

УДК 533.697.4

© 2003 г. Л. Е. СТЕРНИН

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЯГОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СОПЕЛ ПО ПАРАМЕТРАМ В ИХ ВЫХОДНЫХ СЕЧЕНИЯХ

В рамках теории пограничного слоя представлены простые формулы для определения потерь из-за вязкости по заданным параметрам газа в выходном сечении сопла. Исследование выполнено для обычных сопел Лаваля и штыревых сопел. Получено, что для сопел с большими степенями расширения потери из-за вязкости практически не зависят от параметров по выходному сечению сопла, а определяются лишь их значениями на контуре сопла. Исследовано влияние продольной кривизны сопла на эти потери. Показано полное совпадение потерь из-за вязкости, определенных по параметрам в выходном сечении сопла и интегрированием вдоль его контура с учетом продольной кривизны.

Ключевые слова: сопло, вязкость, толщины вытеснения и потери импульса.

Первые научные рекомендации по расчетам потерь из-за вязкости¹ в ракетных соплах были даны в середине 1950-х годов в ряде исследований Д.А. Мельниковым, У.Г. Пирумовым и А.А. Сергиенко, хотя их обобщенная публикация [1] вышла лишь в 1976 г. В [2] установлена необходимость учета влияния двухмерности потока на эти потери. В [3] потери из-за вязкости определялись по параметрам в выходном сечении сопла, но в формулах для их определения присутствовала математически строго не определяемая величина δ – толщина пограничного слоя.

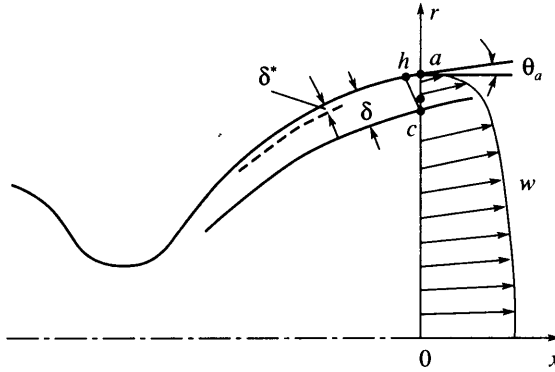
В настоящей работе вместо δ используются строго вычисляемые интегральные параметры пограничного слоя – толщины вытеснения δ^* и потери импульса δ^{**} . Обзор по профилированию сопел и по вариационным методам расчета их контуров дан в [4–6]. Ряд оригинальных расчетов и рекомендаций предложен в [4].

В [7] представлена формула для расчета потерь из-за трения при условии, что контур сопла "утолщается" на величину толщины вытеснения пограничного слоя (формула (8.1) [7]). Практика же проектирования ракетных сопел в большинстве случаев следует по другому пути: контур сопла строится в полном соответствии с расчетом невязкого течения. При этом реальный вязкий поток газа в сопле поджимается на величину δ^* из-за влияния пограничного слоя. Для непоправленного на толщину вытеснения контура вышеуказанную формулу, полученную в [7] для утолщенного контура сопла, здесь использовать неправомерно².

Вопрос об использовании сопел с центральным телом для жидкостных ракетных двигателей исследовался в ряде научных и конструкторских организаций с второй половины 1950-х годов. Обзор представлен в [4] и в [6] (раздел 2.1.2); в настоящее время по этой тематике имеются сотни публикаций. Расчетно-аналитический подход к задаче об оптимизации параметров сопла с центральным телом дан в [8–10]. Отрывные турбулентные течения рассмотрены в [11].

¹ Потери из-за вязкости состоят из потерь из-за трения газа о стенки сопла и потерь (с обратным знаком) из-за вытеснения пограничным слоем невязкого ядра в фиксированном контуре, в результате чего идеальное ядро сжимается.

² Автор работы [7] В.С. Авдеевский с этим полностью согласен.



Фиг. 1. Схема течения в области выходного сечения обычного сопла Лавала; линия ch перпендикулярна контуру сопла

1. Для исследования потерь из-за вязкости газа необходимо вначале рассмотреть преобразование формул для интегральных параметров пограничного слоя, определяющих эти потери.

Площадь потери осевой составляющей импульса F^{**} может быть выражена формулой (фиг. 1)

$$w_c \rho_c u_c F^{**} = \int_c^h (u_c - u) \rho w dF \quad (1.1)$$

где w , u , ρ , F – соответственно модуль скорости, ее осевая составляющая, плотность среды и площадь. Ниже различием точек h и a пренебрегается из-за малости угла θ_a и, как показывает приводимый ниже анализ, из-за крайне слабого влияния интеграла в (1.1) на тяговые характеристики сопел. Индекс “с” для обычного сопла Лавала соответствует внешней условной границе пограничного слоя. Для штыревого сопла внешние границы пограничных слоев отмечены точками c и n (фиг. 2).

