

УДК 533.27+533.72

© 2003 г. А. А. РАЙНЕС

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ МАКРОПАРАМЕТРОВ В УДАРНОЙ ВОЛНЕ В БИНАРНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ НА БАЗЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Изучается влияние числа Маха, отношений концентраций и масс на поведение параллельной, радиальной и суммарной температур компонент в ударной волне в бинарной смеси газов. Проводится сравнение полученных результатов с теоретическими и экспериментальными результатами других авторов.

Ключевые слова: кинетическая теория газов, уравнение Больцмана, структура ударной волны.

Исследованию структуры ударной волны в бинарной смеси газов посвящено большое число теоретических и экспериментальных работ. Задача стала тестом, на котором могут быть проверены различные методы решения уравнения Больцмана и приближенные кинетические теории. В теоретических работах представлены моментный метод [1], двухжидкостная модель [2], численный анализ, базирующийся на кинетических моделях [3], метод прямого моделирования Монте-Карло [4], применение консервативного метода расщепления [5] для бинарной смеси газов [6, 7] и конечно-разностный анализ уравнения Больцмана [8]. В работах [9, 10] представлены экспериментальные результаты.

При решении кинетического уравнения Больцмана конечно-разностными методами важен вопрос: будет ли интеграл столкновений после аппроксимации стремиться к интегралу столкновений Больцмана, когда шаг сетки в пространстве скоростей стремится к нулю? Основным критерием точности вычислений является выполнение законов сохранения. В методе [8] законы сохранения удовлетворяются приближению в пределах ошибки вычисления и используются как мера точности. В методе [11] выполняется закон сохранения массы, в [5] развит метод коррекции промежуточного решения, делающий метод консервативным. В консервативных методах [12–16] используется специальный выбор узлов кубатурной формулы, при котором скорости до и после столкновения принадлежат одной сетке дискретных ординат. Благодаря этому законы сохранения выполняются точно при каждом столкновении.

В данной работе структура ударной волны изучается на основе обобщения консервативного метода дискретных ординат для бинарной смеси газов и для случая цилиндрической симметрии в импульсном пространстве (корневой метод предложен в [17] для простого газа). Консервативность обеспечивается без ограничения на допустимые значения переменных интегрирования путем специального проецирования значений подынтегрального выражения, вычисленного в узлах сетки, в ближайшие к ним узлы импульсной сетки. С помощью данного метода проблема решается с приемлемой точностью и с использованием небольших вычислительных ресурсов. Приводятся численные результаты для молекулярной модели твердых упругих сфер.

1. Постановка задачи. Рассматривается бинарная смесь одноатомных газов без внутренних степеней свободы. Структура плоской стационарной ударной волны находит-

ся методом установления как решение следующей неоднородной задачи Коши для уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}} = -L_i + G_i, \quad i = 1, 2$$

$$f_i(0, x, p, \rho) = \begin{cases} f_{i-}(p, \rho), & x \leq x_0 \\ f_{i+}(p, \rho), & x > x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

где $f_i = f_i(t, x, p, \rho)$ – функция распределения, t – время, x – физическая координата, \mathbf{p} – вектор импульса с цилиндрическими координатами (p, ρ, γ) , $f_{i-}(p, \rho)$, $f_{i+}(p, \rho)$ – равновесные максвелловские функции распределения с параметрами n_{i-} , P_{-} , T_{-} и n_{i+} , P_{+} , T_{+} (числовая плотность компонента, импульс и температура смеси), взятые на $-\infty$ вверх по течению и на $+\infty$ вниз по течению. Эти параметры связаны условиями Рэнкина – Гюгоню с числом Маха, равным

$$M_{-} = U_{-} \left(\frac{5kT_{-}}{3m_{-}} \right)^{-1/2} = P_{-} \left(\frac{5}{3} kT_{-} m_{-} \right)^{-1/2}$$

$$m_{-} = m_1 \chi_{1-} + m_2 \chi_{2-}, \quad \chi_{i-} = n_{i-} / n_{-}, \quad n_{-} = n_{1-} + n_{2-}$$

где U_{-} , m_{-} , n_{-} , χ_{i-} – скорость, масса и числовая плотность смеси, концентрация компонента смеси, $i = 1, 2$. Таким образом, структура ударной волны формируется как результат развития скачка, заданного в начальных условиях. Характерные параметры задачи: n_{-} и T_{-} ; в качестве масштаба длины взята средняя длина свободного пробега молекул смеси газов в равновесии

$$\lambda_{-} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{n_{i-}}{n_{-}} \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[\pi \left(\frac{d_i + d_j}{2} \right)^2 n_{j-} \left(1 + \frac{m_j}{m_i} \right)^{1/2} \right] \right\}^{-1} \right)$$

$$\lambda_{-} = l_K, \quad l_{-} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} d_1^2 n_{-}}$$

где l_{-} – средняя длина свободного пробега молекул первого сорта в равновесии с молекулярной числовой плотностью n_{-} .

При $d_2/d_1 = 1$: $K \approx 1$, $x' = x/l_{-}$, $\tau = l_{-}/c_0$; при $d_2/d_1 \neq 1$: $x' = x/\lambda_{-}$, $\tau = \lambda_{-}/c_0$.

Характерная скорость и импульс равны

$$c_0 = (2kT_{-}/m_1)^{1/2}, \quad p_0 = (2kT_{-}m_1)^{1/2}$$

При сравнении с результатами других авторов используется обезразмеривание, принятое в этих работах; $L_{-} = (\mu/mnU)_{-}$ – значение свободного пробега с вязкостью смеси μ и массовым потоком смеси mnU . Характеристические безразмерные параметры задачи d_2/d_1 , m_2/m_1 , χ_{2-} и M_{-} .

