

УДК 532.59

© 2002 г. А.Т. ИЛЬИЧЕВ

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛНОВОДОВ В ЖИДКОСТИ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ ЭФФЕКТАМИ

Для жидкости конечной глубины рассматриваются длинные поверхностные гравитационно-капиллярные волны, а также волны под упругой пластиной, моделирующей ледовый покров. Такие волны описываются обобщенным уравнением Кадомцева – Петвиашвили, содержащим высшие по сравнению с обычным уравнением Кадомцева – Петвиашвили пространственные производные. Обобщенное уравнение Кадомцева – Петвиашвили имеет волноводные решения (волноводы), отвечающие периодическим в направлении распространения и локализованным в поперечном направлении бегущим волнам. Эти волны являются продуктом неустойчивости однородных (несущих) периодических волн относительно поперечных возмущений. Изучается устойчивость волноводов относительно продольных длинноволновых возмущений. Поведение этих возмущений зависит от значений волнового числа несущей периодической волны. Рассмотрены три интервала значений волновых чисел, соответствующих всем возможным типам основных уравнений.

*Ключевые слова:* гравитационно-капиллярные и гравитационно-изгибные волны, волновод, неустойчивость, собственная функция, коллапс.

В [1] выведено уравнение для длинных волн малой амплитуды на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины с дополнительными поверхностными эффектами

$$\partial_x(\partial_t \eta + \eta \partial_x \eta + \partial_x^3 \eta + \partial_x^5 \eta) + \partial_{xy}^2 \eta = 0 \quad (0.1)$$

где  $(t, x, y)$  – безразмерные время и декартовы координаты,  $\eta = \eta(t, x, y)$  – безразмерное отклонение поверхности жидкости. Эти эффекты обусловлены либо гравитационно-капиллярными силами, либо изгибными силами и моментами в тонкой упругой пластине, свободно плавающей на поверхности жидкости. При определенных обстоятельствах такая пластина может моделировать ледовый покров [2]. В случае гравитационно-капиллярных волн число Бонда  $Bo = T/(\rho g H^2)$  ( $T$  – поверхностное натяжение,  $\rho$  – плотность,  $H$  – глубина жидкости) должно быть близким к критическому значению  $Bo^* = 1/3$ , оставаясь меньше его. Близость числа Бонда к  $1/3$  влечет за собой малость характерных пространственных масштабов: глубина жидкости определяется из соотношения  $H = (3T/\rho g)^{1/2}$  и имеет порядок нескольких миллиметров [3]. На таких масштабах необходимо учитывать влияние вязкости, в связи с чем бездиссипативная модель фактически не имеет физического смысла. Поэтому для описания гравитационно-капиллярных волн уравнение (0.1) имеет лишь формальный характер. Экспериментальная проверка справедливости (0.1) для этих волн в условиях малой гравитации, когда диссипативные эффекты ослабевают, т.е. число Рейнольдса  $Re = Ha\sqrt{gH}/(\nu_1 \lambda)$  ( $a$  – характерная амплитуда,  $\lambda$  – характерная длина волны,  $\nu_1$  – кинематическая вязкость) увеличивается, обсуждается в [3].

Иначе дело обстоит в случае ледового покрова, когда характерные масштабы существенно больше и влиянием вязкости можно пренебречь [4]. В связи с этим

следует заметить, что для гравитационно-капиллярных волн близость числа Бонда к  $\frac{1}{3}$  означает малость коэффициента при третьей степени волнового числа в разложении частоты в пределе длинных волн. Поэтому в этом разложении необходимо учитывать слагаемое с пятой степенью волнового числа, которое имеет порядок кубического члена. При наличии упругой пластины значение коэффициента перед кубическим членом в разложении частоты по волновому числу является конечным. В этом случае коэффициент перед пятой степенью волнового числа принимает очень большое значение, вследствие того что модуль Юнга для льда имеет значение  $E \sim 10^{10}$  н/м<sup>2</sup>. Условие того, что слагаемые с третьей и пятой степенями волнового числа в дисперсионном соотношении имеют одинаковый порядок, принимает вид

$$\frac{E}{12\rho(1-\sigma^2)} \sim \frac{\lambda^2 H^2}{h^3}$$

где  $\sigma$  – коэффициент Пуассона,  $h$  – толщина упругой пластины. Так, для  $h \sim 1$  м,  $H \sim 10$  м имеем  $\lambda \sim 100$  м и характерную амплитуду волны порядка 1 м [1].

В [5] показано, что уравнение (0.1) имеет волноводные решения (далее называемые также волноводами), которые в случае их устойчивости осуществляют распространение энергии без дисперсионного расплывания. В этом смысле эти волны представляют собой нелинейные структуры, аналогичные плоским уединенным волнам (солитонам). Волноводы являются продуктом модуляционной неустойчивости несущих периодических волн, распространяющихся вдоль оси  $x$ , относительно возмущений вдоль оси  $y$ . Явление образования волноводов в результате такой неустойчивости носит название самоканализации [6].

