

УДК 532.516.2:536.24

© 2003 г. И. В. ШЕВЧУК

## ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ОДНОРОДНОМ ОБДУВЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

Получено точное решение задачи теплообмена при натекании однородного воздушного потока на вращающийся диск. Переходом к автомодельным по радиальной координате профилям скорости и температуры задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решенных численно. Рассчитаны числа Нуссельта для значений числа Прандтля, равных 1 и 0.71, при различных отношениях скорости обдува к угловой скорости вращения диска. Найденны границы режима течения, когда теплообмен определяется только закономерностями импактной струи. Проведено сравнение с экспериментами для критической точки.

*Ключевые слова:* теплообмен, пограничный слой, импактная струя, вращающийся диск.

Импактные струи являются высокоэффективным способом нагревания или охлаждения поверхности. В частности, импактные струи применяются во вращающихся дисковых системах для охлаждения торцевых поверхностей роторов газовых турбин.

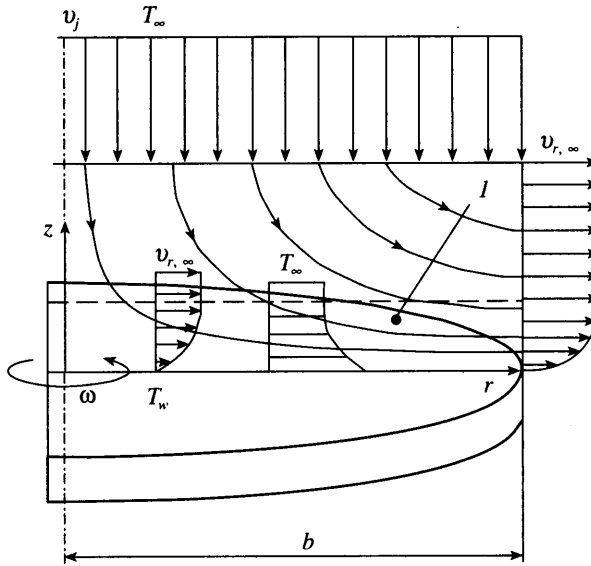
Понимание закономерностей течения и теплообмена реальных струй в усложненных условиях (различные геометрии системы, свойства набегающего потока) базируется, как правило, на результатах теоретического решения задачи в упрощенной постановке.

**1. Предварительные сведения.** Первым предельным случаем, к которому вырождается исследуемая задача, является импактная струя на неподвижном плоском диске. Фундаментальные основы моделирования осесимметричных импактных струй изложены, в частности, в [1–4]. В этих исследованиях рассмотрено теоретическое решение для случая натекания осесимметричного потока с однородным профилем аксиальной скорости на неподвижный диск (фиг. 1).

В случае реальных единичных осесимметричных струй, натекающих перпендикулярно на неподвижный диск диаметром  $d$  [2, 5–7], в зоне удара и разворота струи на диске течение по-прежнему является ламинарным, а его закономерности вблизи критической точки близки случаю однородного обдува поверхности осесимметричным потоком. В обзорной монографии [6] показано, что теоретически полученное решение для числа Нуссельта хорошо согласуется с экспериментальными данными для критической точки.

Вторым предельным случаем, к которому вырождается исследуемая задача, является ламинарное течение и теплообмен свободного вращающегося диска без обдува. Наиболее точное и полное решение уравнений Навье – Стокса и энергии для данной задачи представлено в [8, 9]. Автор [8, 10] с помощью интегрального метода получил приближенное аналитическое решение для числа Нуссельта, хорошо согласующегося с точным решением.

Уравнения Навье – Стокса при ламинарном течении в случае коаксиального обдува вращающегося диска были впервые численно решены в [11]. Экспериментальные данные для числа Нуссельта при коаксиальном обдуве воздухом вращающегося диска представлены в [12–15].



Фиг. 1. Схема при однородном обтекании диска, перпендикулярного потоку;  $l$  – пограничный слой

Цель настоящего исследования – составление базы данных для точного численного решения уравнений Навье – Стокса и энергии для задачи, показанной на фиг. 1. Такое решение соответствует реальным условиям течения только в области критической точки. Поэтому сравнение с экспериментами приводится с использованием данных [12, 13], поскольку лишь в этих работах представлены радиальные распределения числа Нуссельта, включающие и область критической точки.

**2. Математическая модель задачи.** В [1–3] показано, что в рассматриваемом случае на диске формируется ламинарный пограничный слой постоянной толщины, а радиальная  $v_{r, \infty}$  и аксиальная  $v_{z, \infty}$  компоненты скорости на границе пограничного слоя описываются соотношениями

$$v_{r, \infty} = ar, \quad v_{z, \infty} = -2az \tag{2.1}$$

Здесь  $a$  – градиент радиальной скорости на границе пограничного слоя (константа);  $r, z$  – радиальная и осевая координаты. При потенциальном обтекании диска радиуса  $b$  перпендикулярным к его поверхности однородным потоком константа  $a$  вычисляется по выражению [4]

$$a = \frac{2V}{\pi b}, \quad A = \frac{4}{\pi} \tag{2.2}$$

где  $A = ad_j/V_j$  – безразмерный градиент радиальной скорости на границе пограничного слоя;  $d_j$  – диаметр сопла; величина  $V_j$  обозначает аксиальную скорость потока на бесконечности или на выходе из сопла; индекс "j" относится к параметрам импактной струи. Во втором из выражений (2.2) учтено, что однородный поток подвергает обдуву весь диск, вследствие чего в определении параметра  $a$  принято  $d_j = d$ , где  $d = 2b$  – диаметр диска.