Толщина потери импульса $\delta^{**} = F^{**}/(2\pi r)^{v-1}$, где $v = 1.2$ – для плоского и осесимметричного течений соответственно. Пусть средняя по расходу $\dot{m}$ осевая скорость

$$\langle u \rangle = \dot{m}^{-1} \int_0^a u dm, \quad \langle u \rangle = \dot{m}^{-1} \int_{acnb} u dm \text{ для обычного и штыревого сопел соответственно.}$$

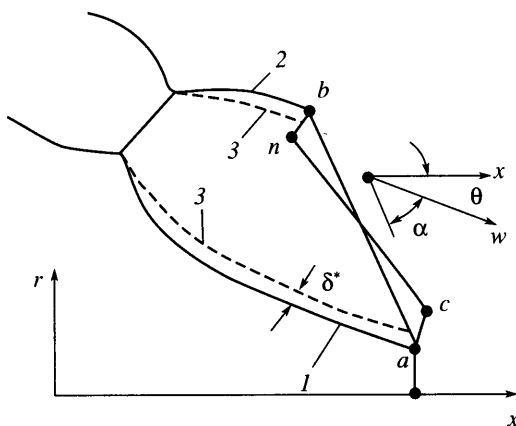
Для штыревого сопла можно принять

$$\bar{\delta}_a^{**} = \frac{\delta_a^{**}}{r_a}, \quad \bar{\delta}_b^{**} = \frac{\delta_b^{**}}{r_b}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_c},$$

$$\bar{r} = \frac{r}{r_b}, \quad \bar{F} = \frac{F}{F_b}, \quad \bar{w} = \frac{w}{w_c}, \quad u = \frac{u}{u_c}, \quad \eta = \frac{\dot{m}}{\rho_c u_c F_b},$$

$$\bar{\delta}_\Sigma^{**} = \bar{r}_a^v \bar{\delta}_a^{**} + \bar{\rho}_n \bar{u}_n^2 \frac{\cos \theta_a}{\cos \theta_{b_-}} \bar{\delta}_{b_-}^{**}$$

Здесь θ – угол наклона скорости к оси x , $\dot{m}$ – массовый расход через сопло, b_- – индекс параметра в точке b при подходе к ней сверху по потоку.



Фиг. 2. Схема течения в области выходного сечения штыревого сопла: 1 – штырь, 2 – обечайка; 3 – толщины вытеснения; линии bn и ac перпендикулярны контурам обечайки и штыря

Для штыревого сопла из (1.1) можно получить связь между среднemasсовой скоростью и толщиной потери импульса

$$v \cos^{-1} \theta_a \bar{\delta}_{\Sigma}^{**} = \eta(1 - \langle \bar{u} \rangle) + \int_a^b (\bar{u} - 1) d\eta \quad (1.2)$$

Как и для обычного сопла, для штыревого интеграл в (1.2) крайне слабо влияет на тяговые характеристики. Поэтому при его вычислении можно заменить реальное течение на невязкое. При этом вычисление интеграла, входящего в (1.2), легко выполнить, если линия ab является характеристикой двумерных уравнений газовой динамики идеального газа, движущегося в штыревом сопле.

Для обычного сопла Лавала уравнение (1.2) также справедливо, однако здесь $\bar{\delta}_{\Sigma}^{**}$ следует заменить на $\bar{\delta}_a^{**}$, а интегрирование осуществлять по поперечному сечению сопла – от точки O на его оси (линии) симметрии и до точки a на контуре сопла.

В дальнейшем, при расчетах невязкого потока в ядре, точки c и a можно отождествить, и вместо индекса c использовать a . Точка n также заменяется на b (фиг. 2). Ниже вводятся дополнительные обозначения, общие для обычного и штыревого сопел

$$\gamma = \frac{\rho_i w_i (1-s)}{\rho_a w_a \cos \theta_a} = \frac{\Phi_* q(\lambda_i)(1-s)}{q(\lambda_a) \cos \theta_a} \quad (1.3)$$

$$\Psi = v \int_{\sigma}^1 \frac{q(\lambda) t}{q(\lambda_a) \cos \theta_a} \left(\frac{\lambda \cos \theta}{\lambda_a \cos \theta_a} - 1 \right) \bar{r}^{v-1} d\bar{r} \quad (1.4)$$

где для обычного сопла Лавала $s = 0$, $t = \cos \theta$, $\sigma = 0$, а для штыревого сопла: $s = \bar{r}_a^v$, $t = \sin \alpha \sin^{-1}(\alpha - \theta)$, $\sigma = \bar{r}_a$, α – угол Маха, индекс “а” соответствует параметрам газа в концевой точке контура торца штыря или обычного сопла (фиг. 1). Интегрирование, как и в (1.2), в (1.4) осуществляется для обычного сопла Лавала по выходному сечению, нормальному оси (линии), а для штыревого сопла – вдоль характеристики ab ; индекс i

относится к параметрам идеального одномерного потока, $\varphi_* = \dot{m}/\dot{m}_i$ – коэффициент расхода, λ – приведенная скорость, $q(\lambda)$ – известная в газовой динамике "расходная" функция, см., например, [6]. Из соотношений (1.2)–(1.4) следует

$$\langle \bar{u} \rangle = \frac{\eta + \Psi}{\eta} \left(1 - \frac{v}{\eta + \Psi} \bar{\delta}_k^{**} \cos^{-1} \theta_a \right) \quad (1.5)$$

где $k = a$ для обычного и Σ – для штыревого сопла.

