

УДК 532.59:532.63:534.1:537.1

© 2003 г. С. О. ШИРЯЕВА

НЕЛИНЕЙНЫЕ КАПИЛЛЯРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБЪЕМНО ЗАРЯЖЕННОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ КАПЛИ

Для осесимметричных капиллярных колебаний заряженной капли диэлектрической жидкости в квадратичном приближении по амплитуде произвольной начальной деформации ее равновесной сферической формы получено выражение, описывающее форму образующей поверхности капли в зависимости от времени. Показано, что в отличие от заряженной капли идеально проводящей жидкости смещения центра заряда капли диэлектрической жидкости при осцилляциях не происходит и, следовательно, такая капля не является источником дипольного электромагнитного излучения, как это имеет место для проводящей капли в квадратичном приближении.

Ключевые слова: капля, заряд, диэлектрик, нелинейные колебания.

Исследование особенностей капиллярных колебаний заряженной капли представляет значительный интерес в связи с разнообразием академических, технических и технологических приложений (см. [1–2] и указанную там литературу). В связи с повышенным вниманием к такому физическому объекту большая часть задач, сформулированных для заряженной капли в рамках линейных моделей, уже решена. В последние годы появилось много работ, посвященных нелинейному анализу (см. [3–8] и указанную там литературу), позволяющему получать существенно более детальную информацию об объекте. Тем не менее, в связи с громоздкостью аналитических расчетов многие аспекты нелинейных колебаний заряженной капли остаются пока не рассмотренными или непонятными. Сказанное относится, например, к так называемой трансляционной неустойчивости капель и пузырей, проявляющейся, когда в спектре начально возбужденных мод имеются две соседние [4], а также к особенностям реализации внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия различных мод капиллярных осцилляций капли [5, 6]. Согласно [4] центр масс трансляционно-неустойчивой капли приобретает в результате реализации нелинейных колебаний скорость поступательного движения. Такое утверждение представляется неверным, поскольку противоречит известному положению механики: никакими движениями внутри замкнутой системы невозможно привести в движение ее центр масс. Появление в расчетах [4] поступательного движения центра масс связано с некорректностью задания начальных условий, поскольку требование неподвижности центра масс в начальный и все последующие моменты времени следует ввести в формулировку задачи в качестве дополнительного условия, при этом поступательного движения (читай "трансляционной неустойчивости") при колебаниях поверхности капли не возникает. До сих пор не предпринималось попыток нелинейного анализа объемно заряженной диэлектрической капли, капиллярные осцилляции которой, как будет показано ниже, обладают рядом особенностей по сравнению с идеально проводящей каплей.

1. Рассмотрим эволюцию во времени формы поверхности капли идеальной, несжимаемой диэлектрической жидкости с плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения и диэлектрической проницаемости σ и ϵ_d соответственно. Примем, что капля находится в вакууме, ее полный заряд, равный Q , равномерно распределен по объему с постоянной плотностью μ_q , а объем определяется объемом сферы с радиусом R . В начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма капли прервется осесимметричным возмущением фиксированной амплитуды, существенно

меньшей радиуса капли. Зададимся целью найти спектр возникающих капиллярных осцилляций капли (форму капли) в последующие моменты времени $t > 0$.

Примем, что форма капли – осесимметрична как в начальный, так и во все последующие моменты времени, и уравнение, описывающее ее поверхность, в полярной системе координат с началом в центре масс капли в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$, имеет вид

$$r(\vartheta, t) = 1 + \xi(\vartheta, t), \quad |\xi| \ll 1 \tag{1.1}$$

Поле скоростей движения жидкости в капле будем полагать потенциальным с потенциалом $\psi(\mathbf{r}, t)$.