В настоящей работе изучается неустойчивость волноводов относительно продольных длинноволновых возмущений. Такая неустойчивость в терминологических целях названа вторичной на том основании, что сам волновод является продуктом неустойчивости несущей волны – первичной неустойчивости. Как и в [5], неустойчивость изучается при помощи альтернативного описания в рамках уравнений Дэви – Стюартсона для медленно меняющихся амплитуд гармонических волн. Волноводным решениям уравнения (0.1) соответствуют солитонные решения уравнений Дэви-Стюартсона, и изучение устойчивости волноводов по отношению к продольным возмущениям оказывается эквивалентным изучению устойчивости солитонов относительно поперечных возмущений.

Исследование устойчивости, представленное в настоящей статье, выполнено при помощи метода работы [7] (см. также обзор [8]), где для анализа неустойчивости солитонных решений нелинейного уравнения Шредингера относительно длинноволновых поперечных возмущений использовался асимптотический метод, основанный на построении неустойчивых собственных функций по нейтрально устойчивым собственным функциям, которые находятся в явном виде. В [7] найдены четная и нечетная собственные функции, которые отвечают неустойчивым возмущениям: четная – для эллиптического уравнения Шредингера, а нечетная – для гиперболического. При этом во всех случаях солитон и соответственно волновод являются неустойчивыми. В [9] найдено пороговое значение волнового числа возмущения, за которым имеет место нормальная устойчивость солитонов в эллиптическом случае. Неустойчивая часть дисперсионной кривой в этом случае представлена, например, в [10]. В [11] численно найдено пороговое значение волновых чисел неустойчивых возмущений в гиперболическом случае, а также построена неустойчивая часть дисперсионной кривой.

Нелинейное уравнение Шредингера описывает, в частности, волновые пакеты на поверхности жидкости бесконечной глубины. Результаты данной работы показывают, что при наличии среднего потока, возникающего при переходе от бесконечной глубины к конечной, а также при учете упомянутых поверхностных эффектов волновод подвергается более жесткой неустойчивости в случае, который является прямым обобщением случая эллиптического уравнения Шредингера.

**1. Волноводные решения. Первичная неустойчивость.** Рассмотрим решения (0.1) типа бегущих волн, распространяющихся со скоростью  $V$  в направлении оси  $x$ . Эти решения имеют вид  $\eta = \eta(x - Vt, y)$  и удовлетворяют уравнению

$$\partial_{yy}\eta - V\partial_{xx}\eta + \partial_x(\eta\partial_x\eta) + \partial_x^4\eta + \partial_x^6\eta = 0 \quad (1.1)$$

где оставлено старое обозначение  $x$  за комбинацией  $x - Vt$ . Предположим, что  $V = V_1 + \mu$ , где  $V_1 = -k^2 + k^4$ ,  $k > 1/\sqrt{5}$  – вещественный параметр, имеющий смысл волнового числа [5], а  $\mu$  – малый параметр. Выберем координату  $y$  в качестве неограниченной динамической переменной. Тогда уравнение (1.1) записывается в виде бесконечномерной динамической системы

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \eta_1 \\ \dot{\eta}_1 &= V_1\partial_x^2\eta - \partial_x^4\eta - \partial_x^6\eta + \mu\partial_x^2\eta - (\partial_x\eta)^2 - \eta\partial_x^2\eta \end{aligned} \quad (1.2)$$

где точка обозначает дифференцирование по  $y$ . Система уравнений (1.2) может быть переписана в общем виде

$$\dot{\mathbf{w}} = G\mathbf{w} + F(\mu, \mathbf{w}), \quad \mathbf{w} = \{\eta, \eta_1\}^T \quad (1.3)$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V_1\partial_x^2 - \partial_x^4 - \partial_x^6 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(\mu, \mathbf{w}) = \{0, \mu\partial_x^2\eta - (\partial_x\eta)^2 - \eta\partial_x^2\eta\}^T \quad (1.4)$$

К динамической системе (1.3), (1.4) применима теорема о центральном многообразии (подробности см. в [5]), т.е. все ограниченные и периодические по  $x$  решения (1.3), (1.4) в окрестности состояния покоя  $\mathbf{w} = 0$  имеют вид

$$\mathbf{w} = a_0\Phi_0 + a_1\Phi_1 + \Gamma(\mu, a_0, a_1) \quad (1.5)$$

где  $\Phi_0, \Phi_1$  – собственный и присоединенный векторы оператора  $G$ , отвечающие двукратному нулевому собственному значению:  $G\Phi_0 = 0, G\Phi_1 = \Phi_0$

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos kx, \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos kx$$

а  $\Gamma$  – нелинейная вектор-функция своих аргументов. Зависимость векторов  $\Phi_{0,1}$  и  $\Gamma$  от  $x$  в (1.5) не обозначена. Амплитуды  $a_0$  и  $a_1$  удовлетворяют приведенной системе

$$\dot{a}_0 = a_1, \quad \dot{a}_1 = f(\mu, a_0, a_1) \quad (1.6)$$

где  $f$  – также нелинейная функция своих аргументов.

