

УДК 532.526.5:533.6.011.35

© 2003 г. В. Н. ДИЕСПЕРОВ, Г. Л. КОРОЛЕВ

**ВОЗНИКНОВЕНИЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ ЗОН И ЗОН ЛОКАЛЬНОГО ОТРЫВА  
ПРИ ТРАНСЗВУКОВОМ СТАЦИОНАРНОМ ОБТЕКАНИИ  
НЕРОВНОСТИ ПОВЕРХНОСТИ  
В РЕЖИМЕ СВОБОДНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

В рамках теории свободного взаимодействия с помощью численных методов исследуется возникновение сверхзвуковых зон с ударными волнами во внешней невязкой области при обтекании неровностей в нижнем вязком подслое как с образованием зон локального отрыва, так и без них.

*Ключевые слова:* трансзвуковое стационарное обтекание, теория свободного взаимодействия, отрывные и сверхзвуковые зоны.

Теория свободного взаимодействия впервые была предложена в работах [1, 2] при изучении задачи локального взаимодействия падающей ударной волны с ламинарным пограничным слоем. Уравнения, описывающие свободное взаимодействие внешнего стационарного трансзвукового потока с ламинарным пограничным слоем, были впервые выведены в [3]. В результате первых численных расчетов этих уравнений было исследовано поведение поверхностного трения [4–6]. Вопрос о возникновении сверхзвуковых зон и замыкающих их ударных волн, а также взаимодействие этих ударных волн с пограничным слоем является одним из основных в трансзвуковой газовой динамике. Еще на заре развития трансзвуковой газовой динамики были произведены эксперименты [7], которые показали, что пограничный слой существенно влияет на формирование трансзвукового течения, в частности на структуру сверхзвуковых зон, и взаимодействие ударной волны с пограничным слоем носит неклассический характер. Выводы работы [7] полностью согласовывались с выводами появившейся затем теории свободного взаимодействия [1–3]. В настоящей работе этот вопрос впервые изучается в рамках теории свободного взаимодействия в случае обтекания малой неровности установившимся трансзвуковым потоком газа. Начало исследованиям о влиянии малой неровности, расположенной в нижнем вязком подслое, на течение в области свободного взаимодействия при сверхзвуковых скоростях обтекания было положено в [8, 9].

1. Исследуется трансзвуковое ламинарное течение газа в окрестности малой неровности, расположенной на полубесконечной пластине на расстоянии  $L$  от ее носика. Число Рейнольдса  $Re = \rho_\infty U_\infty L / \mu_\infty$ , определенное по значениям газодинамических величин в набегающем потоке, параллельном плоскости пластины, предполагается стремящимся к бесконечности. Здесь  $\rho_\infty$ ,  $U_\infty$ ,  $\mu_\infty$  соответственно плотность, скорость и коэффициент вязкости набегающего потока. Обозначим через  $x^*$ ,  $y^*$  декартову систему координат с началом в носике пластины. Высота неровности предполагается  $O(LRe^{-3/5})$ . Считается также, что число Маха  $M_\infty$  набегающего потока при  $Re \rightarrow \infty$  близко к единице и  $M_\infty^2 = 1 + O(Re^{-1/5})$ .

В этом случае неровность индуцирует свободное взаимодействие набегающего трансзвукового потока с пограничным слоем. Возникает трехслойная область свобод-

ного взаимодействия с продольным размером  $O(\text{Re}^{-3/10})$  [3], внутри нижнего подслоя которой расположена неровность.

Следуя идеям работы [3], кратко опишем вывод уравнений и краевых условий в области свободного взаимодействия, индуцированного неровностью, расположенной на обтекаемой пластине в нижнем вязком подслое. Разложения переменных здесь имеют вид

$$x^* = L(1 + \text{Re}^{-3/10} x), \quad y^* = L\text{Re}^{-3/5} y^\circ$$

Пусть форма неровности в безразмерных декартовых координатах  $(x, y^\circ)$  задается уравнением  $y^\circ = f(x)$ , в котором функция  $f(x)$  полагается гладкой. Уравнения пограничного слоя и краевые условия в нижнем вязком подслое удобнее всего рассматривать в переменных  $x$  и  $y$ , где  $y = y^\circ - f(x)$  [10].