Система уравнений для описания эволюции формы поверхности капли состоит из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$ и электростатического потенциала вне капли $\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$, уравнения Пуассона для электростатического потенциала внутри капли $\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ при следующих граничных условиях

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{1.2}$$

$$\Delta\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = -4\pi\frac{\mu_q}{\epsilon_d} \tag{1.3}$$

$$r \rightarrow 0: \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0 \tag{1.4}$$

$$r \rightarrow \infty: |\nabla\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)| \rightarrow 0; \quad r \rightarrow 0; \quad |\nabla\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)| < \infty \tag{1.5}$$

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t): \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\xi}{\partial\vartheta} \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \tag{1.6}$$

$$\Delta p - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 - \mu_q\Phi_{\text{in}} + \frac{\epsilon_d - 1}{8\pi\epsilon_d}(n\nabla\Phi_{\text{ex}})^2 + \frac{\epsilon_d - 1}{8\pi}(\tau\nabla\Phi_{\text{ex}})^2 = \text{div}\mathbf{n} \tag{1.7}$$

$$\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = \Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t); \quad (n\nabla\Phi_{\text{ex}}) = \epsilon_d(n\nabla\Phi_{\text{in}}) \tag{1.8}$$

$$\int_v r^2 dr \sin\vartheta d\vartheta d\phi = \frac{4}{3}\pi, \quad v = [0 \leq r \leq 1 + \xi(\vartheta, t), 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi] \tag{1.9}$$

$$\int_v \mathbf{e}_r r^3 dr \sin\vartheta d\vartheta d\phi = 0, \quad v = [0 \leq r \leq 1 + \xi(\vartheta, t), 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi] \tag{1.10}$$

Поскольку условие сохранения объема капли (1.9) и условие неподвижности ее центра масс (1.10) должны выполняться в любой момент времени, в том числе и в начальный, то при $t = 0$ они определяют амплитуды нулевой и первой мод в разложении в ряд по полиномам Лежандра начального возмущения $\xi(\vartheta)$ равновесной сферической поверхности капли; т.е. амплитуды нулевой и первой мод не могут быть произвольны, но будут зависеть от вида начальной деформации.

Начальные условия задаются в виде начальной деформации равновесной сферической формы капли и равенства нулю начальной скорости движения поверхности

$$t = 0: \xi(\vartheta) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \epsilon \sum_{i \in \Xi} h_i P_i(\mu) \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial\xi(\vartheta)}{\partial t} = 0; \quad \sum_{i \in \Xi} h_i = 1$$

где Ξ – множество значений номеров изначально возбужденных колебательных мод; $\mu \equiv \cos \vartheta$.

В выражениях (1.6)–(1.11) введены обозначения: Δp – перепад постоянных давлений внутри и вне капли в состоянии равновесия; \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ – единичные вектора нормали и касательной к поверхности (1.1); ε – амплитуда начального возмущения формы поверхности капли; $P_i(\mu)$ – полиномы Лежандра порядка i ; h_i – коэффициенты, определяющие парциальный вклад i -й колебательной моды в суммарное начальное возмущение; ξ_0 и ξ_1 – константы, определяемые из условий (1.9) и (1.10) в начальный момент времени и с точностью до слагаемых второго порядка малости по ε равные

$$\xi_0 \approx -\varepsilon^2 \sum_{i \in \Xi} \frac{h_i^2}{(2i+1)} + O(\varepsilon^3); \quad \xi_1 \approx -\varepsilon^2 \sum_{i \in \Xi} \frac{9ih_{i-1}h_i}{(2i-1)(2i+1)} + O(\varepsilon^3) \quad (1.12)$$

В уравнениях (1.3), (1.5), (1.8) предполагается, что электрический заряд "вморожен" в жидкость и в любой момент времени распределен по объему капли с постоянной плотностью $\mu_q = (3Q/4\pi)$.

2. Для отыскания решения поставленной задачи с точностью до квадратичных по малому параметру ε слагаемых воспользуемся классическим методом многих масштабов. Искомые функции $\xi(\vartheta, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ представим в виде рядов по степеням малого параметра ε и будем считать зависящими не просто от времени t , а от разных его масштабов, определенных через малый параметр ε : $T_m \equiv \varepsilon^m t$

$$\xi(\vartheta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \xi^{(m)}(\vartheta, T_0, T_1, \dots); \quad \psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \psi^{(m)}(\mathbf{r}, \vartheta, T_0, T_1, \dots)$$

$$\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \Phi_{\text{ex}}^{(m)}(\mathbf{r}, \vartheta, T_0, T_1, \dots); \quad \Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \Phi_{\text{in}}^{(m)}(\mathbf{r}, \vartheta, T_0, T_1, \dots)$$

Решение гидродинамической части задачи (1.2), (1.4), (1.6), (1.7) проводится аналогично решению задачи [8] о колебаниях поверхности заряженной капли идеально проводящей жидкости. Отличие заключается в наложении дополнительного условия неподвижности центра масс в начальный и все последующие моменты времени (1.10), которое определяет в итоге амплитуду первой моды в начальный момент времени (1.12) в разложении (1.11) и эволюцию этой моды со временем (см. (2.1)).