Система уравнений (1.6) приводится к квазинормальной форме [12]

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= a_1, \\ \dot{a}_1 &= -k^2\mu a_0 + \beta a_0^2 + \gamma a_0^3 + O(\mu a_0, a_0^2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

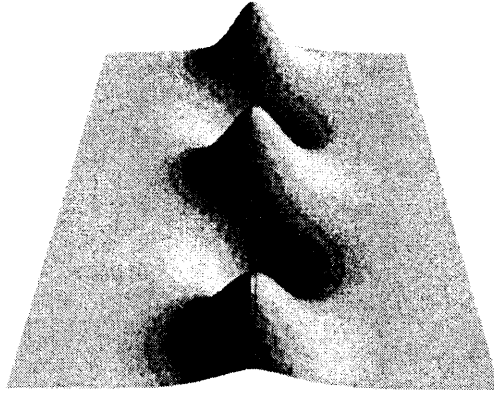
$$\beta = 0, \quad \gamma = \frac{\Delta}{4}, \quad \Delta = \frac{1}{6(1-5k^2)} < 0$$

Локализованное решение (1.7) имеет вид

$$a_0^* = \pm k \sqrt{\frac{2\mu}{\gamma}} \operatorname{ch}^{-1} k\sqrt{|\mu|} |y| + O(\mu) \quad (1.8)$$

Из (1.5), возвращаясь к старому обозначению переменной  $x$ , получим выражение для поверхностного отклонения  $\eta$  [5]

$$\eta = \pm k \sqrt{\frac{2\mu}{\gamma}} \operatorname{ch}^{-1} k\sqrt{|\mu|} |y| \cos(kx - Vt) + O(\mu) \quad (1.9)$$



Фиг. 1. Форма волновода для поверхностной волны возвышения

Форма волновода, представляющего из себя волну возвышения, показана на фиг. 1. Волновод (1.9) является докритической волной: его скорость  $V$  меньше критической скорости  $V_1$ , при которой происходит бифуркация из состояния покоя [5], т.е.  $\mu < 0$ .

Будем искать асимптотическое решение (0.1) в виде

$$\eta = \varepsilon A(T, X, Y) \exp i\theta + \varepsilon^2 A_2(T, X, Y) \exp 2i\theta + \text{к.с.} + \varepsilon^2 A_0(T, X, Y) + O(\varepsilon^3) \quad (1.10)$$

$$\theta = k(x - Vt), \quad V = V_1 - \varepsilon^2, \quad T = \varepsilon t, \quad X = \varepsilon x, \quad Y = \varepsilon y$$

$\varepsilon$  – малый параметр,  $A$  и  $A_2$  – медленно меняющиеся комплексные амплитуды,  $A_0$  – вещественная функция, отвечающая среднему потоку, а  $V_1$  – критическая скорость. Подставляя (1.10) в (0.1) и собирая члены при  $\varepsilon^m \exp(in\theta)$ ,  $\{m, n\} = \{1, 1\}, \{2, 1\}, \{3, 1\}, \{2, 2\}, \{4, 0\}$ , после соответствующих преобразований получим уравнения Дэви – Стюартсона [5]

$$iA_\tau - kA + \frac{\omega''(k)}{2} A_{XX} - \frac{\Delta}{k} A |A|^2 - kAA_0 + \frac{1}{k} A_{YY} = 0, \\ -\omega'(k)A_{0XX} + |A|_{XX}^2 + A_{0YY} = 0 \quad (1.11)$$

где  $\omega(k) = -k^3 + k^5$ ,  $\tau = \varepsilon T$ , индексы  $\tau$ ,  $X$  и  $Y$  означают дифференцирование по соответствующим переменным, штрих – дифференцирование по  $k$ , а обозначение  $X$  оставлено для комбинации  $X - \omega'(k)T$ .

Уравнения (1.11) имеют частное решение вида  $A = \Psi(Y)$ ,  $A_0 = 0$ , где  $\Psi(Y)$  – вещественная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\ddot{\Psi}(Y) = k^2 \Psi(Y) + \Delta \Psi^3(Y) \quad (1.12)$$

точки означают дифференцирование по  $Y$ . Локализованное решение этого уравнения имеет вид

$$\Psi(Y) = \pm \sqrt{\frac{-2}{\Delta}} k \operatorname{ch}^{-1} kY \quad (1.13)$$

Сравнивая (1.7), (1.8) с (1.12), (1.13), получим соответствие

$$\Psi(Y) = \frac{a_0^*}{2\varepsilon}, \quad \varepsilon^2 = -\mu$$

Для новых зависимых вещественных переменных, определяемых равенством  $A = a \exp i\psi$ , уравнения (1.11) записываются в форме трех уравнений

$$\begin{aligned} a_\tau + \frac{\omega''}{2}(2a_X\psi_X + a\psi_{XX}) + \frac{1}{k}(2a_Y\psi_Y + a\psi_{YY}) &= 0, \\ -a\psi_\tau - ka + \frac{\omega''}{2}(a_{XX} - a\psi_X^2) - \frac{\Delta}{k}a^3 - kA_0a + \frac{1}{k}(a_{YY} - a\psi_Y^2) &= 0 \\ -\omega'A_{0XX} + (a^2)_{XX} + A_{0YY} &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Решение (1.14), отвечающее несущей волне, имеет вид

$$a = a^0 = \text{const}, \quad \psi = \psi^0 = \left(-k - (a^0)^2 \frac{\Delta}{k}\right)\tau, \quad A_0 = 0$$

