно выделить кратковременный начальный пик роста величины конвективного потока вещества, связанный с температурным расширением, и второй пик роста F , менее интенсивный, но более длительный, связанный с изменением поля концентрации. Изменение Le приводит к изменению интенсивности и длительности каждого из этих участков. При малых Le изменение во времени



Фиг. 2. Типичная зависимость интегрального конвективного потока вещества F от времени для $Le = 0.005; 0.01; 0.05$ и 0.1 (кривые 1–4) в сечении $x = 1.8$ (задача 1)

поля концентрации слишком медленное, что приводит к разделению температурного и концентрационного влияния на поле скорости и как следствие к появлению второго пика конвективного потока. При значениях Le , близких к единице, второй пик F отсутствует, поскольку равновесные состояния для полей концентрации и температуры устанавливаются в большей степени одновременно.

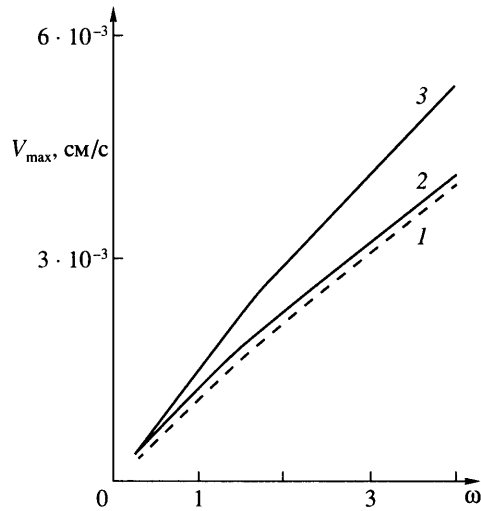
Результаты расчетов показывают также, что в рамках задачи 1 увеличение числа Буссинеска ϵ приводит к пропорциональному росту характерной скорости в области, а увеличение параметра термодиффузии σ приводит к незначительному росту интенсивности течения (менее пяти процентов для $\sigma = 1.9$ относительно $\sigma = 0.38$).

Вторая расчетная задача связана с изучением влияния нестационарных потоков тепла на характеристики микроконвективного течения бинарных неизотермических систем. Формирование структуры течения здесь, также как и в задаче 1, происходит преимущественно под действием сил объемного расширения.

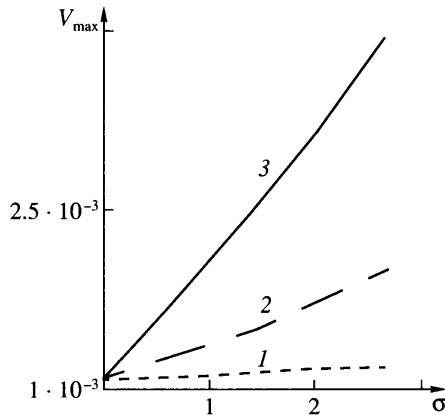
Фигура 3 иллюстрирует зависимость максимальной скорости течения от безразмерной частоты Ω для различных Le . Интенсивность микроконвекции возрастает с увеличением частоты изменения внешнего потока тепла, причем оба эта зависимость близка к линейной. Аналогичные результаты имеют место при импульсном (во времени) воздействии внешнего теплового потока. Так, если амплитуда импульса обратно пропорциональна его продолжительности, максимальная скорость микроконвекции возрастает пропорционально амплитуде импульса.

Результаты, представленные на фиг. 3, также показывают, что характерная скорость микроконвекции в нестационарных температурных полях увеличивается с ростом числа Льюиса Le .

Наряду с параметром, определяющим быстроту изменения внешних температурных воздействий, параметр Буссинеска ϵ оказывает наиболее существенное влияние на микроконвективное течение. В случае достаточно большой частоты внешнего воздействия с увеличением ϵ наблюдается, согласно расчетам, приблизительно линейный рост максимальной скорости конвекции.



Фиг. 3. Зависимость максимальной скорости V_{\max} микроконвекции в расчетной области от безразмерной частоты Ω при $\epsilon = 7.5 \times 10^{-3}$; $\sigma = 0.38$ для $Le = 0.01$; 0.05 и 0.9 (кривые 1–3) (задача 2)



Фиг. 4. Зависимость максимальной скорости V_{\max} течения от отношения разделения σ при $\epsilon = 7.5 \times 10^{-3}$; $\Omega = 1$ для $Le = 0.01$; 0.05 и 0.9 (кривые 1–3) (задача 2)

Влияние параметров σ , Le на микроконвекцию иллюстрирует фиг. 4, на котором изображена типичная зависимость максимальной скорости течения от отношения разделения σ для различных значений Le . Характерная скорость микроконвекционного течения увеличивается пропорционально σ . Наблюдается ее рост и с числом Le .