Рассмотрение электрической части решаемой задачи (1.3), (1.5), (1.8) не представляет никакой принципиальной сложности. В результате получено выражение для изменения во времени формы поверхности капли

$$r(\vartheta, t) \approx 1 + \varepsilon \left\{ \sum_{i \in \Xi} M_i^{(1)}(t) P_i(\mu) \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu) \right\} + O(\varepsilon^3) \quad (2.1)$$

$$M_i^{(1)}(t) = h_i \cos(\omega_i t); \quad M_0^{(2)}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i \in \Xi} \frac{h_i^2}{(2i+1)} \{1 + \cos(2\omega_i t)\}$$

$$M_1^{(2)}(t) = -\sum_{i \in \Xi} \frac{9ih_{i-1}h_i}{(2i-1)(2i+1)} \cos(\omega_i t) \cos(\omega_{i-1} t)$$

$$M_n^{(2)}(t) = \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left\{ \lambda_{ijn}^{(+)} \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_n + \omega_i + \omega_j)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_n - \omega_i - \omega_j)t\right) + \right. \\ \left. + \lambda_{ijn}^{(-)} \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_n + \omega_i - \omega_j)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_n - \omega_i + \omega_j)t\right) \right\}; \quad n \geq 2 \quad (2.2)$$

$$\omega_n^2 \equiv n(n-1)[(n+2) - W\kappa_1(n, \varepsilon_d)]; \quad W \equiv \frac{Q^2}{4\pi}$$

$$\lambda_{ijn}^{(\pm)} \equiv [\gamma_{ijn} \pm \omega_i \omega_j \eta_{ijn}] [\omega_n^2 - (\omega_i \pm \omega_j)^2]^{-1}$$

$$\gamma_{ijn} \equiv K_{ijn} [\omega_i^2 (n-i+1) + 2n[j(j+1) - 1] + \kappa_{21}(i, j, n, \varepsilon_d) nW/2] +$$

$$+ \alpha_{ijn} \left[\frac{1}{i} \omega_i^2 + \kappa_{22}(i, j, n, \varepsilon_d) n \frac{W}{2} \right]; \quad \eta_{ijn} \equiv K_{ijn} \left(\frac{n}{2} - i + 1 \right) + \alpha_{ijn} \frac{1}{i} \left(1 + \frac{n}{2j} \right)$$

$$\kappa_1(n, \varepsilon_d) \equiv \frac{n\varepsilon_d^2 - (2n-5)\varepsilon_d + (n+1)}{\varepsilon_d(n\varepsilon_d + n + 1)}$$

$$\kappa_{21}(i, j, n, \varepsilon_d) \equiv \frac{1}{\varepsilon_d} \{ 2(n+1)(\varepsilon_d - 1) \kappa_2^{(\text{ex})}(i, n, \varepsilon_d) +$$

$$+ (i+1)(\varepsilon_d - 1) \kappa_1^{(\text{ex})}(i, \varepsilon_d) [(j+1) \kappa_1^{(\text{ex})}(j, \varepsilon_d) - 2(i+4)] -$$

$$- 6\varepsilon_d [\kappa_2^{(\text{in})}(i, n, \varepsilon_d) - i \kappa_1^{(\text{in})}(i, \varepsilon_d)] + 10\varepsilon_d - 7 \}$$

$$\kappa_{22}(i, j, n, \varepsilon_d) \equiv \frac{1}{\varepsilon_d} \{ 2[n+1 - (n-2)\varepsilon_d] \kappa_2(i, n, \varepsilon_d) +$$

$$+ (\varepsilon_d - 1) [2 \kappa_1^{(\text{ex})}(i, \varepsilon_d) - 1 + \varepsilon_d (\kappa_1^{(\text{ex})}(i, \varepsilon_d) (\kappa_1^{(\text{ex})}(j, \varepsilon_d) - 2) + 1)] \}$$