2. Метод решения уравнения Больцмана. Система уравнений Больцмана в импульсном пространстве для двухкомпонентной смеси газов, состоящей из твердых упругих сфер, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}} = -L_i + G_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

Здесь L_i – интеграл "прямых столкновений", G_i – интеграл "обратных столкновений"

$$L_i = \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f_i f_{j*} \frac{1}{2} \left(\frac{d_i + d_j}{2} \right)^2 q_{ji} \sin \theta d\theta d\varphi d\mathbf{p}_* \quad (2.2)$$

$$G_i = \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f_i' f_{j*}' \frac{1}{2} \left(\frac{d_i + d_j}{2} \right)^2 q_{ji} \sin \theta d\theta d\varphi d\mathbf{p}_* \quad (2.3)$$

$$q_{ji} = (\mathbf{g}_{ji} \cdot \mathbf{n})$$

где d_i – диаметры сталкивающихся молекул, m_i – их массы. Импульсные аргументы \mathbf{p} и \mathbf{p}_* (импульсы молекул до столкновения) связаны с импульсными аргументами \mathbf{p}' и \mathbf{p}'_* (импульсы молекул после столкновения) соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \mathbf{p} + 2m_i m_j (m_i + m_j)^{-1} (\mathbf{g}_{ji} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ \mathbf{p}'_* &= \mathbf{p}_* - 2m_i m_j (m_i + m_j)^{-1} (\mathbf{g}_{ji} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ \mathbf{g}_{ji} &= \frac{\mathbf{p}_*}{m_j} - \frac{\mathbf{p}}{m_j} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор, направленный вдоль линии центров сталкивающихся молекул, \mathbf{g}_{ji} – их относительная скорость, θ , φ – углы столкновения.

Вводится фиксированная сетка в физическом пространстве и определяется область Ω с объемом V в импульсном подпространстве. В области Ω строится дискретная сетка из N_0 равноотстоящих узлов \mathbf{p}_β с шагом \mathbf{h} . Обозначим $f_{i\beta} = f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}_\beta)$, $L_{i\beta} = L_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}_\beta)$, $G_{i\beta} = G_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}_\beta)$, указывая только узел импульсной сетки, в которой вычислена величина. В аппроксимации дискретных ординат имеем

$$f_i(\mathbf{p}^*) = \frac{V}{N_0} \sum_{\beta=1}^{N_0} f_{i\beta} \delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_\beta) \quad (2.5)$$

$$L_i(\mathbf{p}^*) = \frac{V}{N_0} \sum_{\beta=1}^{N_0} L_{i\beta} \delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_\beta) \quad (2.6)$$

$$G_i(\mathbf{p}^*) = \frac{V}{N_0} \sum_{\beta=1}^{N_0} G_{i\beta} \delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_\beta) \quad (2.7)$$

Уравнение Больцмана в дискретной форме имеет вид

$$\frac{\partial f_{i\beta}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_\beta}{m_i} \frac{\partial f_{i\beta}}{\partial \mathbf{x}} = -L_{i\beta} + G_{i\beta} \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) решается методом расщепления [5], что приводит к последовательному решению на каждом временном шаге задачи о свободно-молекулярном течении и задачи о столкновительной релаксации.

Для первой задачи используется дивергентная конечно-разностная схема 2-го порядка [18], а для второй задачи используется обобщение метода дискретных ординат для вычисления интеграла столкновений.

Рассматривается интегральный оператор

$$Q_i(\Phi) = \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi f_i f_{j*} \frac{1}{2} \left(\frac{d_i + d_j}{2} \right)^2 q_{ji} \sin \theta d\theta d\varphi d\mathbf{p}_* d\mathbf{p}$$

Выбор Φ в виде трехмерной дельта-функции дает

$$L_i(\mathbf{p}^*) = \frac{1}{2} Q_i(\delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}) + \delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_*)) \tag{2.9}$$

$$G_i(\mathbf{p}^*) = \frac{1}{2} Q_i(\delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}') + \delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}'_*)) \tag{2.10}$$

Перейдем к цилиндрическим координатам в интегральном операторе, учитывая, что $\mathbf{p} = \mathbf{p}(p, \rho, \gamma)$, $d\mathbf{p} = \rho dp d\rho d\gamma$

$$Q_i(\Phi) = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega \times \Omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi f_i f_{j*} \frac{1}{2} \left(\frac{d_i + d_j}{2} \right)^2 q_{ji} \chi \sin \theta d\theta d\varphi d\mathbf{p}_* d\mathbf{p}$$

Здесь $\chi = 1$, если $(\mathbf{p}', \mathbf{p}'_*) \in \Omega \times \Omega$, и $\chi = 0$, если $(\mathbf{p}', \mathbf{p}'_*) \notin \Omega \times \Omega$.

В цилиндрической системе координат каждый узел импульсной сетки \mathbf{p}_β имеет две координаты (p_β, ρ_β) с одинаковым шагом (h, h) . Следует заметить, что метод требует одну и ту же постоянную сетку в импульсном пространстве для обеих компонент смеси. В то же время шаги каждой импульсной координаты могут быть различны.