Кроме описанных выше основных задач исследовались микроконвективные эффекты для других конфигураций систем. Установлено, что при малых числах Галилея $G \leq 10-100$ в широких диапазонах значений порядков определяющих параметров $\epsilon = 10^{-6}-10^{-1}$, $Pr = 10^{-3}-10^4$, $Le = 10^{-4}-1$, $\sigma = -3-3$ имеют место значительные качественные и количественные различия переходных и предельных режимов конвекции, рассчитанных по моделям Обербека – Буссинеска и дозвуковых течений. При доста-

точно малых значениях G механизм, связанный с объемным расширением, доминирует и силы плавучести не оказывают существенного влияния на развитие конвекции. Для таких значений G структура течения, рассчитанного по модели дозвуковых течений, качественно отличается от буссинесковской конвекции, а характерные значения скорости микроконвекции для значений параметров, соответствующих экспериментам на космических аппаратах, могут превосходить на два порядка соответствующие значения для модели Обербека – Буссинеска. Вместе с тем поля температуры и концентрации существенно не отличаются от классического случая. Эти выводы соответствуют полученным для микроконвекции в однокомпонентной жидкости [9, 10].

Заключение. На основе одного варианта приближения существенно дозвуковых течений – модели микроконвекции – исследовано влияние малых изменений плотности среды на формирование сверхслабой конвекции в неизотермической бинарной смеси при малых числах Рэлея. Имеют место значительные качественные и количественные различия режимов конвекции, рассчитанных по моделям Обербека – Буссинеска и дозвуковых течений при числах Рэлея порядка единицы и меньше. Наиболее существенное влияние на максимальную скорость микроконвективного течения оказывают параметр Буссинеска ϵ и параметр, определяющий быстроту изменения внешних температурных воздействий Ω . По сравнению со случаем микроконвекции в чистой жидкости наличие примеси и эффекта термодиффузии приводит к ряду новых возможностей. В частности, в зависимости от отношения характеристик молекулярной диффузии компонент меняются характерная скорость микроконвекции и время затухания возмущений, обусловленных неоднородностями температуры и (или) химического состава.

Влияние изменений плотности может проявляться и в таких процессах, как монотонные длинноволновые неустойчивости Рэлея – Бенара и Бенара – Марангони, индуцируемые эффектом Соре.

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (грант по конкурсу – экспертизе научных проектов молодых ученых СО РАН 2000 г.), интеграционного гранта СО РАН № 5 "Фундаментальные проблемы гидромеханики и теплопереноса в условиях микрогравитации" и Красноярского краевого фонда науки (коды проектов 12G57, 13G036).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grodzka P.G., Bannister T.C.* Heat flow and convection demonstration experiments aboard Apollo 14 // *Science*. 1972. V. 176. № 4034. P. 506–508.
2. *Grodzka P.G., Bannister T.C.* Heat flow and convection experiments aboard Apollo 17 // *Science*. 1975. V. 187. № 4172. P. 165–167.
3. *Larkin B.K.* Heat flow to a confined fluid in zero gravity // *Thermophys. Spacecraft and Planet. Bodies*. N.Y.; L.: Acad. Press, 1967. P. 819–832.
4. *Юдович В.И.* Уравнения конвекции изотермически несжимаемой жидкости. Препринт № 1699–В99. Ростов н/Д: Рос. ун-т, 1999. 41 с. – Деп. в ВИНТИ 28.05.1999.
5. *Пухначев В.В.* Модель конвективного движения при пониженной гравитации // *Моделирование в механике*. Новосибирск: Изд. Ин-та теорет. и прикл. механики, СО РАН, 1992. Т. 6 (23). № 4. С. 47–56.
6. *Пухначев В.В.* Микроконвекция в вертикальном слое // *Изв. РАН. МЖГ*. 1994. № 5. С. 76–84.
7. *Perera P.S., Sekerka R.F.* Nonsolenoidal flow in a liquid diffusion couple // *Phys. Fluids*. 1997. V. 9. № 2. P. 376–391.
8. *Pukhnachov V.V.* Solvability of initial-boundary value problem in nonstandard model of convection // *Зап. науч. семинаров ЛОМИ. СПб.*, 1996. Т. 233. С. 217–226.
9. *Гончарова О.Н.* Микроконвекция в слабых силовых полях. Сравнение двух моделей при численном исследовании // *ПМТФ*. 1997. Т. 38. № 2. С. 58–63.
10. *Гончарова О.Н.* Расчет микроконвекции в длинном прямоугольнике // *Вычислит. технологии*. 2000. Т. 5. № 5. С. 26–37.

11. *Barten W., Lucke M., Kamps M., Schmitz R.* Convection in binary fluid mixtures. // *Phys. Rev. E.* 1995. V. 51. № 6. P. 5636–5680.
12. *Chenoweth D.R., Paolucci S.* Natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature differences // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 169. P. 173–210.
13. *Лапин Ю.В., Стрелец М.Х.* Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989. 368 с.
14. *Lhost O., Platten J.K.* Large – scale convection induced by the Soret effect // *Phys. Rev. A.* 1989. V. 40. № 11. P. 6415–6420.
15. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
16. *Демиденко Г.В., Успенский С.В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998. 436 с.
17. *Солонников В.А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даг-лиса – Л. Ниренберга. II // *Тр. Мат. ин-та АН СССР.* 1966. Т. 92. С. 233–297.

Красноярск

Поступила в редакцию
15.III.2002