$$\kappa_1^{(\text{in})}(n, \varepsilon_d) \equiv \frac{((n-2)\varepsilon_d - n - 1)}{\varepsilon_d(n\varepsilon_d + n + 1)}; \quad \kappa_1^{(\text{ex})}(n, \varepsilon_d) \equiv \frac{(n\varepsilon_d - n + 3)}{(n\varepsilon_d + n + 1)}$$

$$\kappa_2^{(\text{in})}(i, n, \varepsilon_d) \equiv \frac{1}{(n\varepsilon_d + n + 1)} \left\{ -(i+1)(n-i-1) \kappa_1^{(\text{ex})}(i, \varepsilon_d) +$$

$$+ i((i-1)\varepsilon_d + n + 1) \kappa_1^{(\text{in})}(i, \varepsilon_d) + \frac{1}{2\varepsilon_d} [2(n-2)\varepsilon_d + n + 1] \right\}$$

$$\kappa_2^{(\text{ex})}(i, n, \varepsilon_d) \equiv \frac{1}{(n\varepsilon_d + n + 1)} \left\{ (i+1)(n\varepsilon_d + i + 2) \kappa_1^{(\text{ex})}(i, \varepsilon_d) -$$

$$- i(n-i+1)\varepsilon_d \kappa_1^{(\text{in})}(i, \varepsilon_d) - \frac{1}{2}(2n\varepsilon_d + n + 6) \right\}$$

$$\kappa_2(i, n, \varepsilon_d) \equiv \frac{1}{(n\varepsilon_d + n + 1)} \{ \kappa_1^{(\text{ex})}(i, \varepsilon_d) + \varepsilon_d \kappa_1^{(\text{in})}(i, \varepsilon_d) \}$$

$$K_{ijn} \equiv [C_{ijn}^{000}]^2; \quad \alpha_{ijn} = -\sqrt{i(i+1)j(j+1)} C_{ijn}^{000} C_{ijn}^{-110}$$

$$C_{ijn}^{000} \equiv \begin{cases} 0, & i+j+n = 2g+1, \text{ где } g \in N \\ \frac{(-1)^{g-n} \sqrt{2n+1} g!}{(g-i)!(g-j)!(g-n)!} \left[\frac{(2g-2i)!(2g-2j)!(2g-2n)!}{(2g+1)!} \right]^{1/2} \\ i+j+n = 2g \end{cases}$$

$$C_{ijn}^{-110} \equiv \sqrt{2n+1} n! \left[\frac{(i+j-n)! i(i+1)}{(n+i-j)!(n-i+j)!(i+j+n+1)! j(j+1)} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \sum_m \frac{(-1)^{i+1+m} (i+m-1)!(n+j-m+1)!}{m!(i-m+1)!(n-m)!(j-n+m-1)!}$$

где N – множество целых чисел.

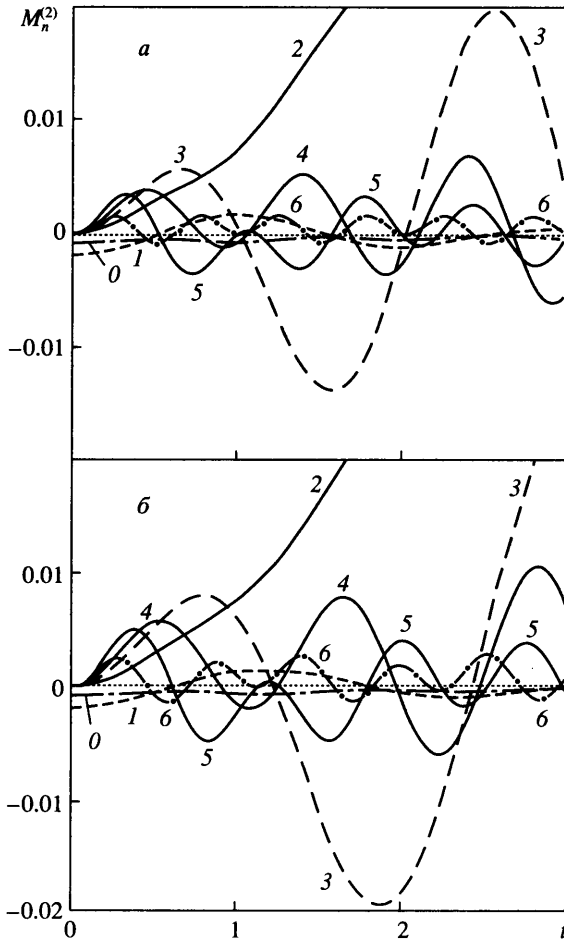
В последней сумме суммирование ведется по всем целым значениям m , для которых выражения под знаком факториала неотрицательны. Коэффициенты Клебша–Гордана [9] C_{ijn}^{000} и C_{ijn}^{-110} отличны от нуля только, если нижние индексы удовлетворяют соотношениям