В этом случае разложения параметров потока имеют вид

$$u^* = U_\infty \text{Re}^{-1/10} u + \dots, \quad v^* = U_\infty \text{Re}^{-2/5} v + \dots,$$

$$p^* = p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 \text{Re}^{-1/5} p + \dots, \quad \rho^* = \rho_\infty \rho + \dots$$

Здесь  $p^*$ ,  $\rho^*$  – давление и плотность газа, а  $u^*$ ,  $v^*$  – компоненты вектора скорости течения в выбранной нами системе координат  $(x, y)$ . Ниже для простоты предполагается, что обтекаемая поверхность теплоизолирована, число Прандтля  $\text{Pr} = 1$ , а первый коэффициент вязкости  $\mu = CT$  ( $C$  – постоянная Чепмена). Тогда согласно закону Крокко [11] температура на пластине является постоянной величиной. Обозначим через  $R(0)$  значение безразмерной плотности на стенке. Из уравнения состояния сразу следует, что  $\rho = R(0)$ . Подстановка выписанных выше разложений, справедливых в нижнем вязком подслое, в уравнения Навье – Стокса дает уравнения Прандтля для несжимаемого пограничного слоя

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ R(0) \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right\} &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C}{R(0)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

При  $x \rightarrow -\infty$  решение в нижнем вязком подслое должно сращиваться с решением Блазиуса, а при  $y = 0$  компоненты вектора скорости  $u = v = 0$ .

Таким образом, течение в нижнем вязком подслое, в котором расположена неровность, в первом приближении формируется вязкими напряжениями. Влиянием теплопроводности в нем можно пренебречь, так как газ при малых скоростях почти несжимаем.

В основной толще пограничного слоя течение является вихревым, хотя диссипативные факторы в первом приближении уже не играют существенной роли. Разложения переменных и параметров потока в ней имеют вид

$$\begin{aligned} x^* &= L(1 + \text{Re}^{-3/10} x), \quad y^* = L\text{Re}^{-1/2} Y \\ u^* &= U_\infty (U(Y) + \text{Re}^{-1/10} \bar{u} + \dots), \quad v^* = U_\infty \text{Re}^{-3/10} \bar{v} + \dots, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$p^* = p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 \text{Re}^{-1/5} \bar{p} + \dots, \quad \rho^* = \rho_\infty (R(Y) + \text{Re}^{-1/10} \bar{\rho} \dots)$$

Функции  $U(Y)$  и  $R(Y)$  описываются решением Блазиуса и определяют состояние набегающего пограничного слоя перед областью свободного взаимодействия. Они ведут

себя следующим образом:  $U(Y) \rightarrow O(Y)$ ,  $R(Y) \rightarrow R(0)$  при  $Y \rightarrow 0$ , а при  $Y \rightarrow \infty$  имеем  $U(Y) \rightarrow 1$ ,  $R(Y) \rightarrow 1$ .

В результате подстановки разложений (1.2) в уравнении Навье – Стокса для определения функций  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{p}$  и  $\bar{\rho}$  получим обыкновенные дифференциальные уравнения, решениями которых будут

$$\bar{u} = \bar{A}(x) \frac{dU}{dY}, \quad \bar{v} = -\frac{d\bar{A}}{dx} U(Y), \quad \bar{p} = \bar{A}(x) \frac{dR}{dY}, \quad \bar{\rho} = p(x) \quad (1.3)$$

Здесь произвольная функция  $\bar{A}(x)$  удовлетворяет условию  $\bar{A}(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Решение (1.3) означает, что смещение линий тока в основной толще пограничного слоя в первом приближении полностью обусловлено неровностью и толщиной вытеснения пограничного слоя в нижней пристеночной области.