При обдуве диска импактной струей с  $d_j < d$  в окрестности критической точки  $v_{r, \infty}$  следует первому из соотношений (2.1), параметр  $a$  является постоянным, а затем

уменьшается до тех пор, пока величина  $v_{r,\infty}$  не достигнет своего максимума. После этого  $v_{r,\infty}$  начинает убывать, что означает начало области пристенной струи, которая в настоящей работе не рассматривается.

Для реальных осесимметричных струй существенную роль играют соотношение диаметров струи и диска  $d_j/d$  и отношение расстояния от сопла до поверхности  $h_j$  к диаметру струи  $h_j/d_j$ . Величина  $A$  для реальных струй отличается от значений  $4/\pi$  и зависит от параметра  $h_j/d_j$  (а также профиля скорости и степени турбулентности потока). Экспериментальные данные о зависимости  $A$  от  $h_j/d_j$  достаточно противоречивы; однако физически обоснованным представляется вывод авторов [5, 7] о том, что величина  $A$  и коэффициент теплоотдачи в критической точке возрастают с уменьшением  $h_j/d_j$  при достаточно высоких числах  $Re_j$ . Для ламинарного потока с однородным профилем скорости на срезе сопла в диапазоне  $h_j/d_j = 2, \dots, 6$  предложена эмпирическая зависимость [7]

$$A = 1.5(h_j/d_j)^{-0.22} \quad (2.3)$$

Число Нуссельта для неподвижного диска имеет вид [2, 3]

$$Nu_d = K_1 Ra_a^{1/2} \quad (2.4)$$

$$Nu_d = q_w d / [\lambda (T_w - T_\infty)]; \quad Re_a = ad^2/\nu$$

где  $Re_a$  – число Рейнольдса радиального течения;  $q_w$  – тепловой поток на стенке;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  $T$  – температура; индексы "w" и " $\infty$ " означают условия на стенке и на внешней границе пограничного слоя соответственно.

В уравнении (2.4) константа  $K_1$  учитывает влияние неизотермичности диска и числа Прандтля  $Pr = \mu c_p / \lambda$ , где  $c_p$  – теплоемкость при постоянном давлении;  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости. При  $T_w = \text{const}$

$$Nu_d = 0.763 Re_a^{1/2} Pr^{0.4} \quad (2.5)$$

При однородном обдуве и  $d_j = d$

$$Ra_a = Re_j A \quad (2.6)$$

где  $Re_j = V_j d_j / \nu$  – число Рейнольдса, построенное по скорости обдува поверхности. С учетом (2.6) величина числа  $Nu$  в критической точке и ее окрестности при  $T_w = \text{const}$  вычисляется по скорректированному выражению (2.5)

$$Nu_d = 0.763 Re_j^{1/2} Pr^{0.4} A^{1/2}$$

Уравнение энергии для данной задачи решается при граничном условии [8, 9]

$$\Delta T' = x^{n*} \quad (2.7)$$

где  $\Delta T = T_w - T_\infty$  – разность температур стенки и внешнего потока;  $\Delta T' = \Delta T / \Delta T_{x=1}$  – безразмерная разность температур;  $x = r/b$ .

В предельном случае вращающегося диска без обдува число Нуссельта рассчитывается по соотношению

$$Nu_d = K_1 Re_{\omega d}^{1/2} \quad (2.8)$$

где  $Re_{\omega d} = \omega d^2 / \nu$  – вращательное число Рейнольдса, построенное по диаметру диска;  $\omega$  – угловая скорость вращения.

Уравнения Навье – Стокса и энергии для осесимметричного течения в цилиндрических координатах приведены в [2, 4]. Точное численное решение таких уравнений в случае коаксиального обдува вращающегося диска (фиг. 1) возможно с использованием замены переменных

$$\begin{aligned} v_r &= (a + \omega)rF(\zeta), & v_z &= \sqrt{(a + \omega)\nu}H(\zeta), & v_\varphi &= (a + \omega)rG(\zeta) \\ p &= -\rho\nu\omega P(\zeta), & \Theta &= \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, & \zeta &= z\sqrt{\omega\frac{\kappa + 1}{\nu}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $v_r, v_\varphi, v_z$  – радиальная, тангенциальная и осевая скорости;  $\rho$  – плотность;  $p$  – статическое давление;  $\kappa = a/\omega$ .