$$|i-j| \leq n \leq (i+j); \quad i+j+n = 2g \quad (2.3)$$

Из выражения (2.1) видно, что в линейном по амплитуде начального возмущения в приближении форма поверхности капли определяется колебанием мод, присутствующих в спектре начального возмущения. Собственные частоты колебаний ω_n зависят от величины диэлектрической проницаемости жидкости ϵ_d (2.2), увеличиваясь по мере уменьшения ϵ_d . Критическое значение параметра W (характеризующего заряд капли Q), при котором поверхность капли теряет устойчивость, определяется условием обращения в ноль частоты колебаний основной моды ($n=2$): $W_{cr} = 0.25\kappa_1(2, \epsilon_d)$ и тоже растет с уменьшением ϵ_d . Таким образом, объемно заряженная диэлектрическая капля более устойчива по отношению к заряду, чем капля идеально проводящей жидкости с поверхностным распределением заряда.

Количество мод, возбуждаемых в результате межмодового взаимодействия во втором порядке малости, определяется условиями (2.3). Из (2.3) следует, что если в спектре мод, описывающих начальное возмущение поверхности, присутствуют две соседние колебательные моды – четная и нечетная, то амплитуда первой моды будет отлична от нуля в приближении второго порядка малости. Это обеспечивает неподвижность центра масс при $t \geq 0$ путем компенсации того смещения центра масс капли, которое вызвано возбуждением двух соседних мод.

Временные зависимости амплитуд мод, возбуждаемых за счет межмодового взаимодействия во втором порядке малости по ϵ , при различных видах начальной деформации равновесной сферической формы капли и для разных значений диэлектрической проницаемости жидкости ϵ_d приведены на фиг. 1 и фиг. 2. Согласно приведенным данным, из всех мод наибольшей скоростью роста обладает амплитуда основной моды, что связано, по-видимому, с наименьшей энергией ее возбуждения. Этот факт может служить косвенным подтверждением результата работы [3], где показано, что вблизи критического значения заряда независимо от формы начального возмущения реализация неустойчивости поверхности капли начинается с нарастания амплитуды основной моды.