Расход через сопло $\dot{m}$ зависит от формы поверхности перехода через скорость звука и толщины вытеснения пограничного слоя в критическом сечении $\bar{\delta}_*^*$ определяющими коэффициент φ_*

Подобно (1.1) в выходном сечении площадь вытеснения F^* для обычного сопла Лаваля (фиг. 1), с точностью до различия точек a и h , выражается формулой

$$\rho_c w_c F^* = \int_c^a (\rho_c w_c - \rho w) dF$$

Аналогично определяется толщина вытеснения и для штыревого сопла, а также и в критических сечениях обычного и штыревого сопел. Отсюда видно, что при достаточно "холодном" пристеночном слое из-за высокой плотности газа вблизи стенки у критического сечения величина F^* может быть либо очень малой, либо даже отрицательной, что и подтверждается расчетами.

Для идеального потока расход $\dot{m}_i$ обычно больше, чем для действительного при вязком течении в сопле. Таким образом, их отношение $\varphi_* = \dot{m}/\dot{m}_i < 1$; при отрицательном значении $\bar{\delta}_*^*$, из-за увеличения площади критического сечения, возможны и случаи, когда $\varphi_* > 1$. В приводимых ниже расчетах принято $\varphi_* = 1$.

Относительное уменьшение скорости потока (применительно к обычному соплу) можно расщепить на ее изменение из-за вязкости и рассеяния

$$\frac{w_c}{w_i} = \frac{w_c - w_{c,i}}{w_i} + \frac{w_{c,i}}{w_i} \quad (1.6)$$

При вытеснении, т.е. при уменьшении относительной площади сечения сверхзвукового потока F/F_* по всему соплу, происходит малое уменьшение скорости потока; вначале оно может быть оценено по одномерной теории и в дальнейшем уточнено

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{1}{M_i^2 - 1} \left(\frac{\Delta F}{F} - \frac{\Delta F_*}{F_*} \right)$$

где F_* – площадь критического сечения, M – число Маха в идеальном одномерном потоке. Из-за двумерности могут быть некоторые отклонения от формулы для $\Delta w/w$; при этом относительное изменение скорости из-за наличия вязкости с учетом двумерности можно представить в виде

$$\frac{w_c - w_{c,i}}{w_{c,i}} = \frac{v \bar{\delta}_k^{**} K \cos \theta_a}{(M_i^2 - 1)}$$

где $w_{c,i}$ – скорость на идеальном контуре (точка h на фиг. 1 или a на фиг. 2), K – поправ-

ка на двухмерность¹, $\bar{\delta}_k^* = \bar{\delta}^*$ – для обычного сопла Лаваля, $\bar{\delta}_k^* = \bar{\delta}_\Sigma^*$ – для штыревого сопла, $\bar{\delta}^* \equiv \bar{\delta}_a^* - \bar{\delta}_*^* \bar{r} \cos \theta_a$, $\bar{\delta}_*^*$ – безразмерная толщина вытеснения в критическом сечении, а θ_a – угол наклона стенки к оси x в концевой точке контура обычного сопла (для штыревого сопла – a или b)

$$\bar{\delta}_\Sigma^* = (1 - \bar{r}_a^v)^{-1} \left(\bar{r}_a^v \bar{\delta}_a^* + \bar{\delta}_{b_-}^* \frac{\cos \theta_a}{\cos \theta_{b_-}} \right) - \frac{F^*}{v F_*^*} \cos \theta_a$$

Обычно $\bar{r}_* \bar{\delta}_*^* \ll \bar{\delta}_a^*$ и не учитывается.

Второе слагаемое (1.6) вычисляется для идеального двухмерного потока: $\varphi \equiv w_{c,i} w_i^{-1}$. Таким образом

$$\frac{w_c}{w_i} = \varphi \left(1 - v \frac{\delta_k^* K \cos \theta_a}{M_i^2 - 1} \right) \quad (1.7)$$

При истечении в пустоту в точке b возникает пучок характеристик (волн разрежения), первая из которых начинается в точке b_- . Однако она приходит на штырь вверх по потоку от точки a , в которую приходит лишь характеристика пучка, начинающаяся в некоторой точке b_+ . Анализ показывает, что при замене линии ab_- на характеристику ab_+ параметры ψ и $\langle u \rangle$ не изменятся. Поэтому далее индекс у b опускается.

Из соотношений (1.5) и (1.7) можно получить относительную среднюю скорость

$$\frac{\langle u \rangle}{w_i} = \frac{(\eta + \psi) \varphi \cos \theta_a}{\eta} \left[1 - \frac{v \bar{\delta}_k^{**}}{(\eta + \psi) \cos \theta_a} - \frac{v \bar{\delta}_k^* K \cos \theta_a}{M_i^2 - 1} \right] \quad (1.8)$$

где для обычного сопла $\bar{\delta}_k^{**} = \bar{\delta}_a^{**}$ а для штыревого – $\bar{\delta}_\Sigma^{**}$.