В [2, 4, 9, 11, 16] показано, что безразмерные профили температуры, скорости и давления в виде (2.9) являются автомодельными по координате  $r$ , причем в [11] получены соотношения (2.9) с использованием формализованного аппарата групп Ли. В результате постановка задачи сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} F^2 - G^2 + FH &= F'' + \frac{\kappa^2}{(1 + \kappa)^2} \\ 2FG + G'H &= G'', & HH' &= P' + H'', & 2F + H' &= 0 \\ \Theta'' - \text{Pr}(n_*F\Theta + H\Theta') &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Преобразованные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \zeta = 0: & F = H = 0, & G &= \frac{1}{1 + \kappa}, & \Theta &= 1 \\ \zeta \rightarrow \infty: & G = 0, & F &= \frac{\kappa}{1 + \kappa}, & H &\rightarrow \text{const}, & \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

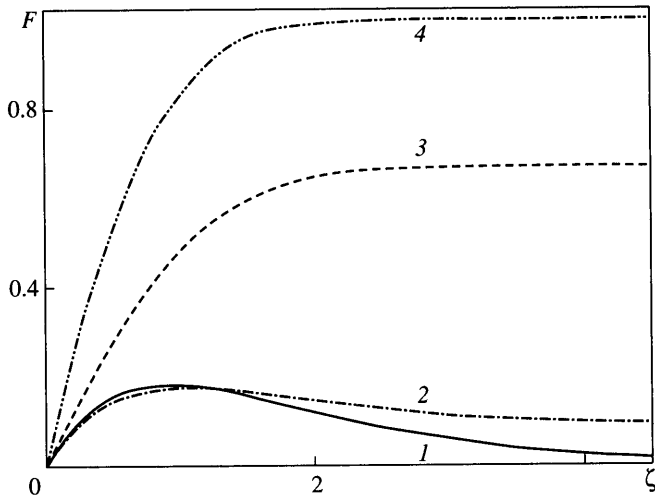
Число Нуссельта вычисляется по соотношению

$$\text{Nu}_d = K_1(\text{Re}_{\omega d} + \text{Re}_a)^{1/2}, \quad K_1 = -\Theta'_\zeta = 0 \quad (2.12)$$

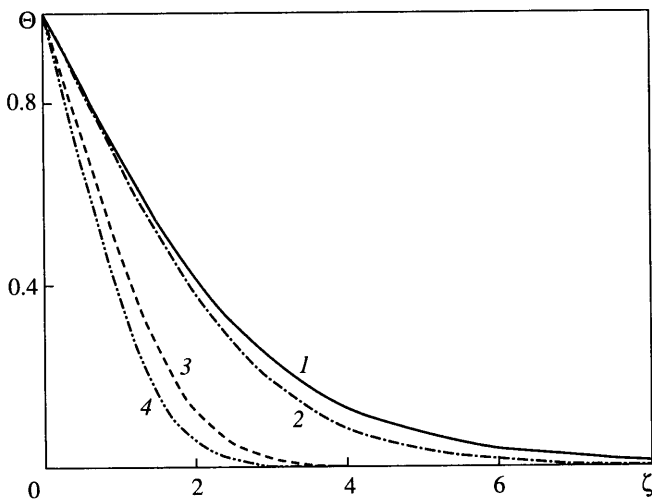
которое является обобщением соотношений (2.4) и (2.8).

При  $\omega \rightarrow 0$  (при  $\kappa \rightarrow \infty$ ) система (2.7), (2.10)–(2.12) сводится к уравнениям для осесимметричного обдува неподвижной поверхности [2, 3]. При  $a \rightarrow 0$  и конечной величине  $\omega$  система (2.10)–(2.12) вырождается к случаю вращения диска в неограниченном пространстве [2, 4, 8–10, 16].

**3. Результаты расчетов и сравнение с экспериментами.** Численное решение уравнений движения и энергии (2.10)–(2.12) выполнялось с помощью программы Mathcad. На фиг. 2 и 3 представлены безразмерные профили радиальной составляющей скорости  $F$  и температуры  $\Theta$ . Профили температуры качественно подобны друг другу, тогда как профили радиальной скорости изменяют свой вид от профиля типа пристенной струи, характерного для свободного диска, до профилей пограничного слоя (уже при  $\kappa > 0.5$ ). Эта качественная перестройка профилей радиальной скорости и определяет резкое изменение режимов теплообмена вращающегося диска при обдуве, описанное ниже. Профили тангенциальной и аксиальной скоростей не меняют характера своего поведения. Поэтому эти профили, описанные в [4, 11], здесь не приводятся. Обращает на себя внимание существенное уменьшение толщины пограничного слоя с ростом параметра  $\kappa$  и одновременное резкое увеличение тангенциальных касательных напряжений на стенке. Величины производных радиальной и тангенциальной скоростей (по координате  $\zeta$ ) и



Фиг. 2. Безразмерные профили радиальной скорости: 1 –  $\kappa = 0$ ; 2 – 0.1; 3 – 2; 4 – 4000



Фиг. 3. Безразмерные профили температуры для  $Pr = 0.71$  (воздух) и  $n_* = 0$ : 1 –  $\kappa = 0$ ; 2 – 0.1; 3 – 2; 4 – 4000

относительных тангенциальных напряжений трения на стенке приведены в табл. 1 (индекс "0" означает условия для свободного диска).