Далее вводится равномерная кубатурная сетка узлов интегрирования $\rho_{\alpha v}, \rho_{\alpha v}, \rho_{\beta v}, \rho_{\beta v}, \gamma_v, \gamma_{*v}, \theta_v, \varphi_v$ с N_v узлами так, чтобы значения $\rho_{\alpha v}, \rho_{\alpha v}$ и $\rho_{\beta v}, \rho_{\beta v}$ совпадали с узлами импульсной сетки. Получаются следующие оценки интегралов столкновений

$$L'_i(\mathbf{p}^*) = A \sum_{v=1}^{N_v} \sum_{j=1}^2 J_{ijv} (\delta(\mathbf{p}^* - \rho_{\alpha v}) + \delta(\mathbf{p}^* - \rho_{\beta v})) \tag{2.11}$$

$$G'_i(\mathbf{p}^*) = A \sum_{v=1}^{N_v} \sum_{j=1}^2 J_{ijv} (\delta(\mathbf{p}^* - \rho'_{\alpha v}) + \delta(\mathbf{p}^* - \rho'_{\beta v})) \tag{2.12}$$

$$J_{ijv} = f_{i\alpha v} f_{j\beta v} \frac{1}{2} \left(\frac{d_{i\alpha v} + d_{j\beta v}}{2} \right)^2 q_{j\beta v i\alpha v} \sin \theta_v \rho_{\alpha v} \rho_{\beta v}$$

Комбинируя (2.6) и (2.11), имеем

$$L'_{i\beta} = B \sum_{v=1}^{N_v} \sum_{j=1}^2 (J'_{ijv} + J''_{ijv}), \quad B = \pi^2 V \frac{N_0}{N_v} \tag{2.13}$$

где штрих и два штриха отмечают вклады J_{ijv} при условии $\rho_{\alpha v} = \rho_\beta$ и $\rho_{\beta v} = \rho_\beta$ соответственно. Так как в (2.12) особенности $\rho'_{\alpha v}$ и $\rho'_{\beta v}$, вообще говоря, не совпадают с узлами импульсной сетки, аппроксимируем стоящее там выражение в круглых скобках суммой дельта-функций, содержащих ближайшие к этим точкам узлы сетки.

Пусть $\rho_{\lambda v}$ и $\rho_{\mu v}$ есть узлы импульсной сетки, ближайšie к $\rho'_{\alpha v}$ и $\rho'_{\beta v}$ соответственно, а \mathbf{s} и $\boldsymbol{\sigma}$ – векторы смещения на импульсной сетке. Тогда узлы ячеек, внутрь которых

попали $\mathbf{p}'_{\alpha v}$, $\mathbf{p}'_{\beta v}$, могут быть представлены как $\mathbf{p}_{\lambda v+s}$, $\mathbf{p}_{\mu v+s}$. В цилиндрических координатах из (2.4) следует соотношение $(s)_p = -(\sigma)_p$. Заменим выражение в скобках в (2.12) разложением

$$\begin{aligned} & \delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}'_{\alpha v}) + \delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}'_{\beta v}) = \\ & = \sum_s r_s (\delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_{\lambda v+s}) + \delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_{\mu v+s})) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Коэффициенты r_s определяются из условий сохранения в аппроксимации (2.14) массы, импульса и энергии для этой пары ячеек, включая их вершины, содержащих неузловые точки $\mathbf{p}'_{\alpha v}$ и $\mathbf{p}'_{\beta v}$. Для экономичности вычислительного алгоритма предпочтительно иметь алгоритм с минимальным числом членов. Такое решение существует и содержит благодаря (2.4) только два ненулевых коэффициента в (2.14). Тогда получается

$$\begin{aligned} & \delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}'_{\alpha v}) + \delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}'_{\beta v}) = \\ & = (1 - r_{s*}) (\delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_{\lambda v}) + \delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_{\mu v})) + r_{s*} (\delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_{\lambda v+s*}) + \delta(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_{\mu v+\sigma*})) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Подставляя выражение (2.15) в (2.14) и комбинируя с (2.7), имеем

$$G'_{i\beta} = B \sum_{v=1}^{N_v} \sum_{j=1}^2 ((J'_{ijv} + J''_{ijv})(1 - r_v) + (J^*_{ijv} + J^{**}_{ijv})r_v) \quad (2.16)$$

Индексы «'», «''», «*» и «**» отмечают вклады J_{ijv} при условиях $\mathbf{p}_{\lambda v} = \mathbf{p}_{\beta}$, $\mathbf{p}_{\mu v} = \mathbf{p}_{\beta}$, $\mathbf{p}_{\lambda v+s*} = \mathbf{p}_{\beta}$, $\mathbf{p}_{\mu v+s*} = \mathbf{p}_{\beta}$ соответственно и введено обозначение $r_v = r_{s*}$. Выражения (2.13) и (2.16) определяют консервативный метод дискретных ординат, когда коэффициенты r_v найдены. Описанный выше алгоритм вычисления интегралов столкновений использует только "прямые столкновения". Этот алгоритм оптимизируется путем включения "обратных столкновений", как и для простого газа [19]. В качестве узлов интегрирования использовались узлы сетки, равномерно распределенные в 8-мерном единичном кубе [20].