Кроме осевой составляющей среднемассовой скорости тяговая характеристика сопла определяется и статическим добавком к тяге, выражаемым формулой

$$J = \int_s^1 \frac{p}{p_i} d\bar{F} = \int_s^1 \frac{p - p_i^t}{p_i^t} \frac{p_i^t}{p_i} d\bar{F} + \int_s^1 \frac{p_i^t}{p_i} d\bar{F}$$

где для обычного сопла, как было принято выше, $s = 0$, а для штыревого – $s = \bar{r}_a^v$, p_i^t – идеальное давление в двухмерном потоке; первое слагаемое правой части этого равенства характеризует влияние вязкости и выражается через изменение скорости или $\bar{\delta}^*$ формулой

$$\frac{p - p_i^t}{p_i^t} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2 - 1} v K \cos \theta \bar{\delta}^*$$

а второе – двухмерностью течения. Изменения давления в пограничных слоях по сравнению с давлением в потоке идеального газа, выражающееся этим слагаемым, может быть подобно формуле (1.7) преобразовано во второе слагаемое соотношения

$$\frac{J}{\gamma M_i^2} = (1 - s) \xi \left[\frac{1}{\gamma M_i^2} + \frac{v \bar{\delta}_k^* K \cos \theta_a}{(M_i^2 - 1)} \right], \quad \xi = \frac{1}{1 - s} \int_s^1 \frac{p_i^t}{p_i} d\bar{F} \quad (1.9)$$

¹ Сравнение с двухмерными расчетами показало, что K может меняться в пределах 1.3 – 0.75. Из приводимой ниже формулы (1.12) следует, что с достаточной точностью можно полагать $K = 1$.

Относительные потери удельного импульса I ракетного двигателя в пустоте, обусловленные рассеянием и вязкостью, определяются интегральными параметрами свободной реактивной струи, вытекающей из сопла

$$\zeta_{\Sigma} = 1 - \frac{I}{I_i} = 1 - \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2}\right)^{-1} \left(\frac{\langle u \rangle}{w_i} + \frac{J}{\phi_* \gamma M_i^2 (1-s)} \right) \quad (1.10)$$

Следует отметить, что в формулу (1.10) и последующие не включено влияние торца штыревого сопла, увеличивающее тягу и удельный импульс из-за роста степени расширения сопла, но уменьшающее их коэффициенты. Исследование обтекания торца выходит за пределы настоящего рассмотрения. Оно может быть вычислено, например, по данным [11] и [12]. Оценочные расчеты показывают, что поправки на тягу из-за влияния торца весьма малы.

Подставляя (1.8) и (1.9) в (1.10), окончательно можно получить

$$\zeta_{\Sigma} = 1 - \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2}\right)^{-1} \left\{ \phi \frac{(\eta + \psi)}{\eta} \cos \theta_a \left[1 - \frac{v \bar{\delta}_k^{**}}{(\eta + \psi) \cos \theta_a} - \frac{v \bar{\delta}_k^* K \cos \theta_a}{(M_i^2 - 1)} \right] + \frac{\xi}{\phi_* \gamma M_i^2} + \frac{\xi}{\phi_* (M_i^2 - 1)} v \bar{\delta}_k^* K \cos \theta_a \right\}$$

При отсутствии вязкости ($\delta^* = \delta^{**} \equiv 0$) $\zeta_{\Sigma} = \zeta_i$, т.е. суммарные потери в этом случае отождествляются с потерями из-за рассеяния

$$\zeta_i = 1 - \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2}\right)^{-1} \left[\phi \frac{(\eta + \psi)}{\eta} \cos \theta_a + \frac{\xi}{\phi_* \gamma M_i^2} \right] \quad (1.11)$$

В частности, из этой формулы при $\phi_* = 1$ и равномерно-параллельном течении, т.е. при $\xi = \phi = 1$, $\theta_a = \psi = 0$, следует $\zeta_i = 0$.

Потери из-за вязкости можно получить, вычитая потери из-за рассеяния из суммарных потерь

$$\zeta_v = v \frac{\phi}{\eta} \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2}\right)^{-1} \bar{\delta}_k^{**} \left[1 - \frac{\eta \bar{\delta}_k^* K \cos \theta}{\phi \bar{\delta}_k^{**} M_i^2 - 1} \left(\frac{\xi}{\phi_*} - \frac{\eta + \psi}{\eta} \phi \cos \theta \right) \right] \quad (1.12)$$

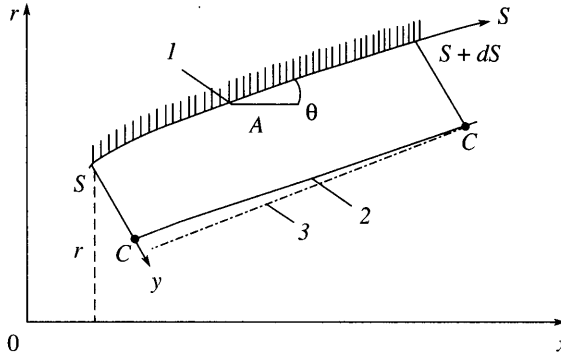
Анализ показывает, что вычитаемым, стоящим в квадратной скобке, при больших M_i в большинстве случаев можно пренебречь. При этом

$$\xi_{v,1} = v \frac{\phi}{\eta} \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2}\right)^{-1} \bar{\delta}_k^{**} \quad (1.13)$$

