МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 2003

УДК 532.525.2:532.527

 В. Г. СУДАКОВ, В. В. СЫЧЕВ

ОБ ИСТЕЧЕНИИ СТРУИ ИЗ МАЛОГО ОТВЕРСТИЯ НА ПЛОСКОСТИ

С помощью метода построения сращиваемых асимптотических разложений решается задача об истечении незакрученной осесимметричной ламинарной струи из отверстия на плоскости при больших числах Рейнольдса. Ввиду невозможности непосредственного сращивания главных членов асимптотических разложений для приосевого пограничного слоя и основной области течения решение проблемы достигается путем введения промежуточной области. Решением в приосевой области является решение Шлихтинга [1] для осесимметричной струи в приближении пограничного слоя; в промежуточной области решение получено аналитически; в области основного течения задача сводится к задаче о течении вязкой жидкости, вызванном линией стоков в присутствии поперечной стенки [2].

Ключевые слова: струйные течения, вязкость, автомодельность, конические течения, асимптотическая теория.

Струйные течения имеют большое значение для самых разных отраслей техники. Вместе с тем струйные движения занимают видное место в теоретической и прикладной механике вязкой жидкости. Литература, посвященная им, обширна и разнообразна.

В [3] получено решение уравнений Навье–Стокса для осесимметричной струи без закрутки, возникающей в безграничном пространстве, заполненном несжимаемой жидкостью, если туда поместить точечный источник потока импульса. Это решение относится к классу пространственных конических автомодельных течений. При больших числах Рейнольдса данная задача решена в приближении пограничного слоя [1]. Также представляется интересным случай истечения струи из малого отверстия в вершине конуса. При этом на конусе ставится условие прилипания. В частном случае получается решение задачи о струе, бьющей из малого отверстия в плоской стенке, нормально к последней. Эта задача обсуждается в [4], где указывается, что течение не описывается автомодельным решением в целом, а лишь по отдельности в приосевом пограничном слое и в основной области течения с неизбежным разрывом между ними. При этом в основной области течения задача сводится к задаче о линии стоков, которая моделирует эжекцию струи. Таким образом, непосредственное сращивание главных членов разложения в приосевом пограничном слое и в основной области течения невозможно. Это обстоятельство по мнению авторов [4] является парадоксальным. В действительности это связано с отсутствием области перекрытия этих двух асимптотических разложений.

В данной работе введена промежуточная область, которая обеспечивает возможность сращивания всех асимптотических разложений в главных членах. В этой промежуточной области решение находится аналитически. Таким образом, найдено автомодельное во всей области течения решение задачи об истечении струи из малого отверстия на плоскости. Течение во всех областях является вязким, поэтому пограничный слой вблизи твердой поверхности не образуется. Для основной области течения, где задача сводится к задаче о линии стоков, на плоскости ставится условие прилипания жидкости, т.е. условие равенства нулю всех компонент скорости.

1. Рассмотрим стационарное осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости под действием точечного источника потока импульса J. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z, где линия $r = 0$ совпадает с осью струи, которая перпендикулярна твердой поверхности $z = 0$; u, w – радиальная и осевая компоненты скорости, p, ρ, ν – давление, плотность и кинематический коэффициент вязкости. Уравнения Навье–Стокса в таком случае могут быть записаны в виде

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0$$

При этом на оси симметрии $r = 0$ задаются регулярные граничные условия, а на твердой поверхности ставится условие прилипания жидкости, т.е. условие равенства нулю всех составляющих скорости.

В данной задаче три определяющих параметра:

$$J = 2\pi\rho\int_0^\infty w^2 r dr,\ \rho,\ \nu,$$

из которых нельзя составить комбинацию с размерностью длины. Поэтому рассматриваемая задача может иметь только автомодельное решение. Число Рейнольдса задачи $\mathrm{Re} = K/\nu$, $K = \sqrt{J/\rho}$.