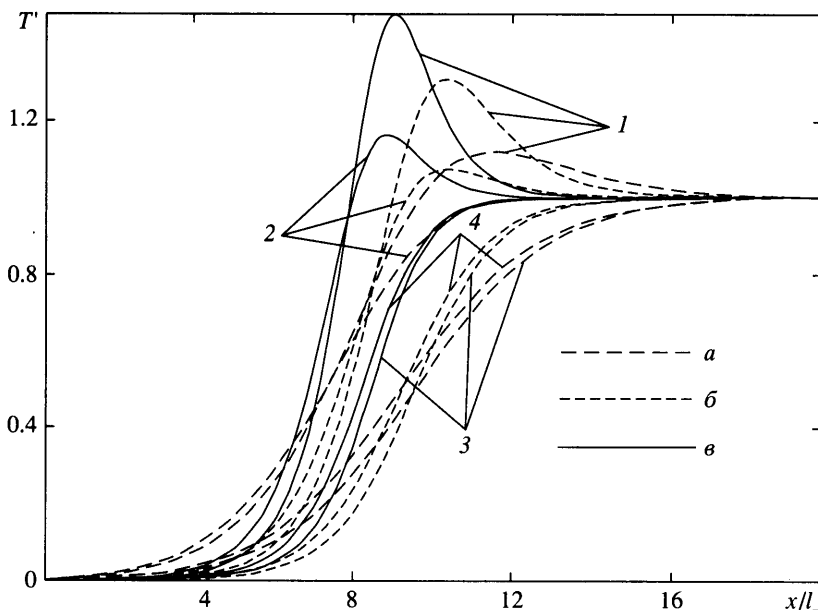
3. Анализ численных результатов. 1) Рассмотрим влияние числа Маха (M_-), отношения концентраций (χ_{2-}/χ_{1-}) и отношения масс (m_2/m_1) на поведение параллельной, радиальной и суммарной температур компонентов смеси при отношении диаметров $d_2/d_1 = 1$. Температурные макропараметры на фиг. 1–3 представлены в виде

$$T'_i = \frac{T_i - T_{i1}}{T_{i2} - T_{i1}}$$

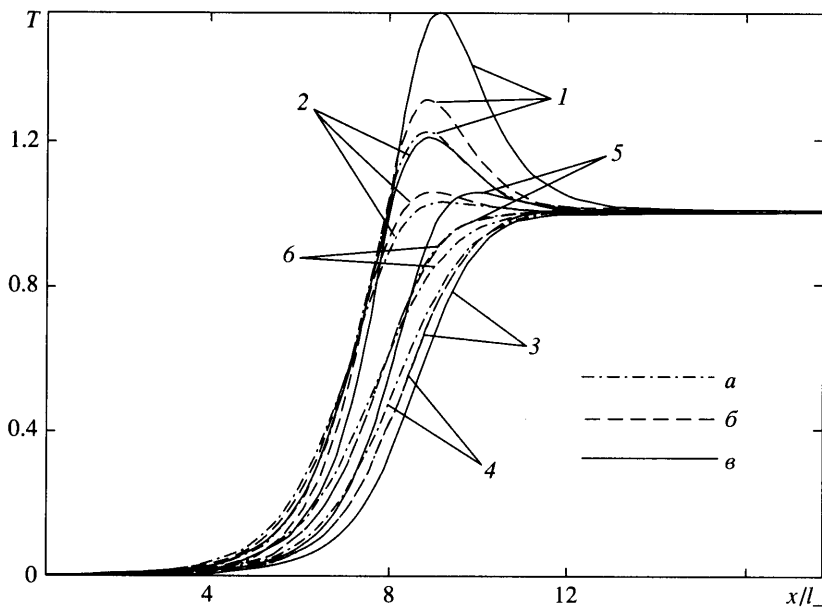
где T_{i1} – температура газа перед ударной волной, T_{i2} – за ударной волной. Обезразмеривание соответствует [8].

На фиг. 1 рассматривается влияние числа Маха на поведение параллельной и радиальной температур компонентов смеси при $M_- = 1.5, 2$ и 3 , $m_2/m_1 = 0.5$, $\chi_{2-} = 0.9$. Наблюдается "всплеск" параллельной температуры у обоих компонентов смеси, который увеличивается по мере увеличения числа Маха, с опережением всплеска параллельной температуры тяжелого компонента. Профили радиальных температур компонентов смеси по мере увеличения числа Маха становятся круче. При $\chi_{2-} = 0.9$ наблюдается "всплеск" суммарной температуры тяжелого компонента (см. также фиг. 2).

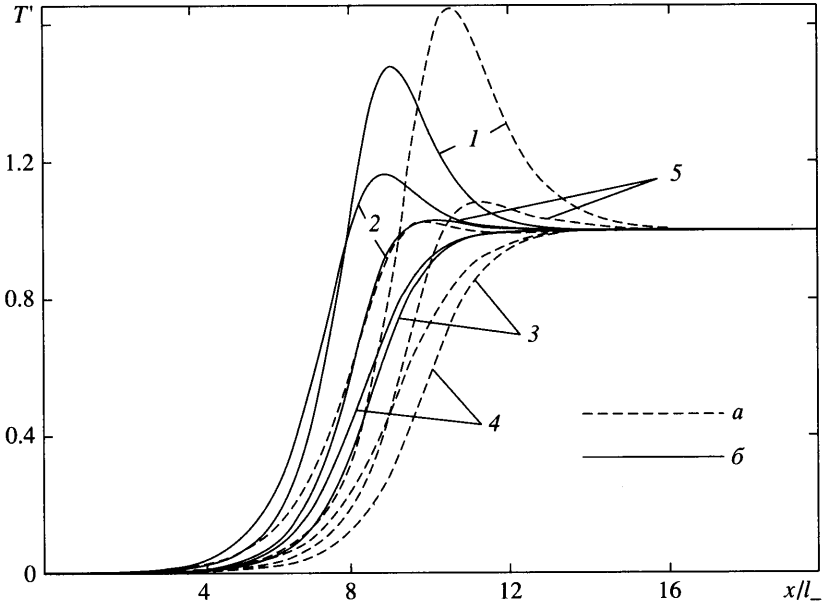
На фиг. 2 рассматривается влияние отношения концентраций компонентов смеси на поведение параллельной, радиальной и суммарной температур компонентов при $M_- = 3$,