Несущая волна является однородной (не зависящей от  $Y$ ) периодической волной. Подставляя в (1.14)

$$a = a^0 + \delta a, \quad \psi = \psi^0 + \delta\psi, \quad A_0 = \delta A_0$$

$$\delta a = \alpha_1 \exp i(\kappa_{\parallel}X + \kappa_{\perp}Y - \Omega\tau), \quad \delta\psi = \alpha_2 \exp i(\kappa_{\parallel}X + \kappa_{\perp}Y - \Omega\tau)$$

$$\delta A_0 = \alpha_3 \exp i(\kappa_{\parallel}X + \kappa_{\perp}Y - \Omega\tau)$$

где  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – постоянные, получим дисперсионное уравнение

$$\Omega^2 = \frac{1}{4} \left( \omega''\kappa_{\parallel}^2 + 2\frac{\kappa_{\perp}^2}{k} \right)^2 + (a^0)^2 \left( \frac{k\kappa_{\parallel}^2}{\omega'\kappa_{\parallel}^2 - \kappa_{\perp}^2} + \frac{\Delta}{k} \right) \left( \omega''\kappa_{\parallel}^2 + 2\frac{\kappa_{\perp}^2}{k} \right) \quad (1.15)$$

Рассмотрим однородные поперечные возмущения, когда  $\kappa_{\parallel} = 0$  и возмущения не зависят от координаты  $X$ . Тогда дисперсионное уравнение (1.15) принимает вид

$$\Omega^2 = \frac{\kappa_{\perp}^4}{k^2} + 2\frac{(a^0)^2}{k^2} \Delta \kappa_{\perp}^2 \quad (1.16)$$

Волновые числа  $\kappa_{\perp}$ , удовлетворяющие (1.16) и лежащие внутри интервала  $(0, \kappa_0)$ , где  $\kappa_0^2 = -2(a^0)^2\Delta$ , соответствуют растущим со временем возмущениям. Значение  $\kappa_0$  определяет порог неустойчивости, т.е. для всех  $\kappa_{\perp} \geq \kappa_0$ , несущая периодическая волна является устойчивой. Из (1.16) получим максимальный инкремент роста:  $\Omega(\kappa_{\max}) = -(a^0)^2\Delta/k$ ,  $\kappa_{\max}^2 = -(a^0)^2\Delta$ ,  $\kappa_{\max} < \kappa_0$ .

На нелинейной стадии эволюции рассматриваемых возмущений при  $\kappa \in (0, \kappa_0)$  поверхностная несущая волна подвергается самоканализации, т.е. самофокусировке под действием поперечных возмущений, распадаясь на волноводы, подобные (1.9) [5].

**2. Вторичная неустойчивость.** Сделаем в первом уравнении (1.11) замену  $B = \sqrt{|\Delta|}A$ . При такой замене солитонное решение (1.13) примет вид

$$\Phi(Y) = \pm\sqrt{2}k \operatorname{ch}^{-1} kY$$

Положим далее  $B = \Phi(Y) + u + iv$ ,  $A_0 = w$ , где  $u$ ,  $v$  и  $w$  – малые вещественные функции переменных  $\tau$ ,  $X$ ,  $Y$ . Тогда из (1.11), пренебрегая нелинейными членами, получим

$$\left( \frac{\omega''(k)k}{2} \partial_X^2 + \partial_Y^2 + 3\Phi^2(Y) - k^2 \right) u - k^2\Phi(Y)w = k\partial_\tau u$$

$$\left( \frac{\omega''(k)k}{2} \partial_X^2 + \partial_Y^2 + \Phi^2(Y) - k^2 \right) v = -k \partial_\tau u$$

$$[-\omega'(k) \partial_X^2 + \partial_Y^2] w + \frac{2}{|\Delta|} \Phi(Y) \partial_X^2 u = 0 \quad (2.1)$$

Как уже упоминалось, будет рассматриваться неустойчивость волноводов относительно длинноволновых продольных возмущений. Поэтому будем искать собственные функции в (2.1) в виде

$$\{u, v, w\} = \{u^*, v^*, w^*\} \exp\left(\frac{\varepsilon \lambda \tau}{k}\right) \exp(i\varepsilon l X), \quad \varepsilon \ll 1 \quad (2.2)$$