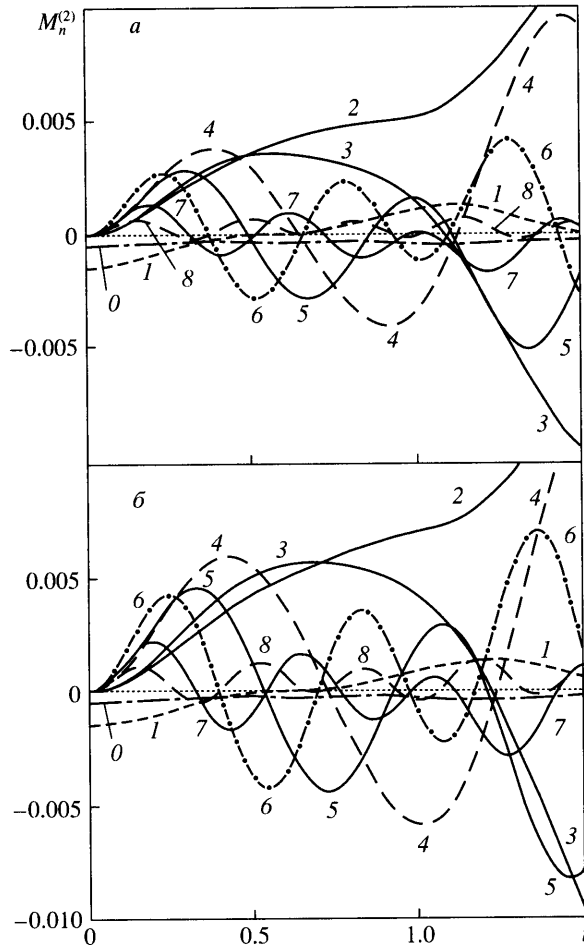


Фиг. 1. Зависимости амплитуд мод капиллярных осцилляций, возбуждающихся в результате взаимодействия, $M_n^{(2)}$ от времени t при $W = 0.975 W_{cr}(\epsilon_d)$, $\epsilon = 0.1$ и начальной деформации $\epsilon [P_2(\mu) + P_3(\mu)]/2$ для диэлектрической проницаемости: $\epsilon_d = 5$, $W = 4.37$ (а); $\epsilon_d = 100$, $W = 3.94$ (б). Цифра у кривой совпадает с номером моды

Из сравнения фиг. 1 и фиг. 2 можно заметить, что увеличение числа изначально возбужденных мод приводит к тому, что амплитуды мод второго порядка малости становятся более однородными по своей величине. С уменьшением диэлектрической проницаемости жидкости ϵ_d амплитуды и частоты всех мод капиллярных колебаний поверхности капли уменьшаются.

В [5] рассчитывались формы проводящей капли при начальном возбуждении одиночных мод (второй, третьей и четвертой) и были получены выражения, аналогичные (2.1).

В [5] также обсуждался вопрос о так называемом "вторичном гармоническом" резонансе, который возникает при некотором значении заряда Q_{cr} (меньшем критического для начала неустойчивости значения Q_{cr}), когда в спектре мод, возбужденных во втором порядке малости, присутствуют две моды, частоты которых удовлетворяют соотношению $\omega_m^2 = k^2 \omega_n^2$, где k – целое число. В [5] рассматривался случай



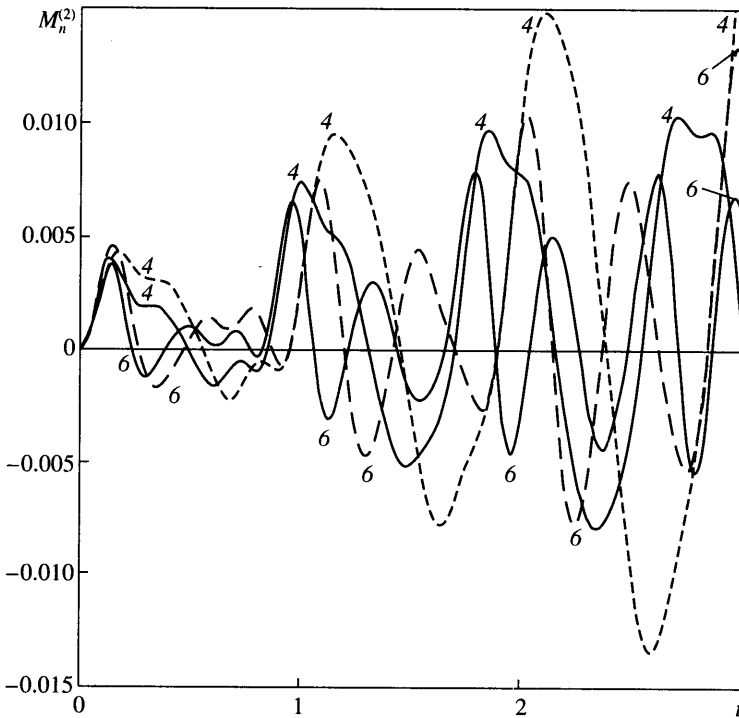
Фиг. 2. То же, что на фиг. 1 для начальной деформации $\epsilon [P_2(\mu) + P_3(\mu) + P_4(\mu)]/3$ при $\epsilon = 0.1$: $\epsilon_d = 5, W = 4.37$ (а); $\epsilon_d = 100, W = 3.94$ (б)