Во внешней области, в которой течение потенциально, разложения переменных и параметров газа имеют вид

$$\begin{aligned} x^* &= L(1 + \text{Re}^{-3/10} x), & y^* &= L\text{Re}^{-1/5} n \\ u^* &= U_\infty(1 + \text{Re}^{-1/5} u' + \dots), & v^* &= U_\infty \text{Re}^{-3/10} v' + \dots, \\ p^* &= p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 \text{Re}^{-1/5} p' + \dots, & \rho^* &= \rho_\infty \rho' \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

В результате подстановки разложений (1.4) в уравнения Навье – Стокса, получим, что в верхней невязкой области течение описывается уравнением Кармана – Гудерля для потенциала возмущенной скорости  $\phi$  [11]

$$\begin{aligned} (K_\infty - (\gamma + 1)\phi_x)\phi_{xx} + \phi_{nn} &= 0, & K_\infty &= \frac{1 - M_\infty^2}{\text{Re}^{-1/5}} \\ u' &= \phi_x, & v' &= \phi_n \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $K_\infty$  – параметр трансзвукового подобия. Решение уравнения (1.5) должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\phi \rightarrow 0, \quad x^2 + n^2 \rightarrow \infty, \quad p_x(x) = -\phi_{xx}(x, 0) \quad (1.6)$$

Первое условие (1.6) определяется из условий срачивания параметров течения с внешним набегающим потоком газа, а второе условие показывает, как связаны между собой величина потенциала возмущенной скорости и градиент давления на внешней границе пограничного слоя.

Условия взаимодействия записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n}(x, 0) &= \frac{df}{dx} - \frac{dA}{dx}, & \frac{dA}{dx} &\rightarrow -\frac{v(x, y)}{u(x, y)}, & y \rightarrow \infty \\ A(x) &= \bar{A}(x) + f(x) \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. Производя аффинные преобразования, аналогичные тем, которые были произведены в [6, 12], приведем уравнения, краевые и начальные условия, описывающие трансзвуковое течение в области свободного взаимодействия, индуцированного малой неровностью, к каноническому виду. Для численных расчетов этой системы удобно использовать уравнения пограничного слоя для завихренности  $\omega = du/dy$  [13]. Оставим прежние обозначения для переменных и функций, входящих в уравнения и краевые условия. В результате получим, что в преобразованных переменных течение в облас-

ти свободного взаимодействия в нижнем вязком подслое описывается уравнением пограничного слоя для завихренности  $\omega$  со следующими начальными и граничными условиями

$$\int_0^y \omega dy \frac{\partial \omega}{\partial x} + \left( \int_0^y \frac{\partial \omega}{\partial x} dy - y \int_0^y \frac{\partial \omega}{\partial x} dy \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1)$$

$$\omega \rightarrow 1, \quad x \rightarrow -\infty, \quad y \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(x, 0) = \frac{dp}{dx} \quad (2.3)$$

Краевые условия (2.2) характеризуют течение в областях, лежащих слева и над вязким подслоем, условие (2.3) задает связь между завихренностью и градиентом давления на поверхности пластины.

Во внешней потенциальной области течение описывается уравнением Кармана – Гудерлея для потенциала возмущенной скорости  $\phi$

$$(K - (\gamma + 1)\phi_x)\phi_{xx} + \phi_{nn} = 0, \quad K = K_\infty/\delta \quad (2.4)$$

Здесь  $K$  – новый трансзвуковой параметр подобия, появившийся в результате аффинного преобразования, коэффициент пропорциональности  $\delta$  получен в [12].