Функция тока ψ определяется соотношениями

$$u = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Решение Шлихтинга [1] для осимметричной струи в рамках пограничного слоя выглядит следующим образом:

$$u = \left(\frac{K}{z}\right)U(\xi), \quad U(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(\xi)}{\xi}$$

$$w = \left(\frac{K}{z}\right)\mathrm{Re}\,W(\xi), \quad W(\xi) = \frac{f'(\xi)}{\xi}, \quad \psi = \nu z f(\xi) \tag{1.2}$$

$$\frac{p - p_\infty}{\rho} = -\left(\frac{K}{z}\right)^2[\mathrm{Re}^2 P_{01}(\xi) + P_{02}(\xi)], \quad \xi = \mathrm{Re}\frac{r}{z}$$

Подставив (1.2) в (1.1), можно найти

$$f = \frac{\alpha^2\xi^2}{1 + \alpha^2\xi^2/4}, \quad \alpha^2 = \frac{3}{16\pi}, \quad P_{01} = 0, \quad P_{02} = \frac{2\alpha^2(\alpha^2\xi^2/4 - 1)}{(1 + \alpha^2\xi^2/4)^2}$$

Выражения для безразмерных скоростей в приосевой области будут

$$U(\xi) = \frac{\alpha^2\xi(1 - \alpha^2\xi^2/4)}{(1 + \alpha^2\xi^2/4)^2}, \quad W(\xi) = \frac{2\alpha^2}{(1 + \alpha^2\xi^2/4)^2} \tag{1.3}$$

При этом выполняются граничные условия

$$U(0) = 0, \quad W(0) = 2\alpha^2, \quad (\xi = 0)$$
$$U \to -\frac{4}{\xi}, \quad W \to \frac{32}{\alpha^2\xi^4}, \quad P_{02} \to \frac{8}{\xi^2} \ (\xi \to \infty) \tag{1.4}$$

2. Сращивание решения Шлихтинга (1.3) для приосевой области с асимптотикой (1.4) и решения для основной области течения, где $r/z \sim 1$, в главных членах невозможно. Поэтому необходимо введение промежуточной области.

Пусть система соотношений для области $\xi = O(1)$ перестает быть справедливой при $\xi \sim \mathrm{Re}^{1-\beta}$. Тогда можно ввести в рассмотрение новую переменную

$$\eta = \mathrm{Re}^{\beta}\frac{r}{z}, \quad 0 < \beta < 1$$

На основе условий сращивания с главными членами разложения в приосевой области при $\xi \to \infty$ (1.4):

$$u = \frac{K}{z}\mathrm{Re}^{\beta-1}U_1(\eta), \quad w = \frac{K}{z}\mathrm{Re}^{4\beta-3}W_1(\eta)$$
$$\frac{p - p_\infty}{\rho} = -\left(\frac{K}{z}\right)^2\mathrm{Re}^{2\beta-2}P_1(\eta) \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в систему уравнений Навье–Стокса (1.1), для главных членов получается система уравнений в области $\eta = O(1)$:

$$\eta^2 U_1 U_1' = \eta^2 P_1' + \eta^2 U_1'' + \eta U_1' - U_1$$
$$\eta U_1 W_1' = -2\eta P_1 - \eta^2 P_1' + \eta W_1'' + W', \quad \eta U_1' + U_1 = 0 \tag{2.2}$$

Решение системы (2.2) имеет вид

$$U_1(\eta) = -\frac{4}{\eta}, \quad W_1(\eta) = \frac{32}{\alpha^2}\frac{1}{\eta^4} + \gamma, \quad P_1(\eta) = \frac{8}{\eta^2} \tag{2.3}$$

Для того чтобы в следующей области, где $r/z \sim 1$, осевая и радиальная скорости были одного порядка, необходимо $\gamma \neq 0$ и $\beta = 1/2$. Тогда в промежуточной области асимптотика при $\eta \to \infty$ имеет следующий вид:

$$U_1 \to -\frac{4}{\eta}, \quad W_1 \to \gamma, \quad P_1 \to \frac{8}{\eta^2} \tag{2.4}$$

Граничное условие именно такого вида требуется для разрешения задачи в основной области течения, где $r/z \sim 1$.