Для равномерно-параллельного течения в ядре $\phi = \eta = 1$ и из (1.13) для обычных сопел Лаваля следует

$$\xi_{v,0} = v \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2}\right)^{-1} \bar{\delta}_k^{**}$$

Последняя формула широко использовалась для обычных ракетных сопел в течение 30 лет – с середины 1950-х годов.



Фиг. 3. К выводу осевой составляющей импульса в элементе A пограничного слоя:
1 – стенка сопла; 2 – граница пограничного слоя; 3 – линия тока газа

Входящий в формулу (1.13) коэффициент φ/η может быть преобразован к форме

$$\frac{\varphi}{\eta} = \frac{\rho_a w_a^2 \cos \theta_a}{\Phi_* \rho_i w_i^2 (1-s)} \quad (1.14)$$

Расчеты показывают, что для обычных сопел Лавала коэффициент φ/η находится в пределах 1.3–1.5.

Ниже приведены результаты расчетов для характерных сопел.

Для сопла Лавала с $\bar{F}_a = 175.6$, $\theta_a = 8.4^\circ$, $\Phi_* = 1$, $\gamma = 1.15$ получено: $\zeta_i = 0.6\%$, $\zeta_v = 1.85\%$,

$\zeta_{v,0} = 1.31\%$, $\varphi = 0.983$, $\eta = 0.70$, $\psi = 0.015$, $\xi = 1.015$, $\bar{\delta}_a^* = 0.005$, $\bar{\delta}_a^{**} = 0.0683$.

Для штыревого сопла с $r_a/r_b = 0.145$, $(F_b - F_a)/F_* = 195$, $\Phi_* = 1$, $\cos \theta_a = 0.9618$, $\cos \theta_b = 0.8738$, $\bar{\rho}_b \bar{w}_b^2 = 4.560$, $\bar{\delta}_a^* = 0.403$, $\bar{\delta}_b^* = 0.0004$, $\bar{\delta}_\Sigma^* = 0.00912$, $\bar{\delta}_a^{**} = 0.3864$, $\bar{\delta}_b^{**} = 0.0011$, $\bar{\delta}_\Sigma^{**} = 0.0126$, $\bar{F}_*^* = 0$, $\xi = 1.822$, $\eta = 0.6275$, $\psi = -0.00274$, $\zeta_v = 3.82\%$.

Во всех случаях $\psi \ll \eta$.

Как видно из результатов расчетов, потери из-за вязкости у штыревых сопел (3.82%) существенно больше, чем у обычных (1.85%), что объясняется большей боковой поверхностью штыревых сопел.

2. Расчет потерь из-за вязкости может осуществляться и путем интегрирования силы трения вдоль стенки сопла с последующим учетом повышения давления на контуре из-за вытеснения потока пограничным слоем. В отличие от метода, изложенного выше, где потери определяются формулой (1.13), этот путь является более сложным, но приводит к тем же результатам, что и первый. Ниже, применительно к осесимметричному соплу Лавала, с одномерным идеальным ядром представлены некоторые аналитические и численные результаты по сопоставлению обоих методов.

Из определения толщин вытеснения и потери импульса можно получить

$$\int_0^{F_\delta} \rho w dF = \rho_c w_c (F_\delta - F^*), \quad \int_0^{F_\delta} \rho w^2 dF = \rho_c w_c^2 (F_\delta - F^* - F^{**}) \quad (2.1)$$

где интегрирование осуществляется вдоль оси y (фиг. 3) от стенки до границы C , в которой условно заканчивается пограничный слой.

Применим закон сохранения проекции на ось симметрии сопла импульса к кольцевому элементу A (фиг. 3), ограниченному стенкой сопла, двумя близкими, нормальными стенке сечениями S и $S + dS$, и границей пограничного слоя CC . Учитывая втекание газа внутрь этого элемента через CC , а также воздействие стенки на поток из-за наличия центробежной силы, определяемой перепадом давления $dp/du = -\rho w^2/R$, в направлении оси y , где радиус кривизны стенки $R = -dS/d\theta$, и используя выражение для центробежной силы и (2.1), можно получить

$$p_S - p_C = -\rho_c w_c^2 (\delta - \delta^* - \delta^{**}) \frac{d\theta}{dS} \quad (2.2)$$

Теперь закон сохранения записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S} \left(\cos \theta \int_0^{F_\delta} \rho w^2 dF \right) - w_c \cos \theta \frac{\partial}{\partial S} \left(\int_0^{F_\delta} \rho w dF \right) = -2\pi r \tau \cos \theta + \\ + F_\delta \rho_c w_c \cos \theta \frac{dw_c}{dS} - 2\pi r \rho_c w_c^2 \sin \theta (\delta - \delta^* - \delta^{**}) \frac{d\theta}{dS} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где δ – толщина пограничного слоя, τ – напряжение сил трения на стенке сопла; как и выше индекс “ c ” придан параметрам на границе пограничного слоя.