Граничные условия для уравнения (2.4) следующие

$$\phi \rightarrow 0, \quad x^2 + n^2 \rightarrow \infty, \quad p_x(x) = -\phi_{xx}(x, 0) \quad (2.5)$$

Условия взаимодействия имеют вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(x, 0) = \frac{df}{dx} - \frac{dA}{dx} \quad (2.6)$$

$$\frac{dA}{dx} \rightarrow -\frac{v(x, y)}{u(x, y)}, \quad y \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

Как и ранее,  $A(x) = \bar{A}(x) + f(x)$ . В качестве примера была взята неровность, форма которой описывается уравнением

$$f(x) = h/(1 + x^2) \quad (2.8)$$

Решение задачи (2.1)–(2.8) зависит от двух параметров  $K$  и  $h$ .

**3.** Численное исследование задачи (2.1)–(2.8) находится на основе прямого метода решения уравнений теории свободного взаимодействия [14], разработанного применительно к уравнениям трансзвукового взаимодействия. Введем две неравномерные сетки  $(y_m, x_j)$ ,  $m = 1, \dots, S$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  и  $(n_l, x_j)$ ,  $l = 1, \dots, S$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Обозначим значения завихренности в узлах первой сетки через  $\omega(y_m, x_j) = \omega_{mj}$  и соответственно значения потенциала возмущенной скорости через  $\phi(n_l, x_j) = \phi_{lj}$ . Во внутренних узлах расчетной сетки уравнения Прандтля аппроксимируются конечно-разностными схемами второго порядка точности, где первые производные по  $x$  и  $y$ , содержащиеся в нелинейных членах уравнений, аппроксимируются конечными разностями в зависимости от знака соответственно продольной и вертикальной составляющей вектора скорости. Обычно такая аппроксимация в области безотрывного течения включает распределения завихренности на  $(j - 1, j)$  вертикальных линиях (для схемы типа Кренка – Никольсона) или  $(j - 2, j - 1, j)$  для схемы, использующей трехточечную по  $x$  схему аппроксимации. Соответственно в области отрыва включают распределения завихренности на  $(j - 2, j - 1, j, j + 1, j + 2)$  вертикальных линиях. Предполагается,

что на вертикальной линии для  $j = 2$  профиль продольной составляющей скорости положителен, и используется двухточечная по  $x$  аппроксимация уравнений. Аналогичным образом в зависимости от знака нелинейного члена аппроксимируется уравнение Кармана – Гудерлея с помощью конечно-разностной схемы, представленной в [14]. Введем векторы  $W_j$  размерности соответственно  $M + S$

$$W_j = [\omega_{1j}, \dots, \omega_{Mj}, \phi_{1j}, \dots, \phi_{Sj}]^T, \quad j = 1, \dots, N$$

Тогда систему соотношений, аппроксимирующую уравнения движения и краевые условия, можно записать в компактном векторном виде

$$L_1(W_1) = 0, \quad L_2(W_1, W_2) = 0$$

$$L_j(W_{j-2}, W_{j-1}, W_j, W_{j+1}, W_{j+2}) = 0, \quad j = 3, \dots, N-2$$

$$L_j = L_j[L_{1j}, L_{2j}, \dots, L_{kj}, \dots, L_{M+S, j}]^T \quad (3.1)$$

$$L_{N-1}(W_N, W_{N-1}, W_{N-2}, W_{N-3}) = 0, \quad L_N(W_N, W_{N-1}, W_{N-2}) = 0$$

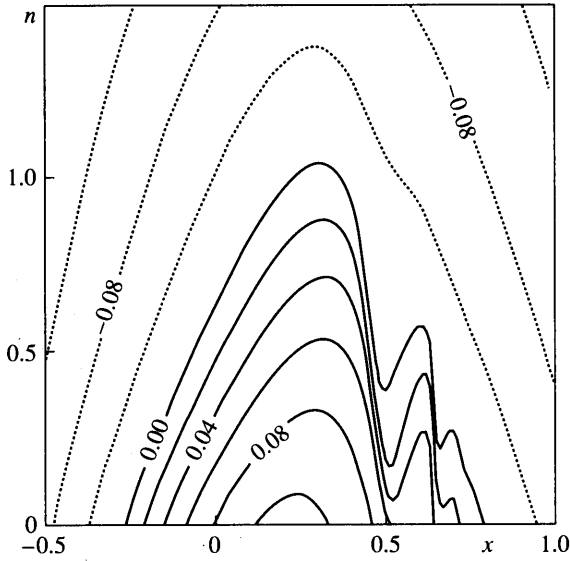
где  $L_{kj} = 0$  – соответствующее конечно-разностное уравнение в  $k$ -й точке на  $j$ -й вертикали. Здесь  $k = 1, 2, \dots, M + S$ .