Результаты расчета коэффициента пропорциональности  $K_1$  в формуле для числа Нуссельта (2.12) показаны в табл. 2, 3 для различных значений числа  $Pr$  и параметров  $\kappa$  и  $n_*$ . При  $\kappa \rightarrow \infty$  величина  $K_1$  для случая  $n_* = 0$  (или  $T_w = \text{const}$ ) практически соответствует уравнению (2.5), а при  $\kappa = 0$  данные табл. 2, 3 совпадают с результатами [8, 9].

Константа  $K_1$  существенно возрастает с увеличением параметра  $\kappa$ . Выражение для числа Нуссельта (2.12) можно преобразовать таким образом

$$Nu_d = K_1(1 + \kappa^{-1})^{1/2} Re_a^{1/2} \quad (3.1)$$

Таблица 1

$\kappa$	$\alpha = -F'_w/G'_w$	$\tau_{w\varphi}/\tau_{w\varphi 0}$	$F'_w$	$-G'_w$
0.0	0.8284	1.0	0.5102	0.6159
0.1	0.8127	1.0438	0.4529	0.5573
0.2	0.8172	1.1124	0.4259	0.5212
0.4	0.8939	1.2834	0.4266	0.4772
0.6	1.0365	1.4642	0.4619	0.4456
0.8	1.2167	1.6383	0.5084	0.4179
1.0	1.4180	1.8022	0.5565	0.3924
1.5	1.9664	2.1692	0.6646	0.3380
2.0	2.5440	2.4888	0.7505	0.2950
3.0	3.7312	3.0338	0.8715	0.2336
4.0	4.9349	3.4972	0.9508	0.1927
5.0	6.1454	3.9070	1.0062	0.1637
6.0	7.3593	4.2781	1.0470	0.1423
8.0	9.7922	4.9378	1.1030	0.1126
10.0	12.229	5.5195	1.1395	0.0932
50	61.043	12.338	1.2736	0.0209
100	122.08	17.448	1.2925	0.0106
$4 \cdot 10^3$	4883.1	110.35	1.3114	0.00027

Таблица 2

$\kappa$	$n_* = -2$	$n_* = -1.5$	$n_* = -1$	$n_* = 0$	$n_* = 1$	$n_* = 2$	$n_* = 3$	$n_* = 4$
0.0	0.0	0.1305	0.2352	0.3963	0.5180	0.6159	0.6982	0.7693
0.1	0.0	0.1414	0.2483	0.4055	0.5209	0.6130	0.6901	0.7568
0.2	0.0	0.1542	0.2652	0.4227	0.5360	0.6254	0.7001	0.7647
0.3	0.0	0.1663	0.2821	0.4426	0.5562	0.6453	0.7195	0.7836
0.4	0.0	0.1771	0.2978	0.4626	0.5779	0.6681	0.7428	0.8073
0.5	0.0	0.1867	0.3121	0.4815	0.5993	0.6910	0.7670	0.8324
0.6	0.0	0.1950	0.3248	0.4989	0.6194	0.7129	0.7903	0.8569
0.7	0.0	0.2023	0.3361	0.5147	0.6379	0.7334	0.8123	0.8801
0.8	0.0	0.2088	0.3462	0.5290	0.6548	0.7521	0.8325	0.9016
0.9	0.0	0.2145	0.3552	0.5419	0.6701	0.7693	0.8511	0.9214
1.0	0.0	0.2196	0.3633	0.5536	0.6840	0.7849	0.8681	0.9395
1.5	0.0	0.2385	0.3935	0.5977	0.7373	0.8450	0.9337	1.0099
2.0	0.0	0.2506	0.4130	0.6268	0.7726	0.8850	0.9776	1.0571
3.0	0.0	0.2652	0.4368	0.6622	0.8159	0.9343	1.0318	1.1154
4.0	0.0	0.2737	0.4506	0.6830	0.8413	0.9633	1.0637	1.1499
5.0	0.0	0.2792	0.4597	0.6966	0.8580	0.9824	1.0848	1.1726
6.0	0.0	0.2831	0.4661	0.7063	0.8699	0.9959	1.0997	1.1887
8.0	0.0	0.2883	0.4745	0.7190	0.8855	1.0138	1.1194	1.2099
10	0.0	0.2915	0.4798	0.7270	0.8953	1.0250	1.1318	1.2233
50	0.0	0.3026	0.4981	0.7547	0.9295	1.0641	1.1749	1.2699
4000	0.0	0.3056	0.5030	0.7621	0.9386	1.0745	1.1864	1.2824