После подстановки (2.1) в (2.3), дифференцирования и выполнения упрощений равенство (2.3) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\delta^{**}}{dS} + \delta^{**} \frac{d}{dS} \ln \rho_c w_c^2 r + \delta^* \frac{d}{dS} \ln w_c - \frac{d \ln \cos \theta}{dS} (\delta - \delta^* - \delta^{**}) = \\ = \frac{C_f}{2} + \sin \theta \frac{d\theta}{dS} (\delta - \delta^* - \delta^{**}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Произведя сокращения, переход к $dr = dS \sin \theta$ и безразмерным параметрам $\bar{\delta}^* = \delta^*/r$, $\bar{\delta}^{**} = \delta^{**}/r$, $\bar{r} = r/r_*$, где r_* – радиус критического сечения сопла, а H – формпараметр, можно получить

$$\frac{d\bar{\delta}^{**}}{d\bar{r}} + \bar{\delta}^{**} \left[\frac{d \ln (\rho_c w_c^2 r^2)}{d\bar{r}} + H \frac{d \ln w_c}{d\bar{r}} \right] = \frac{C_f}{2\bar{r} \sin \theta} \quad (2.5)$$

Таким образом, уравнение сохранения осевой составляющей импульса в пограничном слое из-за сокращения последних слагаемых в левой и правой частях (2.4) не содержит производных по углу и выглядит точно так же, как и для пограничного слоя потока, движущего в сопле с прямолинейной образующей.

При этом потери из-за трения на криволинейном контуре, как будет показано ниже, благодаря наличию центробежной силы существенно зависят от кривизны контура.

Для одномерного течения в невязком ядре, если принять в первом приближении, что $\rho_c w_c r^2 = \text{const}$, из (2.5) следует

$$\frac{d\bar{\delta}^{**}}{d\bar{r}} + \bar{\delta}^{**} (H + 1) \frac{d \ln w_c}{d\bar{r}} = \frac{C_f}{2\bar{r} \sin \theta}. \quad (2.6)$$

3. Потери тяги при одномерном течении в идеальном ядре потока непосредственно из-за трения на контуре осесимметричного сопла определяются по формуле

$$Z_t = 2\pi \int_{r_0}^{r_i} \tau \operatorname{ctg} \theta r dr$$

Идеальный удельный импульс в пустоте

$$I_{s,i} = w_i \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2} \right)$$

Идеальная тяга в пустоте $P_i = I_{s,i} \rho_i w_i \Phi_* \pi r_i^2$. Отсюда безразмерные потери из-за трения вдоль контура сопла равны

$$\bar{Z}_t = \left[\Phi_* \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2} \right) \rho_i w_i^2 r_i^2 \right]^{-1} 2 \int_{r_0}^{r_i} \tau \operatorname{ctg} \theta r dr$$

В дифференциальной форме с учетом сохранения расхода между текущим и выходным сечениями можно получить

$$d\bar{Z}_t = \frac{2 \cos \theta dr}{\Phi_* r} \frac{C_f w_c}{2 w_i \sin \theta} \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2} \right)^{-1} \quad (3.1)$$

Вследствие наличия пограничного слоя вязкое ядро поджимается, из-за чего давление на контуре возрастает. При этом потери из-за трения уменьшаются примерно на величину, соответствующую повышению давления на стенке, т.е. на

$$\frac{\Delta p}{p_c} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{\lambda_c^2}{(\lambda_c^2 - 1)} 2\bar{\delta}^* \cos \theta$$

Таким образом, в интегральной форме это относительное уменьшение потерь из-за трения

$$\bar{Z}_p = 2 \int_{r_0}^r \Delta p r dr \left[\Phi_* \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2} \right) \rho_i w_i^2 r_i^2 \right]^{-1}$$

В дифференциальной форме

$$d\bar{Z}_p = \frac{2 \cos \theta dr}{\Phi_* r} 2\bar{\delta}^{**} H \frac{1}{M_c^2 - 1} \frac{w_c}{w_i} \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2} \right)^{-1} \quad (3.2)$$

Для криволинейной стенки, как отмечалось выше, следует учесть влияние центробежной силы. Наряду с соотношением (2.2), определяющим различие вдоль оси у в давлениях на стенке и границе пограничного слоя, подобное же соотношение можно написать и в идеальном потоке: в сопле, полученном из исходного путем поджатия стенки на величину $\delta^*(r)$ с целью замены воздействия пограничного слоя на ядро потока

$$p_{Si} - p_c = \frac{\rho_c w_c^2}{R} (\delta - \delta^*)$$

Вычитая из (2.2) последнее равенство, можно получить

$$\Delta p_S = p_S - p_{S,i} = -\frac{\rho_c w_c^2}{R} \delta^{**} = \rho_c w_c^2 \frac{d\theta}{dS} \delta^{**}$$

т.е. наличие центробежной силы на большей части сопла, где $d\theta/dS < 0$, приводит к понижению давления на стенке по сравнению с идеальным давлением $p_{S,i}$, определяемым поджатием потока на величину δ^* .