четвертой и шестой мод, для которых равенство $\omega_6^2 = 4\omega_4^2$ выполняется при Q_r , меньшем Q_{cr} . При этом в выражениях для амплитуд этих мод появляются слагаемые, знаменатели которых обращаются в нуль (см. (2.2) для $\lambda_{464}^{(-)}, \lambda_{644}^{(-)}, \lambda_{446}^{(+)}$), что должно приводить к резонансному увеличению амплитуд. Анализ (2.1), (2.2) показывает, что амплитуды четвертой и шестой мод содержат слагаемые, пропорциональные выражению

$$(2\omega_4 - \omega_6)^{-1} \sin[0.5(2\omega_4 - \omega_6)t]$$

ведущему себя при стремлении ω_6 к $2\omega_4$ как неопределенность типа 0/0. Раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталья, несложно получить конечный предел, равный $t/2$. В итоге, амплитуды четвертой и шестой мод при $Q = Q_r$ линейно нарастают со временем, как и должно быть при резонансе.

На фиг. 3 представлены зависимости от времени t амплитуд четвертой и шестой мод, возбуждающихся во втором порядке малости при начальном возмущении четвер-



Фиг. 3. Зависимости амплитуд четвертой и шестой мод капиллярных осцилляций, возбуждающихся в результате взаимодействия, $M_n^{(2)}$ от времени t при $\epsilon = 0.1$, $\epsilon_d = 5$ и начальной деформации $\epsilon [P_4(\mu) + P_6(\mu)]/2$ при резонансе, когда $W = 3.248$, $\omega_6^2 = 4 \omega_4^2$, (штриховые кривые) и вдали от резонанса при $W = 1.2$ (сплошные кривые). Цифра у кривой совпадает с номером моды

той и шестой мод с равными начальными амплитудами, для "резонансного" значения параметра $W = 3.248$ и значения, далекого от резонанса $W = 1.2$. Амплитуды четвертой и шестой мод при $W = W_r$ вычислены по формулам, полученным из (2.1), в результате предельного перехода $\omega_6 \rightarrow 2\omega_4$. Из графиков видно, что амплитуды реализующихся осцилляций обеих приведенных мод при резонансном значении параметра W превышают амплитуды осцилляций тех же мод при значениях W , отличающихся от резонансного.

В отличие от заряженной капли идеально проводящей жидкости при колебаниях поверхности капли диэлектрической жидкости с равномерным по объему распределением "замороженного" заряда смещения центра заряда относительно центра масс, когда в спектре изначально возбужденных мод присутствуют две с соседними номерами, не происходит, поскольку положение центра заряда определяется радиус-вектором

$$\mathbf{R}_q = \frac{1}{Q} \int_v \mathbf{r} dQ = -\frac{1}{Q} \int_v \mathbf{r} \mu_q dv = \frac{3}{4\pi} \int_v \mathbf{e}_r r^3 dr \sin \vartheta d\vartheta d\phi$$

$$v = [0 \leq r \leq 1 + \xi(\vartheta, t), 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi]$$

который в силу условия (2.11) равен нулю.

3. Из выражения (2.1), описывающего форму колеблющейся капли диэлектрической жидкости в произвольный момент времени, и соотношений (2.3) следует, что ког-

да среди колебательных мод, определяющих форму начального возмущения, имеются две моды с последовательными номерами, то в спектре колебаний, возбужденных во втором порядке малости, присутствует мода с $n = 1$, соответствующая трансляционному движению. Появление этой моды есть следствие требования неподвижности центра масс колеблющейся капли.

Если окружающая среда не вакуум и является сжимаемой с плотностью ρ_* , кинематической вязкостью ν , скоростью звука V , то осцилляции моды с $n = 1$, связанные с нелинейными колебаниями капли, приведут к генерации в среде звуковых волн дипольного типа на частотах $(\omega_i + \omega_{i-1})$, $(\omega_i - \omega_{i-1})$. Линейный анализ звукового излучения от колеблющихся капель приводит к излучению мультипольного типа (начиная с квадрупольного, связанного с осцилляциями основной моды $n = 2$). Дипольное излучение звука капель в линейном анализе не обнаруживается. Выражение для интенсивности дипольного звукового излучения от капли I_s , в размерной форме, когда радиус капли R сравним по величине с $(\nu/\omega_i)^{1/2}$, определится выражением [13]

$$I_s \equiv \frac{3\pi\rho_*\nu^2R^2}{2V^2} \{ (\omega_i + \omega_{i-1})^2 |U_{\omega_i + \omega_{i-1}}|^2 + (\omega_i - \omega_{i-1})^2 |U_{\omega_i - \omega_{i-1}}|^2 \} \quad (3.1)$$