Фиг. 1. Влияние числа Маха на поведение параллельной и радиальной температуры компонентов смеси при $M_∞ = 1.5$ (кривые а) 2 (б), 3 (в), $m_2/m_1 = 0.5$, $\chi_{2-} = 0.9$, $d_2/d_1 = 1$. Кривые 1, 3 – параллельная и радиальная температуры тяжелого компонента, 2, 4 – параллельная и радиальная температура легкого компонента. Аналогичное поведение температур наблюдается при $m_2/m_1 = 0.25$, $\chi_{2-} = 0.9$ и $m_2/m_1 = 0.5$ или 0.25 , $\chi_{2-} = 0.1$, 0.5



Фиг. 2. Влияние отношения концентраций компонентов смеси на поведение параллельной, радиальной и суммарной температуры при $M_∞ = 3$, $m_2/m_1 = 0.5$, $\chi_{2-}/\chi_{1-} = 0.07/0.93$ (кривые а), $0.5/0.5$ (б), $0.999/0.001$ (в), $d_2/d_1 = 1$. Кривые 1, 3, 5 – параллельная, продольная и суммарная температуры тяжелого компонента, 2, 4, 6 – параллельная, продольная и суммарная температуры легкого компонента

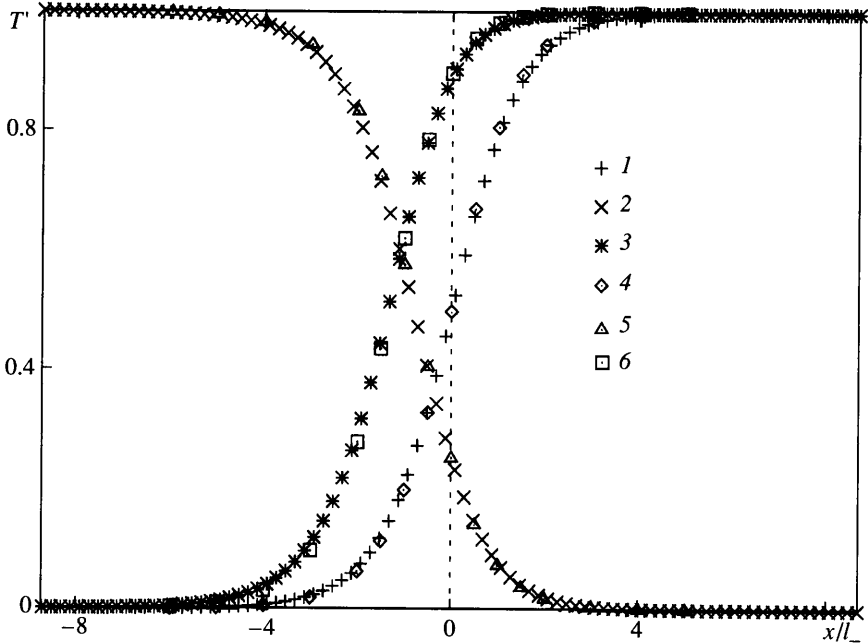


Фиг. 3. Влияние отношения масс на поведение параллельной, радиальной и суммарной температуры компонентов при $M_- = 3$, $\chi_{2-} = 0.9$, $m_2/m_1 = 0.25$ (а), 0.5 (б), $d_2/d_1 = 1$. Кривые 1, 3, 5 – параллельная, радиальная и суммарная температуры тяжелого компонента, 2, 4 – параллельная и радиальная температуры легкого компонента

$m_2/m_1 = 0.5$. Наблюдается "всплеск" параллельной температуры у обоих компонентов смеси, который увеличивается по мере увеличения концентрации легкого компонента с опережением всплеска параллельной температуры тяжелого компонента. Суммарные температуры компонентов смеси по мере увеличения концентрации легкого компонента ($\chi_{2-} = 0.07, 0.5$) становятся круче, но с запаздыванием температуры легкого компонента. При $\chi_{2-} = 0.9$ появляется "всплеск" температуры тяжелого компонента, который продолжает увеличиваться при $\chi_{2-} = 0.95, 0.999$. Суммарная температура тяжелого компонента растет более круто и превышает крутизну профиля температуры легкого компонента в некоторой точке внутри ударной волны, а затем достигает равновесной температуры вниз по течению, перед этим демонстрируя "всплеск" температуры. Этот эффект был показан ранее в [4, 6, 8]. Исследования в [8] и данной работе показывают, что такое поведение суммарной температуры тяжелого компонента проявляется, когда концентрация легкого компонента велика и ударная волна не слабая.

На фиг. 3 прослеживается влияние отношения масс на поведение параллельной, радиальной и суммарной температур компонентов. Рассмотрим случаи $M_- = 3$, $\chi_{2-} = 0.9$, $m_2/m_1 = 0.25$ и 0.5 . Наблюдается всплеск параллельной температуры у обоих компонентов смеси и всплеск суммарной температуры тяжелого компонента. По мере увеличения отношения масс всплески параллельной и суммарной температур тяжелого компонента понижаются, а максимум параллельной температуры легкого компонента повышается. Радиальные температуры обоих компонентов при этом становятся круче. Аналогичное поведение температур наблюдается при $M_- = 1.5$, $\chi_{2-} = 0.9$, $m_2/m_1 = 0.25, 0.5$ и при $M_- = 2$, $\chi_{2-} = 0.9$, $m_2/m_1 = 0.25$ и 0.5 .