Пусть имеется некоторое приближение для векторов  $W_j$  на  $i$ -й итерации. Для того чтобы найти улучшенное приближение этих векторов, введем соответствующие векторы поправок  $\Delta W_j$  и, разлагая в ряд Тейлора систему уравнений (3.1), получим соответствующую линейную систему уравнений относительно векторов поправок, решение которой ищется методом матричной прогонки. Алгоритм метода матричной прогонки подробно представлен в вышеупомянутой работе [14].

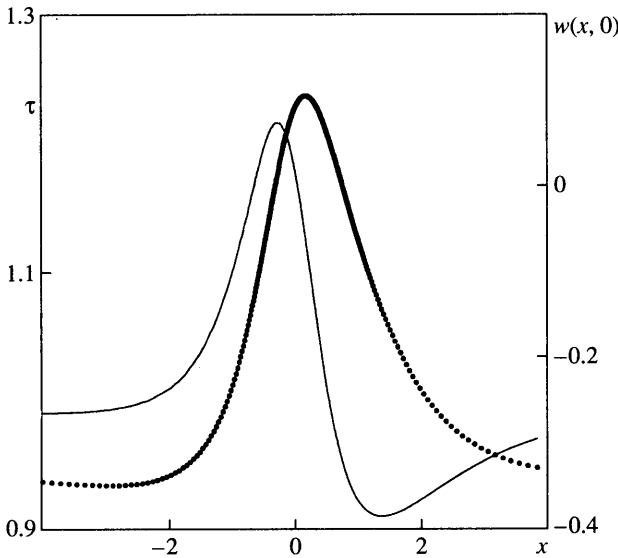
Приведенные далее результаты расчетов в основном получены с использованием неравномерной сетки с максимальным количеством расчетных точек  $N \times (M + S) = 221 \times (81 + 101)$ , минимальным шагом по  $x$   $\Delta x_{\min} = 0.02$  и минимальным шагом по  $y$   $\Delta y_{\min} = \Delta n_{\min} = 0.02$  в пограничном слое, а также во внешнем трансзвуковом потоке. Проверка полученных результатов проводилась путем увеличения числа расчетных точек в 2 раза  $N \times (M + S) = 441 \times (161 + 201)$  и уменьшения минимального значения шага по  $x$  и  $y$  тоже в 2 раза:  $\Delta x_{\min} = \Delta y_{\min} = \Delta n_{\min} = 0.01$ . Максимальные отклонения вычисленных величин в полученных решениях обнаруживались в области максимального градиента давления и не превышали 4%.

Прежде чем приступить к анализу полученных результатов, обратимся к результатам экспериментов [7]. Для ламинарных пограничных слоев в трансзвуковом течении они следующие: на исследуемых профилях (12%-ный симметричный двуконвективный профиль, составленный из дуг окружности, число Рейнольдса  $Re \approx 10^6$ ) сверхзвуковая зона замыкается двумя или более ударными волнами, которые наклонены вверх по течению. При переходе через первую ударную волну давление увеличивается, число Маха уменьшается, но течение остается сверхзвуковым. Таким образом, вниз по течению от первой ударной волны также образуется замкнутая сверхзвуковая область. Ее размеры намного меньше первой сверхзвуковой зоны. В месте падения первой ударной волны пограничный слой утолщается. Форма утолщения имеет малый радиус кривизны и при ее обтекании возникает волна разрежения, которая приводит к понижению давления. В этой сверхзвуковой области возникает вторая ударная волна. Если течение за ней сверхзвуковое, то процесс повторяется до тех пор пока за ударной волной скорость потока не станет дозвуковой. Распределение давления на поверхности пограничного слоя носит непрерывный характер.