где функции  $u^*, v^*, w^*$  зависят только от  $Y$ . Подставляя (2.2) в (2.1), получим

$$L_+ u^* = \varepsilon^2 s u^* + k^2 \Phi(Y) w^* + \varepsilon \lambda v^*, \quad L_- v^* = \varepsilon^2 s v^* - \varepsilon \lambda u^*, \quad S w^* = \delta \Phi(Y) u^*$$

$$L_+ = \frac{d^2}{dY^2} + 3\Phi^2(Y) - k^2, \quad L_- = \frac{d^2}{dY^2} + \Phi^2(Y) - k^2$$

$$S = \frac{d^2}{dY^2} + \varepsilon^2 \omega'(k) l^2 \quad (2.3)$$

$$\delta = \frac{2l^2}{|\Delta|}, \quad s = \frac{\omega''(k)kl^2}{2} \quad (2.4)$$

Первые три уравнения в (2.3) определяют задачу на собственные значения со связью, заданной третьим уравнением. Неустойчивость имеет место, если существует собственная вектор-функция  $\{u^*, v^*, w^*\}^T$ , удовлетворяющая (2.3) с  $\lambda > 0$ . Компоненты  $u^*$  и  $v^*$  собственной функции должны стремиться к нулю на бесконечности. Компонента  $w^*$  также стремится к нулю при  $|y| \rightarrow \infty$ , когда оператор  $S$  – эллиптический, а в случае гиперболического  $S$  имеет периодическую асимптотику на бесконечности.

Следуя [7], будем искать решение (2.3) в виде формального асимптотического разложения по амплитудам

$$u^* = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad v^* = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots$$

$$w^* = \varepsilon^2 w_0 + \dots, \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_1 + \dots \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (2.3), в нулевом порядке по  $\varepsilon$  имеем

$$L_+ u_0 = 0, \quad L_- v_0 = 0$$

откуда следует, что ненулевое решение имеет вид

$$u_0 = \dot{\Phi}(Y), \quad v_0 = \Phi(Y) \quad (2.6)$$

В первом порядке по  $\varepsilon$  получим

$$L_+ u_1 = \lambda_0 v_0, \quad L_- v_1 = -\lambda_0 u_0$$

Эта система уравнений имеет решение

$$u_1 = \lambda_0 \frac{d\Phi}{d\alpha}, \quad v_1 = -\frac{\lambda_0}{2} y \Phi(Y), \quad \alpha = k^2 \quad (2.7)$$

Во втором порядке по  $\varepsilon$

$$L_+ u_2 = \lambda_0 v_1 + s u_0 + \alpha \Phi(Y) w_0, \quad L_- v_2 = -\lambda_0 u_1 + s v_0$$

$$S w_0 = \delta \Phi(Y) (u_0 + \varepsilon u_1) \quad (2.8)$$

Условие разрешимости первых двух уравнений (2.8) в силу самосопряженности операторов  $L_{\pm}$  служит условие ортогональности правых частей этих уравнений соответственно функциям  $u_0$  и  $v_0$  из (2.6). Формально в третьем уравнении (2.8) следовало бы писать  $S_0 = d^2/dY^2$  вместо  $S$ , а также опустить член, пропорциональный  $\epsilon$ , в правой части этого уравнения. Однако, во-первых, оператор  $S$  является сингулярным возмущением оператора  $S_0$  и верхняя грань модуля разности решений уравнений  $Sf_1 = g$  и  $S_0f_2 = g$ , где  $g$  – убывающая функция, не есть величина порядка  $\epsilon^2$  и вообще не зависит от  $\epsilon$ . Во-вторых, как будет следовать из дальнейшего, амплитуда  $f_1$  при  $g$  конечной и четной (а как видно из (2.7)  $u_1$  является четной функцией) будет иметь порядок  $\epsilon^{-1}$ , так что слагаемое, пропорциональное  $\epsilon$ , должно быть также оставлено в третьем уравнении в (2.8).

Условие разрешимости (2.8) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\lambda_0 v_1 + sv_0 + \alpha\Phi(Y)w_0)dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} v_0(-\lambda_0 u_1 + sv_0)dx = 0 \quad (2.9)$$

Собственные функции  $u_0, v_0, u_1, v_1$  определяются из (2.6), (2.7) соответственно. Функция  $w_0$  определяется обращением оператора  $S$  в (2.8).

Рассмотрим процедуру построения функции  $w_0$  в случае, когда оператор  $S$  является эллиптическим ( $\omega'(k) < 0$ ). Эта процедура аналогичным образом применима и в гиперболическом случае ( $\omega'(k) > 0$ ). Представим решение третьего уравнения в (2.8) в виде  $w_0 = w_0^0 + \epsilon w_0^1$  и рассмотрим отдельно два уравнения

$$Sw_0^0 = \delta\Phi(Y)u_0, \quad Sw_0^1 = \delta\Phi(Y)u_1 \quad (2.10)$$

Обозначим  $F[f]$  образ Фурье функции  $f$

$$F[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f \exp(-ivx)dx$$

Применяя преобразование Фурье к обеим частям первого уравнения (2.10) и изменяя порядок дифференцирования по  $Y$  в определенном интеграле, получим

$$F[w_0^0] = -\frac{i\delta}{2} \frac{v^2 \operatorname{sh}^{-1} \vartheta}{2v^2 + \epsilon^2 l^2 |\omega'(k)|}, \quad \vartheta = \left( \frac{\pi v}{2\sqrt{\alpha}} \right) \quad (2.11)$$

При выводе (2.11) использована формула  $F[\operatorname{ch}^{-2}(x)] = \frac{1}{2} v \operatorname{sh}^{-1}(\pi v / 2)$ .