Таблица 3

$\kappa$	$n_* = -2$	$n_* = -1.5$	$n_* = -1$	$n_* = 0$	$n_* = 1$	$n_* = 2$	$n_* = 3$	$n_* = 4$
0.0	0.0	0.1035	0.1893	0.3259	0.4319	0.5185	0.5918	0.6555
0.1	0.0	0.1174	0.2078	0.3429	0.4436	0.5246	0.5927	0.6519
0.2	0.0	0.1306	0.2258	0.3626	0.4617	0.5405	0.6065	0.6637
0.3	0.0	0.1424	0.2425	0.3826	0.4825	0.5612	0.6269	0.6836
0.4	0.0	0.1524	0.2573	0.4018	0.5035	0.5833	0.6496	0.7068
0.5	0.0	0.1612	0.2705	0.4194	0.5236	0.6049	0.6723	0.7305
0.6	0.0	0.1687	0.2821	0.4354	0.5421	0.6252	0.6940	0.7532
0.7	0.0	0.1752	0.2922	0.4498	0.5590	0.6439	0.7141	0.7745
0.8	0.0	0.1809	0.3013	0.4627	0.5743	0.6609	0.7325	0.7941
0.9	0.0	0.186	0.3093	0.4743	0.5882	0.6764	0.7493	0.8120
1.0	0.0	0.1905	0.3165	0.4847	0.6007	0.6905	0.7646	0.8283
1.5	0.0	0.2071	0.3432	0.5241	0.6483	0.7442	0.8234	0.8914
2.0	0.0	0.2177	0.3604	0.5498	0.6796	0.7798	0.8625	0.9334
3.0	0.0	0.2304	0.3812	0.5811	0.7179	0.8235	0.9106	0.9853
4.0	0.0	0.2378	0.3934	0.5994	0.7404	0.8492	0.9389	1.0158
5.0	0.0	0.2426	0.4013	0.6114	0.7551	0.8661	0.9575	1.0359
6.0	0.0	0.2461	0.4069	0.6198	0.7656	0.878	0.9707	1.0502
8.0	0.0	0.2505	0.4143	0.631	0.7793	0.8938	0.9881	1.069
10	0.0	0.2533	0.4189	0.6381	0.788	0.9037	0.9991	1.0808
50	0.0	0.2630	0.4349	0.6624	0.8181	0.9382	1.0372	1.122
1000	0.0	0.2654	0.4390	0.6687	0.8258	0.9471	1.0469	1.1331

Величины произведения  $K_{1*} = K_1(1 + \kappa^{-1})^{1/2}$  представлены в табл. 4, 5. Параметр  $K_{1*}$  является консервативным и практически постоянным при  $\kappa = 1.5, \dots, \infty$  для любых чисел Прандтля и значений  $n_*$ . Это является свидетельством того, что при превышении параметром  $\kappa$  некоторого порогового значения теплообмен при обдуве вращающегося диска определяется только закономерностями импактной струи и не зависит от скорости вращения. Таким образом, в случае обдува импактной струей вращение диска вносит свой вклад в увеличение теплообмена при  $Re_d = idem$  лишь при значениях  $\kappa$ , меньших вышеупомянутых пороговых величин.

Режим, когда закономерности импактной струи оказывают преимущественное влияние на течение около вращающегося диска [17], наступает при условии

$$\frac{Re_j}{Re_{rj}} = \frac{V_j d_j}{\omega r_i^2} > 0.125 \quad (3.2)$$

$$\kappa > 0.125 A \left( \frac{r_j}{d_j} \right)^2 \quad (3.3)$$

где  $Re_{r_i} = \omega r_i^2 / \nu$  – вращательное число Рейнольдса, построенное по радиусу натекания  $r_i$  при некоаксиальном обдуве.

Этот критерий теряет смысл при  $r_i = 0$ . Однако если заменить величину  $r_i$  на  $b$  (так как опыты [17] были проведены для струй, достаточно удаленных от оси вращения), то условие (3.3) преобразуется к виду

$$\kappa > 0.03125 A \left( \frac{d}{d_j} \right)^2 \quad (3.4)$$

Таблица 4

$\kappa$	$n_* = -2$	$n_* = -1.5$	$n_* = -1$	$n_* = 0$	$n_* = 1$	$n_* = 2$	$n_* = 3$	$n_* = 4$
0.0	0.0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0.1	0.0	0.4689	0.8234	1.3447	1.7278	2.0330	2.2887	2.5100
0.2	0.0	0.3777	0.6495	1.0355	1.3128	1.532	1.7149	1.8731
0.4	0.0	0.3314	0.5572	0.8654	1.0812	1.2498	1.3897	1.5103
0.5	0.0	0.3233	0.5405	0.8340	1.0380	1.1968	1.3284	1.4417
0.6	0.0	0.3184	0.5304	0.8147	1.0114	1.1642	1.2906	1.3993
0.8	0.0	0.3132	0.5193	0.7935	0.9821	1.1282	1.2488	1.3524
1.0	0.0	0.3106	0.5137	0.7829	0.9674	1.1100	1.2277	1.3287
1.5	0.0	0.3079	0.5080	0.7717	0.9519	1.0909	1.2055	1.3038
2.0	0.0	0.3069	0.5059	0.7676	0.9462	1.0839	1.1973	1.2946
3.0	0.0	0.3062	0.5043	0.7646	0.9421	1.0788	1.1914	1.2880
4.0	0.0	0.3060	0.5038	0.7636	0.9406	1.0770	1.1893	1.2856
5.0	0.0	0.3059	0.5035	0.7631	0.9399	1.0762	1.1883	1.2845
6.0	0.0	0.3058	0.5034	0.7628	0.9396	1.0757	1.1878	1.2839
8.0	0.0	0.3057	0.5033	0.7626	0.9392	1.0753	1.1873	1.2833
10	0.0	0.3057	0.5032	0.7624	0.9390	1.0750	1.1870	1.2830
50	0.0	0.3057	0.5031	0.7622	0.9387	1.0747	1.1866	1.2825