Переходный режим от состояния вверх по течению до состояния вниз по течению получен с помощью функции распределения и в виде ее моментов (макроскопических величин), часть из которых представлена в данной работе.



Фиг. 4. Сравнение с результатами [8] профилей числовой плотности, скорости и температуры смеси газов при $M_2 = 3, m_2/m_1 = 0.5, \chi_{2-} = 0.1, d_2/d_1 = 1$. Данный метод – точки 1, 2, 3; метод [8] – точки 4, 5, 6. Точки 1, 4 – числовая плотность; 2, 5 – скорость, 3, 6 – температура

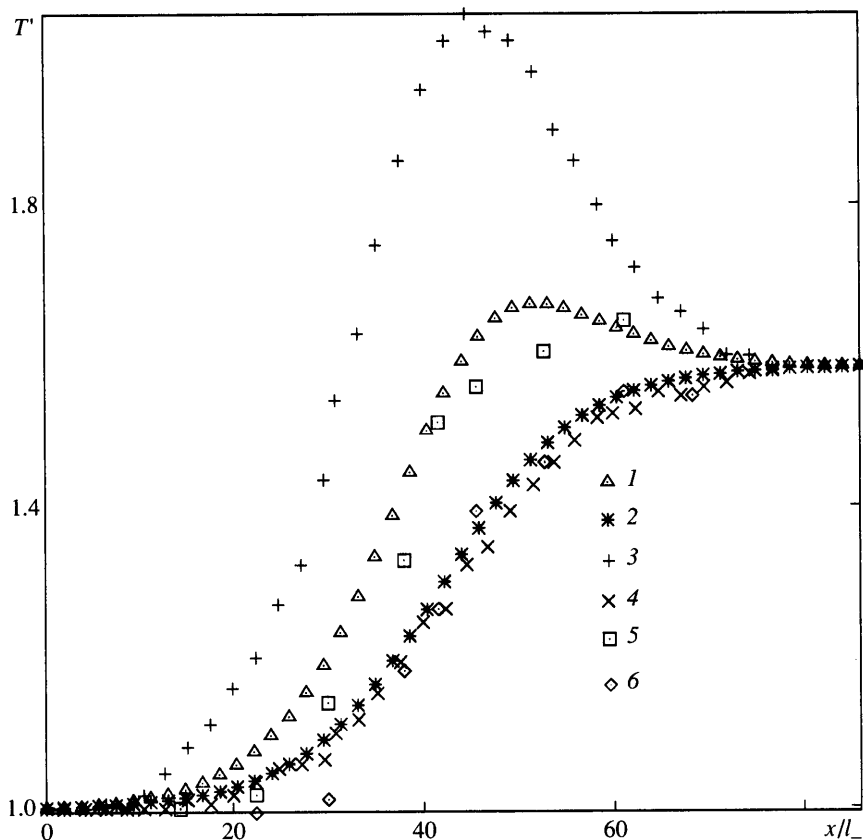
Результаты, полученные данным методом, сравнивались с результатами [8] и получено хорошее согласие. В частности, на фиг. 4 показаны профили макроскопических величин n', U, T – плотности, скорости и температуры смеси газов, для $M_2 = 3, m_2/m_1 = 0.5, \chi_{2-} = 0.1, d_2/d_1 = 1$. Для $M_2 = 3, m_2/m_1 = 0.5, \chi_{2-} = 0.5, d_2/d_1 = 1$ и $M_2 = 2, m_2/m_1 = 0.25, \chi_{2-} = 0.5, d_2/d_1 = 1$ результаты, полученные методом [8], сравнивались с результатами, полученными методом прямого моделирования Берда. Имеется также хорошее согласие между результатами, полученными данным методом и методом Берда.

В [8] интеграл столкновений аппроксимируется квадратурной формулой, использующей разложение функций распределения в виде суммы произведений кусочно-квадратичных функций по ξ и полиномов Лагерра по p . Время, потраченное на одну итерацию по методу [8], на компьютере Fujitsu VPP800 при параллельных вычислениях, использующих 10 процессоров, составляет 99 с. Время, потраченное на одну итерацию по данному методу, на персональном компьютере с процессором Pentium 3 с частотой 550 МГц и с памятью 128 мб составляет 19.3, время на всю задачу составляет 13 ч ($\Delta t = 0.01$), компьютерная память – 8.5 мб. Период стабилизации решения составляет (20–27) τ , τ – время свободного пробега молекул.

Точность вычислений оценивается путем сравнения макроскопических величин для различных сеток и различного числа интеграционных узлов.