Применяя обратное преобразование Фурье к (2.11), получим

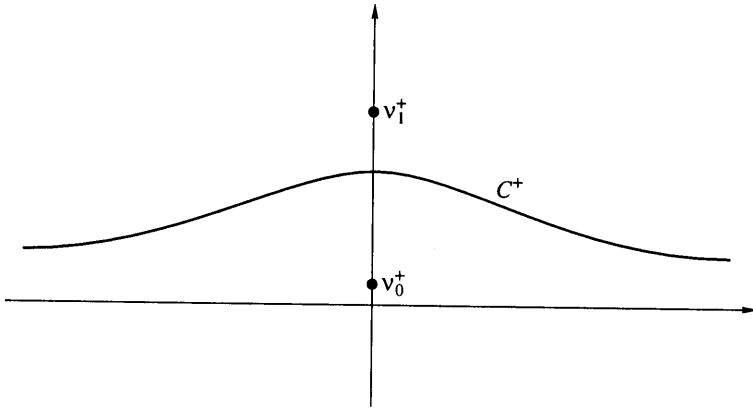
$$w_0^0 = -\frac{i\delta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2 \operatorname{sh}^{-1} \vartheta}{v^2 + \epsilon^2 l^2 |\omega'(k)|} \exp(ivY)dv \quad (2.12)$$

Подынтегральная функция в (2.12) имеет особенности на мнимой оси плоскости комплексного переменного  $v$ . Этими особенностями являются простые полюса

$$v_0^{\pm} = \pm i\epsilon l \sqrt{|\omega'(k)|}, \quad v_n^{\pm} = \pm 2i\sqrt{\alpha n}, \quad n \in \mathbf{N}^+$$

Главная часть асимптотики интеграла (2.12) на положительной бесконечности  $Y > 0$  может быть вычислена из следующих соображений. Рассмотрим составной контур на комплексной плоскости  $v$ , состоящий из действительной оси и контура  $C^+$ , проходящего справа налево и лежащего выше полюса  $v_0^+$  (фиг. 2). По теореме о вычетах имеем

$$w_0^0 + \int_{C^+} F[w_0^0] \exp ivY dY = 2\pi i \operatorname{res}_{v_0^+} F[w_0^0] \exp ivY \quad (2.13)$$



Фиг. 2. Расположение контура интегрирования  $C^+$  на комплексной плоскости  $v$

Пользуясь тем, что интеграл по контуру  $C^+$  стремится к нулю на плюс бесконечности быстрее, чем вычит в правой части (2.13), получим главную часть асимптотики

$$w_0^0 \rightarrow \delta \sqrt{\alpha} \exp(-\epsilon l \sqrt{|\omega'(k)|} |Y|), \quad Y \rightarrow +\infty \quad (2.14)$$

Асимптотика на минус бесконечности вычисляется аналогичным образом с использованием контура  $C^-$ , полученного из  $C^+$  зеркальным отражением относительно вещественной оси

$$w_0^0 \rightarrow -\delta \sqrt{\alpha} \exp(\epsilon l \sqrt{|\omega'(k)|} |Y|), \quad Y \rightarrow -\infty \quad (2.15)$$

Легко видеть, что функция  $w_0^0$  является нечетной. Аналогичным образом может быть вычислена главная часть асимптотики на бесконечности четной функции  $w_0^1$

$$w_0^1 = -\frac{\pi \lambda_0 \delta}{8\alpha \sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2 \operatorname{sh}^{-2} \vartheta \operatorname{ch} \vartheta}{v^2 + \epsilon^2 l^2 |\omega'(k)|} \exp i v Y dv$$

которая является решением второго уравнения (2.10)

$$w_0^1 \rightarrow -\frac{1}{2\epsilon} \frac{\lambda_0 \delta}{\sqrt{\alpha} l \sqrt{|\omega'(k)|}} \exp(-\epsilon l \sqrt{|\omega'(k)|} |Y|), \quad Y \rightarrow \pm\infty \quad (2.16)$$

Из (2.16) видно, что амплитуда  $w_0^1$  имеет порядок  $\epsilon^{-1}$ , и потому необходимо учитывать слагаемое, пропорциональное  $u_1$  в правой части третьего уравнения (2.8). В силу четности функция  $w_0^1$  не оказывает влияния на условия совместности (2.9); в эти условия входит лишь нечетная часть  $w_0^0$  функции  $w_0$ .