где U_{ω_j} – амплитудное значение скорости движения поверхности капли, связанной с j -й частотой ее осцилляций. В рассматриваемой ситуации, принимая, что появление трансляционной моды ($n = 1$) связано с наличием в спектре мод, обуславливающих начальную деформацию, двух мод с соседними номерами i и $i - 1$, согласно (2.1), будем иметь

$$|U_{\omega_i \pm \omega_{i-1}}| \approx \varepsilon^2 R \frac{9ih_{i-1}h_i}{2(2i-1)(2i+1)} |\omega_i \pm \omega_{i-1}| \quad (3.2)$$

Подставим (3.2) в (3.1) и окончательно получим

$$I_s = \frac{3\pi\rho_*\nu^2R^2}{2V^2} \left\{ \varepsilon^2 R \frac{9ih_{i-1}h_i}{2(2i-1)(2i+1)} \right\}^2 \{ (\omega_i + \omega_{i-1})^4 + (\omega_i - \omega_{i-1})^4 \} \quad (3.3)$$

Оценим интенсивность дипольного звукового излучения, связанного с появлением трансляционной моды в спектре капиллярных колебаний поверхности капли дождя с $R = 250 \mu\text{m}$, которая совершает осцилляции за счет возбуждения второй и третьей мод своих колебаний при $\sigma = 73 \text{ дин/см}$, $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\rho_* = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$, $V = 3.3 \cdot 10^4 \text{ см/с}$, $W = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\nu = 0.15 \text{ см}^2/\text{с}$, $h_2 = h_3 = 0.5$. Из (3.3) несложно оценить интенсивность дипольного звукового излучения от одной капли $I_s \approx 10^{-13} \text{ эрг/с}$. Интегральная плотность мощности излучения звука на частоте порядка десятка кГц на границе пространства, занятого дождем, в 1 км^3 будет ≈ 28 децибелл (что соответствует силе звука человеческой речи).

Заключение. Исследование нелинейной динамики поверхности невязкой объемно заряженной диэлектрической капли, при произвольной начальной деформации равновесной сферической формы показало, что: возбуждение трансляционной моды ($n = 1$) осциллирующих капель, обнаруживаемое при асимптотических расчетах во втором порядке малости, когда среди колебательных мод, определяющих форму начальной деформации капли, имеются две и больше мод с соседними номерами, приводит к появлению дипольного звукового излучения. Дипольное электромагнитное излучение при этом не имеет места, поскольку центр заряда капли при осцилляциях ее формы совпадает с центром масс, который остается неподвижным. Указанные эффекты могут играть важную роль в анализе физических процессов, идущих в многофазных жид-

кокапельных системах искусственного и естественного происхождения: облаках, туманах, дожде.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ 00-15-9925.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капля и электродиспергирование жидкостей (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
2. Григорьев А.И. Электродиспергирование жидкости при реализации колебательной неустойчивости ее свободной поверхности // Журн. техн. физики. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 22–27.
3. Feng Z.C. Instability caused by the coupling between non-resonant shape oscillation modes of a charged conducting drop // J. Fluid Mech. 1997. V. 333. P. 1–21.
4. Feng Z.C., Leal L.G. Translational instability of a bubble undergoing shape oscillations // Phys. Fluids. 1995. V. 7. № 6. P. 1325–1336.
5. Tsamopoulos J.A., Brown R.A. Resonant oscillations of inviscid charged drops // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 373–395.
6. Ширяева С.О. Асимметрия нелинейного резонансного взаимодействия мод капиллярных осцилляций заряженной капли // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 22. С. 76–83.
7. Ширяева С.О. Нелинейные капиллярные колебания и устойчивость сильно заряженной капли при одномодовой начальной деформации большой амплитуды // Журн. техн. физики. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 27–35.
8. Ширяева С.О. Нелинейные осцилляции заряженной капли при многомодовой начальной деформации равновесной формы // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 173–184.
9. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.
11. Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
12. Облака и облачная атмосфера. Справочник / Ред. И.П. Мазин и др. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 647 с.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.

Ярославль

Поступила в редакцию
16.VII.2001