Величина безразмерной центробежной силы в проекции на ось сопла

$$d\bar{Z} = \frac{2r\Delta p_S dS \sin\theta}{\varphi_* \rho_i w_i^2 r_i^2} \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2}\right)^{-1}.$$

Учитывая сохранение расхода между рассматриваемым сечением и выходным, окончательно можно получить

$$d\bar{Z} = \frac{2\delta^{**} w_c}{\varphi_* w_i} \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2}\right)^{-1} \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{r} \sin\theta \quad (3.3)$$

Таким образом, складывая почленно (3.1), (3.2) и (3.3), получим, что суммарная формула в дифференциальном виде для безразмерных потерь из-за трения (течение с одномерным невязким ядром) имеет вид

$$d\bar{Z}_\Sigma = \frac{2\cos\theta w_c}{\varphi_* (1 + 1/\gamma M_i^2) w_i} \left[\frac{C_f}{2\sin\theta} - \frac{H2\bar{\delta}^{**}}{M_c^2 - 1} - \bar{r}\bar{\delta}^{**} \operatorname{tg}\theta \frac{d\theta}{d\bar{r}} \right] \frac{d\bar{r}}{\bar{r}} \quad (3.4)$$

В соплах в начале сверхзвуковой части $d\theta/dS > 0$, затем на большей его части $d\theta/dS < 0$, и последнее слагаемое увеличивает потери из-за трения. В выходном сечении отношение $w_c/w_i = 1$ и не влияет на $d\bar{Z}_\Sigma/dr$.

При течении в сопле с идеальным одномерным ядром формулы (1.12) и (1.13) практически совпадают. Согласно (1.13), потери из-за вязкости для осесимметричного сопла, полученные по параметрам в выходном сечении, равны

$$\zeta_v = 2 \frac{\varphi}{\eta} \bar{\delta}^{**} \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2}\right)^{-1} \quad (3.5)$$

где $\varphi = \lambda_{c,i}/\lambda_i \approx 1$, а $\eta = q(\lambda_i)/[q(\lambda_c)\cos\theta] \approx \cos^{-1}\theta$

Дифференцируя (3.5) и используя (2.5), можно получить при $\varphi_* = 1$ в выходном сечении сопла

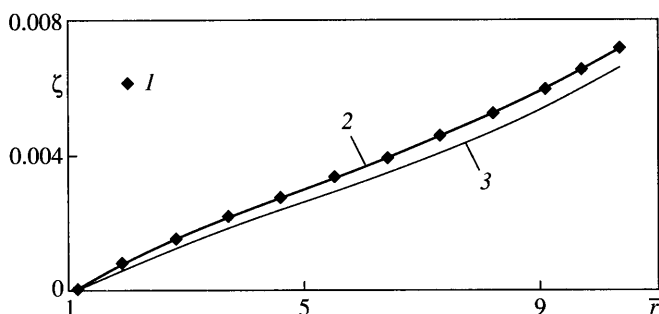
$$d\zeta_v = 2\cos\theta \left(1 + \frac{1}{\gamma M_i^2}\right)^{-1} \frac{dr}{r} \left[\frac{C_f}{2\sin\theta} - \frac{(H+1)2\bar{\delta}^{**}}{M_i^2 - 1} - \bar{\delta}^{**} \bar{r} \operatorname{tg}\theta \frac{d\theta}{d\bar{r}} \right] \quad (3.6)$$

Формула (3.4), используемая для интегрирования потерь из-за трения вдоль контура сопла, и формула (3.6), полученная по параметрам на выходе из сопла, весьма схожи между собой.

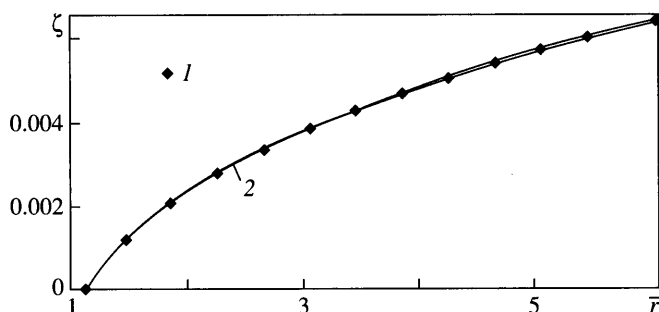
В результате – потери, вычисленные по этим формулам, выведенным на базе разных физических подходов, полностью совпадают в масштабе фиг. 4 в широком диапазоне степеней расширения и длин сопел. Это же касается и случая с прямолинейной стенкой сопла (фиг. 5), где отсутствуют центробежные силы.

Кривая 3 на фиг. 4 соответствует расчету по формуле [7], иногда неправильно применяемой к соплам с контуром, не поправляемым на толщину вытеснения пограничного слоя.