Для вычисления интегралов в (2.9) в нулевом порядке по  $\epsilon$  заметим, что  $w_0^0$  сходится к решению уравнения

$$S_0 w_{00}^0 = \delta \Phi(Y) u_0 \quad (2.17)$$

в пространстве распределений при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Иными словами

$$\int_{-\infty}^{\infty} (w_0^0 - w_{00}^0) \varphi \rightarrow 0, \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0$$



где  $\varphi$  – произвольная бесконечно гладкая быстроубывающая функция на вещественной прямой  $\mathbf{R}$ . Из изложенного следует, что в нулевом порядке по  $\epsilon$  вместо  $w_0$  в (2.9) можно писать  $w_{00}^0$ . Решением уравнения (2.17) является

$$w_{00}^0 = \sqrt{\alpha\delta} \operatorname{th}(\sqrt{\alpha}Y) \quad (2.18)$$

Легко видеть, что (2.18) имеет асимптотику (2.14), (2.15) в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ . Подставляя (2.18) в (2.9), получим (возвращаясь от  $\alpha$  к  $k$  в обозначениях)

$$\lambda_0^2 = \frac{1}{3}(\delta k^4 - sk^2), \quad \lambda_0^2 = 4sk^2 \quad (2.19)$$

Каждое из уравнений в (2.19) соответствует одному из двух типов возмущений волнового поля  $B$ . Как и в случае нелинейного уравнения Шредингера [7], эти возмущения подразделяются на четные и нечетные.

Поведение возмущений, определяемое уравнениями (2.19), зависит от знака коэффициента  $s$ , который в свою очередь зависит от того, какому интервалу на вещественной оси принадлежит волновое число несущей волны  $k$ . Так, при  $s > 0$  ( $\omega''(k) > 0$ ),  $k \in I_1$ , где

$$I_1 = \{k \in \mathbf{R}, \sqrt[3]{10} < k < \sqrt[3]{3/5}\}$$

Из (2.19) видно, что возмущения с  $u_0 \neq 0$  являются растущими и имеет место неустойчивость волновода относительно четных возмущений. Из (2.4) следует, что для любого  $k$  из полуинтервала  $k > 1/\sqrt{5}$  правая часть первого уравнения в (2.19) имеет положительный знак и при  $s > 0$ . Отсюда следует, что и возмущения с  $u_0 \neq 0$  также являются растущими и при  $k \in I_1$  волновод неустойчив относительно обоих типов возмущений. В этом состоит отличие от случая нелинейного уравнения Шредингера эллиптического типа, в котором растущим является только четное возмущение. Уравнение Дэви-Стюартсона (1.11) в этом случае имеет эллиптико-эллиптический тип, т.е. дифференциальные по пространственным переменным операторы при  $A$  и  $A_0$  в (1.11) являются эллиптическими.

При  $\omega''(k) < 0$ , т.е. при  $k \in I_2$ , где

$$I_2 = \{k \in \mathbf{R}, \sqrt{1/5} < k < \sqrt[3]{10}\}$$

растущим является только нечетное возмущение, соответствующее  $u_0 \neq 0$ , и волновод неустойчив относительно этих возмущений. В этом случае тип уравнения (1.11) – гиперболично-эллиптический, т.е. соответствующий оператор в первом уравнении имеет гиперболический тип, а во втором – эллиптический.

Собственная функция  $w^*$  имеет периодическую асимптотику на бесконечности, а волновод неустойчив относительно четных и нечетных возмущений при  $\omega'' > 0$  и  $\omega'(k) > 0$ , т.е.  $k \in I_3$ ,

$$I_3 = \{k \in \mathbf{R}, k > \sqrt[3]{5}\}$$

когда тип уравнения (1.11) – эллиптико-гиперболический. Гиперболично-гиперболический тип (1.11) невозможен, так как невозможно одновременное выполнение неравенств  $\omega''(k) < 0$  и  $\omega'(k) > 0$ .

**3. Обсуждение.** Не зависящая от поперечной координаты периодическая волна на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины с дополнительным поверхностным давлением, которое обусловлено присутствием гравитационно-капиллярных или изгибно-гравитационных сил, подвержена неустойчивости относительно поперечных возмущений. В результате этой неустойчивости образуются волноводы – волны, периодические в направлении распространения и локализованные в поперечном направлении. В настоящей работе изучается неустойчивость этих волн отно-

сительно длинноволновых продольных возмущений. Эта неустойчивость реализуется для возмущений в виде собственной функции – убывающего или ограниченного по пространству и растущего по времени решения линеаризованных на фоне волноводного решения основных уравнений, которые описывают распространение поверхностных волн. В обсуждаемой здесь модели основными уравнениями являются уравнения (1.11) для огибающих, которые получены из уравнения для длинных волн (0.1) в результате стандартной асимптотической процедуры. Как и в случае нелинейного уравнения Шредингера, имеют место два типа возмущений – четные и нечетные.

В зависимости от значений волнового числа  $k$  реализуются следующие случаи.

1. Эллиптико-эллиптический тип уравнения (1.11):  $k \in I_1$ . Волновод неустойчив относительно обоих типов возмущений.
2. Гиперболично-эллиптический тип уравнения (1.11):  $k \in I_2$ . Волновод неустойчив относительно только нечетных возмущений.
3. Эллиптико-гиперболический тип уравнения (1.11):  $k \in I_3$ . Волновод неустойчив относительно обоих типов возмущений.