Пусть $\sigma(M, S)$ представляет n, U, T , полученные с использованием сеток M и S , где M – импульсная сетка, S – сетка в физическом пространстве. Вводим максимальную разницу двух результатов, базирующихся на двух различных сетках M, S , и M', S' по формуле

$$D(M', S', M, S) = \max_{(\sigma = n, U, T)} \left(\max_{x_k} \frac{|\sigma(M', S') - \sigma(M, S)|}{\sigma(M, S)} \right)$$



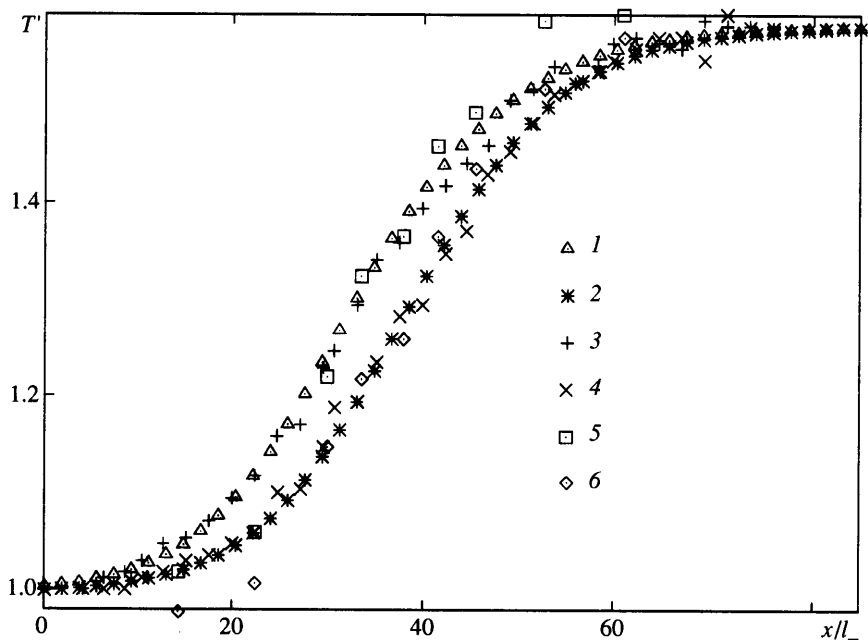
Фиг. 5. Параллельная (точки 1, 3, 5) и радиальная (2, 4, 6) температуры аргона при $M_- = 1.58$, $m_{he}/m_{ar} = 0.1$, $\chi_{he}/\chi_{ar} = 9$, $d_{he}/d_{ar} = 0.593$. Данная работа – точки 1, 2; результаты [6] – 3, 4; эксперимент [9] – 5, 6

Аналогичное сравнение проводилось для различных N_v при фиксированных M , S . В данных расчетах $D = 10^{-2} - 10^{-3}$.

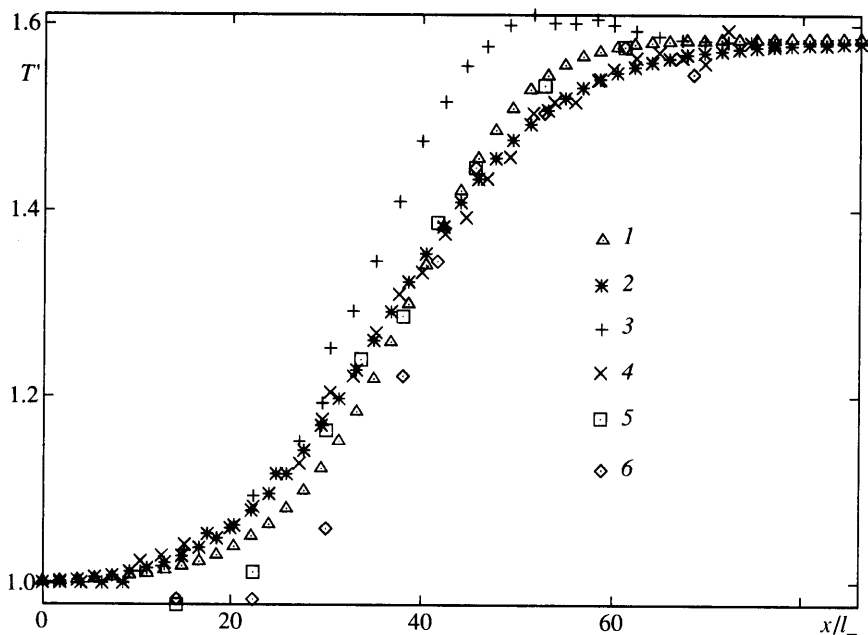
2) Рассматривается задача об ударной волне в смеси газов, состоящей из твердых сфер, моделирующей взаимодействие аргон-гелий, с реальными отношениями молекулярных масс $m_{he}/m_{ar} = 0.1$, числовых плотностей $\chi_{he}/\chi_{ar} = 9$ и сечений столкновений $d_{he}/d_{ar} = 0.593$ для числа Маха $M_- = 1.58$.

Температурные макропараметры на фиг. 5–7 представлены в виде $T'_i = T_i/T_-$. Обезразмеривание соответствует [6]. На фиг. 5 и 6 представлены профили параллельной и радиальной температуры, на фиг. 5 – для аргона, на фиг. 6 – для гелия. На фиг. 7 представлены профили суммарных температур аргона и гелия.

Наблюдается хорошее согласие между численными результатами, полученными в данной работе, и экспериментом для параллельной, радиальной и суммарной температуры аргона и гелия (фиг. 5–7). Имеется также хорошее согласие между результатами данной работы и [6] для радиальной температуры аргона (фиг. 5), параллельной и радиальной температуры гелия (фиг. 6) и суммарной температуры гелия (фиг. 7). В отличие от данной работы, в [6] у профилей параллельной и суммарной температуры аргона наблюдается сильный всплеск и отклонение от экспериментальных данных.