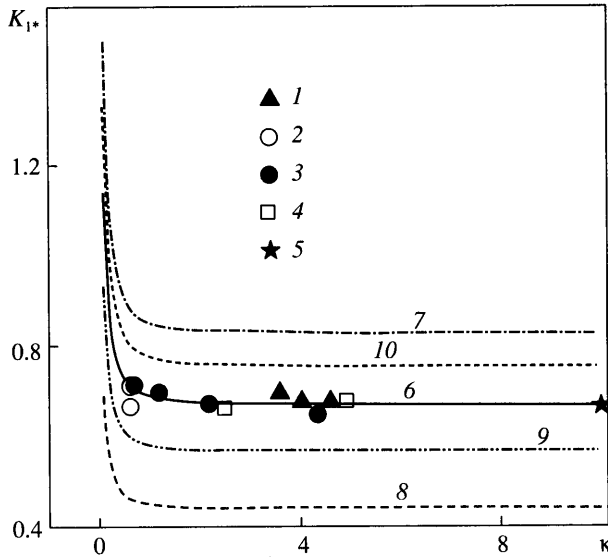
Таблица 5

$\kappa$	$n_* = -2$	$n_* = -1.5$	$n_* = -1$	$n_* = 0$	$n_* = 1$	$n_* = 2$	$n_* = 3$	$n_* = 4$
0.0	0.0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0.1	0.0	0.3896	0.6891	1.1373	1.4714	1.7398	1.9657	2.1620
0.2	0.0	0.3199	0.5531	0.8881	1.1310	1.3240	1.4856	1.6257
0.4	0.0	0.2850	0.4813	0.7516	0.9420	1.0912	1.2153	1.3223
0.5	0.0	0.2793	0.4685	0.7265	0.9069	1.0477	1.1645	1.2652
0.6	0.0	0.2755	0.4606	0.7110	0.8853	1.0209	1.1333	1.2300
0.8	0.0	0.2713	0.4519	0.6941	0.8615	0.9914	1.0988	1.1911
1.0	0.0	0.2694	0.4476	0.6855	0.8495	0.9765	1.0813	1.1714
1.5	0.0	0.2674	0.4431	0.6766	0.8369	0.9608	1.063	1.1508
2.0	0.0	0.2666	0.4414	0.6733	0.8323	0.9551	1.0563	1.1432
3.0	0.0	0.2661	0.4402	0.6709	0.829	0.9509	1.0514	1.1377
4.0	0.0	0.2659	0.4398	0.6701	0.8278	0.9495	1.0497	1.1357
5.0	0.0	0.2658	0.4396	0.6697	0.8272	0.9488	1.0489	1.1348
6.0	0.0	0.2658	0.4395	0.6695	0.8269	0.9484	1.0485	1.1343
8.0	0.0	0.2657	0.4394	0.6693	0.8266	0.948	1.048	1.1338
10.0	0.0	0.2657	0.4393	0.6692	0.8265	0.9478	1.0478	1.1336
50	0.0	0.2656	0.4393	0.6690	0.8262	0.9475	1.0475	1.1332

В соответствии с зависимостью (2.3), величина  $A$  изменяется в экспериментах [12, 13] в диапазоне  $A = 1.0-1.29$ . Тогда применительно к этим данным (где  $d_j/d = 0.09$ ) режим преимущественного влияния импактной струи при коаксиальном обдуве наступает по (3.4) при  $\kappa > (3.86, \dots, 5)$ . Учитывая тот факт, что зависимость (3.2) получена для случая некоаксиального обдува, ее согласование с данной оценкой начала режима преимущественного влияния импактной струи является неплохим. Однако полученные результаты являются более точными для случая коаксиального обдува.

При коаксиальном обдуве вращающегося диска из сопла с диаметром  $d_j \ll d$  решение задачи (2.10)–(3.1) справедливо только в зоне натекания струи на диск при  $r \leq d_j/2$ .





Фиг. 4. Влияние параметра  $\kappa$  на константу  $K_{1*}$  при  $Pr = 0.71$ : 1 – эксперименты [12, 13] при  $Re_j = 2.47 \cdot 10^4$ ,  $Re_\phi = 2.14 \cdot 10^5$ ,  $h_j/d_j = 2, 4$  и  $6$ ; 2 –  $Re_j = 6.8 \cdot 10^3$ ,  $Re_\phi = 3.96 \cdot 10^5$ ,  $h_j/d_j = 2, 4$  и  $6$ ; 3 –  $Re_j = 6.8 \cdot 10^3$ ,  $Re_\phi = 5.35 \cdot 10^4, 1.07 \cdot 10^5, 2.0 \cdot 10^5$  и  $3.53 \cdot 10^5$ ,  $h_j/d_j = 2$ ; 4 –  $Re_j = 2.47 \cdot 10^4$ ,  $Re_\phi = 2.0 \cdot 10^3$  и  $3.96 \cdot 10^5$ ,  $h_j/d_j = 2$ ; 5 – эксперименты [6] при  $n_* = 0$  и различных  $Re_j$  и  $h_j/d_j$ ; 6–10 – расчеты при  $n_* = 0, 1, -1, -0.5, 0.5$