На фиг. 1 представлена картина изолиний чисел  $w(x, n) = (\gamma + 1)\phi_x - K$  (пропорциональных отклонений квадрата местного числа Маха от единицы  $M^2 - 1$  [11]) при  $K = 0.3$ ,  $h = 0.35$ . Она ясно показывает, что во внешней потенциальной области имеется сверхзвуковая зона, замыкающаяся двумя ударными волнами, которые наклонены вверх по



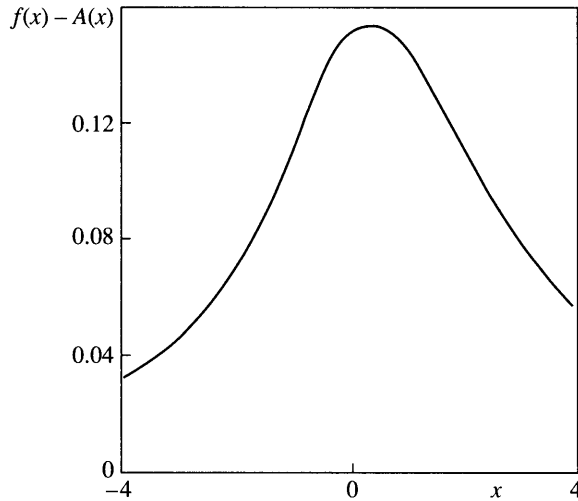
Фиг. 1. Картина изолиний чисел  $w(x, n) = (\gamma + 1)\phi_x - K$  и  $K = 0.3, h = 0.35$ . Сплошные линии  $w(x, n) \geq 0$ , пунктирные линии  $w(x, n) < 0$



Фиг. 2. Распределение  $\tau$  (сплошная линия) и  $w(x, 0)$  (пунктирная) на поверхности тела при  $K = 0.3, h = 0.35$

течению. Вытесняющее действие пограничного слоя оказывается таким, что несмотря на существование ударных волн во внешнем потоке распределение давления на поверхности тела оказывается непрерывным. Ножки ударных волн в окрестности пограничного слоя размыты, как это обычно происходит при их падении на пограничный слой [15]. Из расчетов поверхностного трения  $\tau$  (фиг. 2, сплошная линия) следует, что в данном случае отрыва потока не происходит.

В трансзвуковой теории стационарного свободного взаимодействия возмущения во внешней области обуславливаются толщиной вытеснения пограничного слоя в ни-



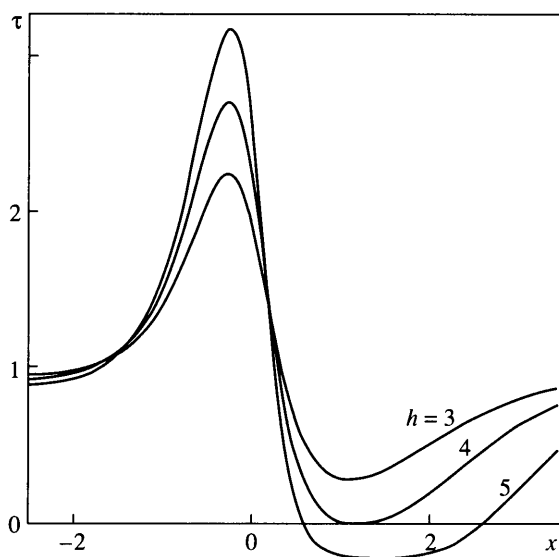
Фиг. 3. Суммарная форма обтекаемой поверхности  $f(x) - A(x)$  в невязком потоке при  $K = 0.3, h = 0.35$