Фиг. 6. Параллельная и радиальная температуры гелия при $M_- = 1.58$, $m_{he}/m_{ar} = 0.1$, $\chi_{he}/\chi_{ar} = 9$, $d_{he}/d_{ar} = 0.593$. Обозначения те же, что и на фиг. 5



Фиг. 7. Суммарная температура аргона (точки 1, 3, 5) и гелия (2, 4, 6) при $M_- = 1.58$, $m_{he}/m_{ar} = 0.1$, $\chi_{he}/\chi_{ar} = 9$, $d_{he}/d_{ar} = 0.593$. Данная работа – точки 1, 2; результаты [6] – 3, 4; эксперимент [9] – 5, 6

Заключение. Консервативный метод дискретных ординат для бинарной смеси газов и для случая цилиндрической симметрии в импульсном пространстве опробован на задаче о структуре ударной волны в двухкомпонентной смеси газов, состоящей из твердых упругих сфер. Переходный режим от состояния вверх по течению до состояния вниз по течению получен с помощью функции распределения и представлен в данной работе в виде ее моментов (макроскопических величин). Наблюдается хорошее согласие с результатами [8], с экспериментом [9] и в отдельных случаях с [6].

Используя данный метод, можно решать одномерные задачи с хорошей точностью вычислений и с небольшим временем вычислений. Метод позволяет получать результаты на грубых сетках ($N_0 = 1800$, $h = 0.26$, $N_x = 90$, $h_x = 0.2$, $N_v = 66000$, $\Delta t = 0.01$, время вычислений на 1 шаг 4.2"), которые хорошо согласуются с более подробными расчетами.

Автор благодарит Ф.Г. Черемисина за внимание к работе и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Oberai M.M., Sinha U.N. Shock wave structure in binary gas mixture // *Rarefied Gas Dynamics*. Povz-Wahn: DFVLR, 1974. V. 1. B25/1–B25/10.
2. Fernández-Feria R., Fernandez de la Mora J. Shock wave structure in gas mixtures with large mass disparity // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 179. P. 21–40.
3. Abe K., Oguchi H. Shock wave structures in binary gas mixtures with regard to temperature overshoot // *Phys. Fluids*. 1974. V. 17. № 6. P. 1333–1334.
4. Bird G.A. Shock wave structure in gas mixtures // *Rarefied Gas Dynamics*. Tokyo: Univ. Tokyo Press, 1984. V. 1. P. 175–182.
5. Аристов В.В., Черемисин Ф.Г. Консервативный метод расщепления для решения уравнения Больцмана // *Ж. вычисл. математики и мат. физики*. 1980. Т. 20. № 1. С. 191–207.
6. Mausbach P., Beylich A.E. Numerical solution of the Boltzmann equation for one-dimensional problems in binary mixtures // *Proc. 13th Intern. Symp. Rarefied Gas Dynamics*. N.Y.; L.: Plenum Press, 1985. V. 1. P. 285–292.
7. Raines A.A. Numerical solution of the Boltzmann equation for the one dimensional problem in binary gas mixtures // *Proc. 17th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics*. Weinheim; N.Y., 1991. P. 328–331.
8. Kosuge S., Aoki K., Takata S. Shock-wave structure for a binary gas mixture: finite-difference analysis of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules // *Europ. J. Mech. B. Fluids*. 2001. V. 20. № 1. P. 87–126.
9. Harnett L.N., Muntz E.P. Experimental investigation of normal shock wave velocity distribution functions in mixtures of argon and helium // *Phys. Fluids*. 1972. V. 15. № 4. P. 565–572.
10. Center R.E. Measurement of shock-wave structure in Helium-Argon mixtures // *Phys. Fluids*. 1967. V. 10. № 8. P. 1777–1784.
11. Nordsieck A., Hicks B.L. Monte-Carlo evaluation of the Boltzmann collision integral // *Rarefied Gas Dynamics*. N.Y., L.: Acad. Press, 1967. V. 1. P. 695–710.
12. Inamuro T., Startevant B. Numerical study of discrete-velocity gases // *Phys. Fluids A*. 1990. V. 2. № 12. P. 2196–2203.
13. Rogier F., Schneider J.A. Direct method for solving the Boltzmann equation // *Transport Theory and Statist. Phys.* 1994. V. 23. № 1-3. P. 313–338.
14. Buet C. Conservative and entropy schemes for the Boltzmann collision operator of polyatomic gases // *Math. Models Methods Appl. Sci.* 1997. V. 7. P. 165.
15. Oguchi H., Hatakeyama M., Honma H. Computational aspects of discrete ordinate-velocity description of rarefied gases // *Proc. 19th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics*. Oxford: Oxford Univ. Press, 1995. V. 2. P. 815–821.
16. Palczewski A., Schneider J., Bobylev A.V. A consistency result for a discrete velocity model of the Boltzmann equation // *SIAM J. Numer. Anal.* 1997. V. 34. № 5. P. 1865–1883.
17. Черемисин Ф.Г. Консервативный метод вычисления интеграла столкновений Больцмана // *Докл. РАН*. 1997. Т. 357. № 1. С. 53–56.

18. *Boris J.P., Book D.L.* Flux-corrected transport. 1. Shasta, a fluid transport algorithm that works // J. Comp. Phys. 1973. V. 11. № 1. P. 38–69.
19. *Черемисин Ф.Г.* Решение уравнения Больцмана при переходе к гидродинамическому режиму течения // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 4. С. 483–486.
20. *Коробов Н.М.* Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989. 240 с.

Санкт-Петербург
E-mail raines@AR1063.spb.edu

Поступила в редакцию
18.II.2002