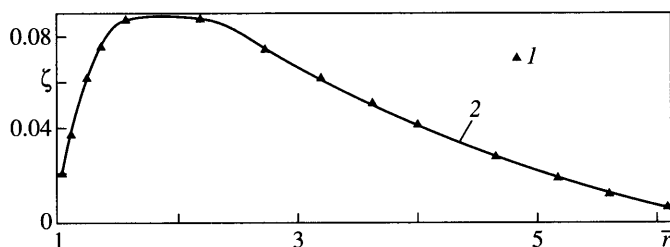
Таким образом, для расчета потерь из-за вязкости наиболее простым является метод, базирующийся на использовании параметров в выходном сечении сопла; при



Фиг. 4. Сравнение потерь из-за трения, вычисленных интегрированием вдоль контура (1) и по параметрам в выходном сечении (2); 3 – по формуле [7]



Фиг. 5. То же сравнение, но для прямолинейного контура с полууглом конусности 15°: 1 – интегрирование вдоль контура; 2 – по параметрам в выходном сечении



Фиг. 6. Зависимости потерь из-за рассеяния, вычисляемых по формулам (1.11) – 1 и (3.7) – 2

этом влияние параметров по сечению струи и на эти потери (влияние ψ) весьма мало и можно считать, что потери из-за вязкости фактически зависят лишь от параметров пограничного слоя и невязкого ядра и у стенки сопла в его выходном сечении.

Потери из-за рассеяния могут быть вычислены как по параметрам в выходном сечении сопла по формуле (1.11), так и с использованием интеграла сил давления по стенке сопла

$$\zeta_S = 1 - \frac{2}{z(\lambda_i)} \left[1 + \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{1/(\gamma - 1)} \int_1^{\bar{r}_i} \frac{p_c}{p_0} \bar{r} d\bar{r} \right] \quad (3.7)$$

где p_0 – давление торможения, а $z(\lambda) = \lambda + \lambda^{-1}$. На фиг. 6 показано совпадение результатов расчетов по этим двум формулам.

Представленные в п. 2 и 3 исследования выполнены только для обычных сопел Лаваля, возможность распространения данных результатов на штыревые сопла весьма вероятна. Однако для них уточнение малых потерь тяги практического интереса не представляет.

Заключение. Получены компактные и удобные для анализа и расчетов формулы для потерь удельного импульса из-за вязкости потока по параметрам двухмерного потока в выходном сечении. Показано, что эти потери могут быть вычислены и без использования интегралов по выходному сечению, а только по значениям параметров на контуре сопла. Исследовано влияние продольной кривизны на уравнение сохранения импульса в пограничном слое и на потери из-за вязкости, вычисляемые вдоль контура сопла. Для прямолинейного и криволинейного сопел дифференциальные уравнения сохранения осевой составляющей импульса пограничного слоя имеют одинаковый вид. Показано на примере течения с идеальным одномерным ядром существенное влияние центробежной силы на потери из-за вязкости и полное совпадение этих потерь, вычисляемых вдоль контура сопла и по выходному сечению.

Автор благодарен Л.П. Верещаке и А.С. Киселеву за выполнение расчетов, а также А.С. Киселеву, А.Н. Крайко и Г.Ю. Степанову за весьма плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мельников Д.А., Пирумов У.Г., Сергиенко А.А. Сопла реактивных двигателей // Аэромеханика и газовая динамика. М.: Наука, 1976. С. 57–75.
2. Сергиенко А.А. Газодинамический импульс потока в осесимметричных каналах // Проблемы механики и теплообмена в космической технике. М.: Машиностроение, 1982. С. 136–151.
3. Стернин Л.Е. Исследование тяговых характеристик реактивных сопел, спрофилированных разными методами // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 1. С. 152–162.
4. Степанов Г.Ю., Гогош Л.В. Квазидномерная газодинамика сопел ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1973. 167 с.
5. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
6. Стернин Л.Е. Основы газовой динамики. М.: Изд-во МАИ, 1995. 332 с.
7. Авдудевский В.С. Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе // Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение. 1962. № 4. С. 3–12.
8. Baftalovskii S.V., Kraiko A.N., Tillyayeva N.I. Optimal design of self-controlled spike nozzles and their thrust determination at start // Collect. of Techn. Papers. AIAA-99-4955:5-th Intern. Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf. Norfolk, USA, 1999. 11 с.
9. Каторгин Б.И., Чванов В.К., Киселев А.С. и др. Тяговые характеристики ЖРД со штыревыми соплами // Тр. НПО Энергомаш. им. акад. В.П. Глушко. 2001. № 19. С. 18–37.
10. Киселев А.С., Стернин Л.Е. Экстремальные осесимметричные кольцевые сопла тарельчатого типа // Тр. НПО Энергомаш. им. акад. В.П. Глушко. 2001. № 19. С. 38–52.
11. Гогош Л.В., Степанов Г.Ю. Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979. 367 с.
12. Аукин М.К., Тагиров Р.К. Определение оптимальных контуров выходного устройства плоского гиперзвукового прямооточного воздушнореактивного двигателя с учетом влияния пограничных слоев // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 174–184.