жней пристеночной области и неровностью поверхности в ней. Основная толща пограничного слоя передает эти возмущения без изменения. В результате взаимодействия нижняя граница во внешней области содержит протяженный участок, представляющий из себя гладкий выпуклый профиль. На нем сверхзвуковая зона возникает таким же образом, как при обтекании профиля крыла в трансзвуковом диапазоне скоростей [15]. При трансзвуковом обтекании выпуклых профилей сверхзвуковые зоны, как правило, замыкаются ударными волнами [10, 15]. Только при специально подобранной форме профиля ударная волна отсутствует. Построению безударных профилей в некотором диапазоне изменения числа Маха посвящен обзор [16]. Однако даже небольшие изменения формы профиля или числа Маха набегающего потока в конечном итоге снова приводят к появлению ударной волны [17]. Конечно, могла возникнуть уникальная ситуация, когда толщина вытеснения пограничного слоя принимает в зависимости от значений параметров задачи такую форму, что ударная волна не возникает. Однако численные расчеты в случае выбранной формы бугорка показывают, что такая ситуация не реализуется.

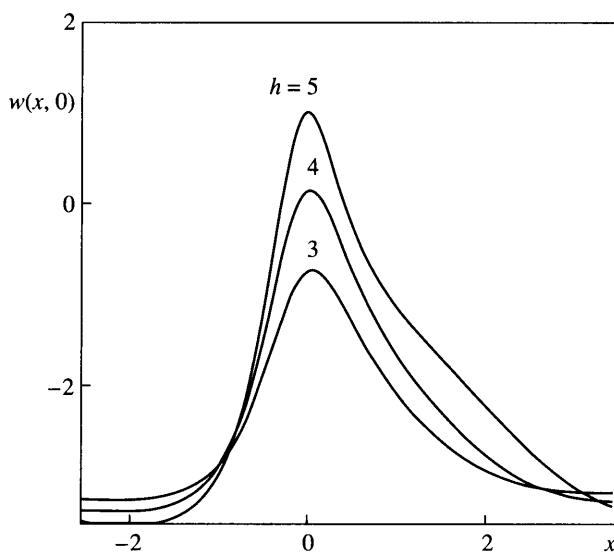
Форма сверхзвуковых зон, рассчитанных в настоящей работе, качественно совпадает с теми, которые были получены в эксперименте [7]. Скорость движения газа за первой ударной волной сверхзвуковая (см. фиг. 1, 2), поэтому за ней расположена еще одна небольшая сверхзвуковая область. Толщина вытеснения в окрестности падения первой ударной волны увеличивается (см. фиг. 3). Ее форма за первой ударной волной такова, что давление в течении понижается, а скорость слегка увеличивается. В конечном итоге эта сверхзвуковая область замыкается второй ударной волной, скорость за которой уже дозвуковая.

По сравнению с экспериментами [7] полученные в работе сверхзвуковые области носят более выраженный двугорбный характер.

При различных значениях трансзвукового параметра подобия и параметра, описывающего высоту неровности наряду со сверхзвуковыми зонами и ударными волнами во внешней потенциальной области, в нижнем вязком подслое пограничного слоя могут возникать локальные отрывные зоны. Расчеты показывают, что они могут существовать как одновременно, так и в отдельности друг от друга. На фиг. 4, 5, при  $K = 3$  показа-



Фиг. 4. Распределение  $\tau$  на поверхности тела при  $K = 3$



Фиг. 5. Распределение  $w(x, 0)$  на поверхности тела при  $K = 3$

ны графики поверхностного трения  $\tau$  и продольной возмущенной скорости на нижней границе внешней палубы  $w(x, 0)$ . Графики поведения  $w(x, 0)$  удобно использовать, так как они дают возможность судить о наличии сверхзвуковых зон без трудоемкого построения изолиний чисел  $-K + (\gamma + 1)\phi_x$ . При  $h = 3$  в течении отсутствуют как сверхзвуковые зоны, так и отрыв в пограничном слое (фиг. 4, 5). При  $h = 4$  в пограничном слое на задней стороне препятствия возникает отрыв и появляется небольшая сверхзвуковая зона. При  $h = 5$  в пограничном слое возникает отрыв, а во внешней потенциальной облас-