Для реальных условий обдува диска импактной струей выражение (3.1) следует переписать в виде

$$Nu_{dj} = K_{1*} Re_j^{1/2} A^{1/2} \quad (3.5)$$

где  $Nu_{dj} = q_w d_j / [\lambda(T_w - T_\infty)]$  – число Нуссельта, построенное по диаметру  $d_j$ .

Экспериментальные данные [12, 13] представлены в виде числа  $Nu_b = q_w b / [\lambda(T_w - T_\infty)]$ . Тогда  $Nu_b = Nu_{dj} \cdot (b/d_j)$ , и для сравнения с [12, 13] зависимость (3.5) принимает окончательный вид

$$Nu_b = K_{1*} Re_j^{1/2} A^{1/2} \left( \frac{b}{d_j} \right) \quad (3.6)$$

Также следует отметить, что поверхность диска в экспериментах [12, 13] в области критической точки была практически изотермической  $n_* = 0$ .

В опытах [12, 13] соблюдалось условие  $d_j/d = 0.09$ , а данные по интенсивности вращения диска характеризовались числом  $Re_\phi = \omega b^2/\nu$ . Используя определение параметра  $A$ , имеем

$$\kappa = \frac{AV_j}{\omega d_j} = A \frac{Re_j}{Re_{\omega j}} \quad (3.7)$$

где  $Re_{\omega j} = \omega d_j^2/\nu$  – вращательное число Рейнольдса, построенное по диаметру сопла.

Тогда  $Re_{\omega j} = Re_\phi b^2/d_j^2 = 0.25 Re_\phi (d/d_j)^2$ .

Параметр  $A$  в соответствии с выражением (2.3) принимает значения 1.29; 1.14 и 1.01 при  $h_j/d_j = 2; 4$  и  $6$  соответственно. Эти значения позволяют добиться хорошего согла-

сования расчетов и экспериментов [12, 13] для чисел Нуссельта при  $Re_j = 2.47 \cdot 10^4$ . При  $Re_j = 6.8 \cdot 10^3$  наблюдается довольно заметный разброс экспериментальных данных, не позволяющий проследить тенденцию уменьшения числа Нуссельта  $Nu_b$  с ростом  $h_j/d_j$ . Наилучшее соответствие с экспериментами при  $Re_j = 6.8 \cdot 10^3$  дает значение  $A = 1.12$ , не зависящее от  $h_j/d_j$ .

Сравнение результатов моделирования с экспериментами показано на фиг. 4 в виде зависимости  $K_{1*} = Nu_b/[Re_j^{1/2} A^{1/2}(b/d_j)]$  (преобразованное выражение (3.6)) от параметра  $\kappa$ , который для экспериментальных условий [12, 13] рассчитывался по формуле (3.7) с учетом вышеупомянутых значений параметра  $A$ . Расчетные и экспериментальные данные хорошо согласуются количественно и качественно, причем опытные данные отчетливо демонстрируют тенденцию возрастания с уменьшением величины  $\kappa$ . Три экспериментальные точки несколько выпадают из общей картины. Этому можно дать следующие объяснения. Завышенное значение константы  $K_{1*}$  при  $Re_j = 2.47 \cdot 10^4$ ,  $Re_\phi = 2.14 \cdot 10^5$  и  $h_j/d_j = 6$  ( $\kappa = 3.6$ ) связано с заниженным значением  $A = 1.01$ , использованным при пересчете числа  $Nu_b$  по формуле (3.7).

Зависимость  $A$  от  $h_j/d_j$  является более слабой по сравнению с формулой (2.3). Заниженное значение  $K_{1*}$  при  $Re_j = 6.8 \cdot 10^3$ ,  $Re_\phi = 5.3 \cdot 10^4$  и  $h_j/d_j = 2$  ( $\kappa = 4.4$ ) объясняется тем, что при пересчете данных при  $Re_j = 6.8 \cdot 10^3$  использовано постоянное значение  $A = 1.12$ . При низких значениях  $Re_j$  вращение может оказывать влияние на  $A$ , поэтому следует определить эмпирически эту зависимость. Наконец, заниженное значение  $K_{1*}$  при  $Re_j = 6.8 \cdot 10^3$ ,  $Re_\phi = 3.96 \cdot 10^5$  и  $h_j/d_j = 4$  ( $\kappa = 0.6$ ) связано с погрешностью экспериментов. Иначе невозможно установить, почему значение числа  $Nu_b$  при  $h_j/d_j = 4$  заметно падает по сравнению со своей величиной при  $h_j/d_j = 2$  и возрастает снова при  $h_j/d_j = 6$  и тех же  $Re_j$  и  $Re_\phi$ . Для уточнения зависимости параметра  $A$  от  $h_j/d_j$ ,  $Re_j$  и  $Re_\phi$  необходимо дополнительное исследование.