3. Течение в основной области, где $r/z \sim 1$, удобнее рассматривать в сферических координатах R, θ, φ, где

$$r = R\sin\theta, \quad z = R\cos\theta$$

$$u = V_R\sin\theta + V_\theta\cos\theta, \quad w = V_R\cos\theta - V_\theta\sin\theta$$

Тогда вблизи оси при $\theta \to 0$ на основании (2.4) имеем

$$V_R \sim -\frac{\nu(4-\gamma)}{R}, \quad V_\theta \sim -\frac{4\nu}{R\sin\theta} \tag{3.1}$$

Таким образом, течение в этой области соответствует течению, вызванному линией стоков, которая расположена перпендикулярно плоскости. При этом на плоскости ставятся условия прилипания, т.е. условие равенства нулю всех составляющих скорости. Задача о линии стоков моделирует эжекцию струи. Она была решена в [2] для различных величин обильности стока. Для величины обильности стока, образующейся в данном случае, решение было указано также в [5]. Эти решения были получены численно.

Система уравнений для этой области, получающаяся с использованием сферических координат, указана, например, в [4]:

$$(1-x^2)y' + 2xy - y^2/2 = C_3 + C_2 x - C_1 x^2$$
$$V_R = -\frac{\nu y'(x)}{R}, \quad V_\theta = -\frac{\nu y(x)}{R\sin\theta}, \quad x = \cos\theta, \quad \psi = \nu R y(x) \tag{3.2}$$

На плоскости в силу условий прилипания при $x = 0$ ($\theta = \pi/2$):

$$y(0) = y'(0) = 0 \tag{3.3}$$

На оси $x = 1$ ($\theta = 0$) на основании (3.1) и (3.2) будут выполняться условия

$$y(1) = 4, \quad y'(1) = 4 - \gamma \tag{3.4}$$

Используя условия (3.3) и (3.4) можно исключить неизвестные постоянные из (3.2), так что

$$(1-x^2)y' + 2xy - y^2/2 = C_1 x(1-x), \quad C_1 = 8 - 4\gamma \tag{3.5}$$

Интегрируя уравнение (3.5) от оси с первым граничным условием из (3.4) численно, как и в [2], можно выбирать параметр γ так, чтобы удовлетворить первому граничному условию (3.3). Так как на оси в точке $x = 1$ имеется особенность, то при интегрировании использовалось разложение функции $y(x)$ при $x \to 1$. Решение этой задачи, указанное в [4], дает значение $C_1 = 15.2894$, что соответствует значению $\gamma = -1.82235$.

Заключение. Рассмотрено стационарное осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости под действием точечного источника потока импульса, расположенного на плоскости. Показано, что при больших числах Рейнольдса течение описывается системой асимптотических разложений, сращивание которых в главных членах требует рассмотрения трех характерных областей, в которых r/z последовательно принимает значения порядка Re^{-1}, $\mathrm{Re}^{-1/2}$, 1. Течение во всех областях является вязким. В первой области, приосевом пограничном слое, решение соответствует решению Шлихтинга [1]. В третьей области, где $r/z = O(1)$, задача соответствует задаче о линии стоков, которая была решена в [2]. Но непосредственное сращивание главных членов разложения в этих областях невозможно. Введение промежуточной области позволяет получить автомодельное решение во всей области течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 00-15-96070).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
2. *Голубинский А.А., Сычев В.В.* Об одном автомодельном решении уравнений Навье–Стокса // Учен. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 6. С. 11–17.
3. *Ландау Л.Д.* Об одном новом точном решении уравнений Навье–Стокса // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43. № 7. С. 299–301.
4. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.
5. *Schneider W.* Flow induced by jets and plumes // J. Fluid Mech. 1981. V. 108. P. 55–65.

Москва

Поступила в редакцию
15.VIII.2002