ти присутствует сверхзвуковая зона. Картина изолиний чисел  $w(x, n)$  при  $K = 3$ ,  $h = 5$  здесь не приводится, так как имеет выше описанную структуру ударных волн. Можно предположить, что и в случае нестационарного трансзвукового свободного взаимодействия в рамках модели [12], по всей видимости, возникнет подобная ситуация, так как толщина вытеснения будет создавать во внешней потенциальной области профиль с выпуклым участком. В результате его обтекания также должны образовываться сверхзвуковые зоны, замыкающиеся ударными волнами.

**Заключение.** При обтекании малых неровностей трансзвуковым потоком газа в режиме свободного взаимодействия в случае ламинарных пограничных слоев во внешней потенциальной области возникают сверхзвуковые зоны. В рассматриваемом случае они замыкаются двумя ударными волнами, наклоненными в сторону набегающего потока. Численные расчеты показали хорошее качественное совпадение с экспериментальными данными [7], полученными при обтекании симметричного профиля. Такое совпадение говорит о том, что во взаимодействии ударных волн, замыкающих сверхзвуковые зоны, с ламинарным пограничным слоем носит универсальный характер, и это связано с тем, что во внешней потенциальной области в результате влияния толщины вытеснения обтекается профиль с достаточно протяженным выпуклым участком. Однако в случае свободного взаимодействия качественные особенности течения легче изучать. Такое преимущество появляется в результате использования асимптотических методов. Взаимодействие может проводить не только к появлению системы скачков, замыкающих сверхзвуковые зоны, но и к появлению отрыва потока в вязком пристеночном слое.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 01-01-00999).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
2. Stewartson K., Williams P.G. Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.
3. Messiter A.F., Feo A., Melnic R.E. Shock-wave strength for separation of a laminar boundary layer at transonic speeds // AIAA J. 1971. V. 9. № 6. P. 1197–1198.
4. Brilliant H.M., Adamson T.C., Jr. Shock wave boundary-layer interactions in laminar transonic flow // AIAA J. 1974. V. 12. № 3. P. 323–329.
5. Bodonyi R.J., Kluwick A. Supercritical transonic trailing-edge flow // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1982. V. 35. Pt. 2. P. 265–277.
6. Королев Г.Л. Течение в окрестности задней кромки пластины, обтекаемой трансзвуковым потоком вязкого газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. Т. 11. № 3. С. 23–28.
7. Liepmann H.F. The interaction between boundary layer and shock waves in transonic flow // J. Aeronaut. Sci. 1946. V. 13. № 12. P. 623–638.
8. Боголепов В.В., Нейланд В.Я. Исследование локальных возмущений вязких сверхзвуковых течений / Под ред. Струминского В.В. М.: Наука, 1976. С. 104–118.
9. Боголепов В.В. Расчет взаимодействия сверхзвукового пограничного слоя с тонким препятствием // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 6. С. 30–38.
10. Липман Г.В., Рошко А. Элементы газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. С. 518.
11. Коул Дж., Кук Л.Р. Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989. С. 360.
12. Рыжов О.С. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околосзвуковых скоростях внешнего потока // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1091–1094.
13. Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик. В., Королев Г.Л. Асимптотическая теория отрывных течений. М.: Наука, 1987. С. 255.
14. Королев Г.Л. Об одном методе решения задач асимптотической теории взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1987. Т. 27. № 8. С. 1224–1232.

15. *Moulden T.H.* Fundamentals of Transonic Flow. N.Y.: Willey, 1984. С. 332.
16. *Nienwland G.Y., Spee B.M.* Transonic airfoils: recent developments in theory, experiment, and design // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1973. V. 5. P. 119–150.
17. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 208 с.

Москва  
E-mail:gkorolev@hotmail.com

Поступила в редакцию  
30.VII.2001