**Заключение.** Получено точное численное решение задачи теплообмена при коаксиальном натекании импактной струи на вращающийся диск. Использование автотомельных по радиальной координате профилей скорости и температуры позволило свести задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решенных численно.

Рассчитаны числа Нуссельта для значений числа Прандтля, равных 1 и 0.71, для ряда значений показателя в степенном законе для температурного закона на стенке в диапазоне  $n_* = -2-4$  и отношений скорости обдува к угловой скорости вращения диска  $\kappa = 0-4 \cdot 10^3$ .

Определены границы режима, когда теплообмен определяется только закономерностями импактной струи. Такой режим возникает при  $\kappa = 1.5, \dots, \infty$  для любых чисел  $Pr$  и значений показателя  $n_*$ . Таким образом, при обдуве импактной струей вращение диска вносит вклад в увеличение теплообмена при  $Re_a = \text{idem}$  лишь при значениях  $\kappa$ , меньших пороговых величин.

Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментами [12, 13] в области критической точки. Улучшения согласования "выпадающих" значений можно добиться путем уточнения зависимости параметра  $A$  от  $h_j/d_j$ ,  $Re_j$  и  $Re_\phi$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 535 с.
2. Schlichting H. Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe: G. Braun, 1965. = Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
3. Sebeci T., Bradshaw P. Physical and Computational Aspects of Heat Transfer. N. Y. etc.: Springer, 1984. = Себиси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы. М.: Мир, 1987. 590 с.

4. *Дорфман Л.А.* Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М.: Физматгиз, 1960. 260 с.  
*Dorfman L.A.* Hydrodynamic Resistance and the Heat Loss of Rotating Solids. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1963.
5. *Viskanta R.* Heat transfer to impinging isothermal gas and flame jets // *Experim. Thermal and Fluid Science*. 1993. V. 6. № 2. P. 111–134.
6. *Дыбан Е.П., Мазур А.И.* Конвективный теплообмен при струйном обтекании тел. Киев: Наук. думка, 1982. 302 с.
7. *Брдлик П.М., Савин В.К.* Теплообмен в окрестности критической точки при осесимметричном струйном обтекании плоских поверхностей, расположенных нормально к потоку // *Инж.-физ. журн.* 1966. Т. 10. № 4. С. 423–428.
8. *Шевчук И.В.* Влияние температуры стенки на ламинарный теплообмен вращающегося диска: приближенное аналитическое решение // *Теплофизика высоких температур*. 2001. Т. 39. № 4. С. 682–685.
9. *Шевчук И.В., Авраменко А.А.* Ламинарный теплообмен вращающегося диска: уточнение и расширение базы данных точного численного решения // *Промышленная теплотехника*. 2001. Т. 23. № 1–2. С. 11–14.
10. *Shevchuk I.V.* An improved enthalpy-thickness model for predicting heat transfer of a free rotating disk using an integral method // *Proc. ASME NHTC'01: 35<sup>th</sup> Nat. Heat Transfer Conf.*, Anaheim, California, USA, 2001. Paper NHTC2001–20195. P. 1–8.
11. *Tifford A.N., Chu S.T.* On the flow and temperature fields in forced flow against a rotating disc // *Proc. 2<sup>nd</sup> U. S. Nat. Congr. of Appl. Mech.*, Ann Arbor, Michigan; ASME, 1954. P. 793–800.
12. *Saniei N., Yan X.T.* An experimental study of heat transfer from a disk rotating in an infinite environment including heat transfer enhancement by jet impingement cooling // *Enhanced Heat Transfer*. 2000. V. 7. P. 231–245.
13. *Saniei N., Yan X.T., Schooley W.W.* Local heat transfer characteristics of a rotating disk under jet impingement cooling // *Heat Transfer 1998: Proc. 11<sup>th</sup> Intern. Heat Transfer Conf.*, Kyongju, Korea: Soc. Mech. Engrs, 1998. V. 5. P. 445–450.
14. *Metzger D.E., Bunker R.S., Bosch G.* Transient liquid crystal measurements of local heat transfer on a rotating disk with jet impingement // *Trans. ASME. J. Turbomachinery*. 1991. V. 113. № 1. P. 52–59.
15. *Popiel C.O., Boguslawski L.* Local heat transfer from a rotating disk in an impinging round jet // *Trans. ASME. J. Heat Transfer*. 1986. V. 108. № 2. P. 357–364.
16. *Karman Th. von.* Über laminare und turbulente Reibung // *ZAMM*. 1921. Bd. 1. H. 4. S. 233–252.
17. *Brodersen S., Metzger D.E., Fernando H.J.S.* Flows generated by the impingement of a jet on a rotating surface. P. I. Basic flow patterns // *Trans. ASME. J. Fluids Engineering*. 1996. V. 118. № 1. P. 61–67.

Киев  
E-mail: ivshevch@i.com.ua

Поступила в редакцию  
28.III.2002