Обсудим последовательно все три случая.

*Случай 1.* Важным вопросом, который возникает при наличии неустойчивости, является вопрос о пороговом значении волнового числа, за которым возмущения убывают и волновод является устойчивым. В рамках используемого в данной работе асимптотического метода установить существование порога неустойчивости не представляется возможным, так как сам метод предполагает малость волнового числа. Для эллиптического нелинейного уравнения Шредингера пороговое значение конечно [9]. Приведем наводящие соображения, показывающие, что порог неустойчивости существует и в данном случае. Для этого представим возмущения  $B$  и  $A_0$  в виде  $(f + ig)\exp(i l X)$  и  $h\exp(i l X)$  соответственно, где  $f, g$ , и  $h$  являются действительными функциями от времени  $\tau$  и координаты  $Y$ . Рассмотрим сначала нелинейное уравнение Шредингера, которое получается из первого уравнения (1.11), если положить  $A_0 = 0$  и сделать замену  $A \rightarrow B$ , указанную в начале разд. 2. Линеаризованное на фоне  $B = \Phi(Y)$  нелинейное уравнение Шредингера примет вид

$$(L_+ - sl^2)f = k\partial_\tau g, \quad (L_- - sl^2)g = -k\partial_\tau f$$

где  $L_\pm$  дается (2.3). Исключая  $g$  из второго уравнения, получим

$$(L_- - sl^2)(L_+ - sl^2)g = -k^2\partial_{\tau\tau}f$$

Опуская старшую производную, которая на первых этапах оказывает малое влияние на эволюцию возмущений, это уравнение можно переписать в виде

$$2[2\Phi^2(Y) - k^2 - sl^2]\partial_Y^2 f + \text{ч.н.п.} = -k^2\partial_{\tau\tau}f \quad (3.1)$$

где аббревиатура ч.н.п. обозначает члены с производными от неизвестной функции  $f$  первого и нулевого порядка. При  $l > l_0$ ,  $l_0^2 = 3k^2/s$  уравнение (3.1) имеет гиперболический тип для всех  $Y \in \mathbf{R}$ . При  $l < l_0$  на оси  $Y$  существуют симметричные вокруг нуля отрезки, внутри которых уравнение (3.1) имеет эллиптический тип, задача Коши для которого не является корректной и гладкие начальные данные для возмущений могут возрастать с течением времени. Интересно, что величина  $l_0$  в точности равна пороговому значению неустойчивости [9].

Для уравнения Дэви – Стюартсона (1.11) аналог уравнения (3.1) имеет вид

$$2[2\Phi^2(Y) - k^2 - sl^2]\partial_Y^2 f - k^2\Phi(Y)\partial_Y^2 h + \text{ч.н.п.} = -k^2\partial_{\tau\tau}f \\ - |\omega'(k)|l^2 h + \partial_Y^2 h = \delta l^2\Phi(Y)f \quad (3.2)$$

Функция  $h$  выражается из второго уравнения (3.2) при помощи интегрального оператора

$$h = -\frac{\delta l^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(Z)f(Z)\exp i\nu(Y-Z)}{\nu^2 + |\omega'(k)|l^2} dZd\nu \quad (3.3)$$

Подстановка (3.3) в (3.2) дает уравнение, тип которого по-прежнему будет определяться коэффициентами при старших производных. Эти коэффициенты остаются такими же, как и в случае нелинейного уравнения Шредингера (формула (3.1)), и значит, интервалы  $l$  эллиптичности и гиперболичности для (3.1) и (3.2) совпадают. Это обстоятельство может означать конечность порога неустойчивости.

Из дисперсионного уравнения (1.15) следует, что имеет место также модуляционная неустойчивость – самофокусировка несущей периодической волны. Эта неустойчивость управляется "вложенным" в (0.1) уравнением для плоских волн

$$\partial_t \eta + \eta \partial_x \eta + \partial_x^3 \eta + \partial_x^5 \eta = 0$$

Самофокусировка приводит к распаду периодической волны на последовательность солитонов огибающей при  $k \in I_1 \cup (\sqrt{3}/5, 1/\sqrt{5})$  [13]. Этот распад происходит под действием продольных возмущений ( $\kappa_{\perp} = 0$  в (1.15)). Из (1.15) следует, что модуляционная неустойчивость несущей волны имеет место при  $\kappa_{\perp} \in (0, \kappa_1)$ , где

$$\kappa_1^2 = -\frac{a_0^2(25k^2 - 3)}{3k^2(10k^2 - 3)(5k^2 - 3)(5k^2 - 1)}$$

Эта неустойчивость может сохраняться и для волновода, в результате чего последний на нелинейной стадии эволюции под действием симметричных возмущений распадается на волновые сгустки, локализованные по пространству. Для эллиптико-эллиптического уравнения Дэви – Стюартсона эти волны подвержены взрывной неустойчивости, при которой амплитуда волны возрастает (коллапсирует) до бесконечности за конечное время [14, 15]. Численные расчеты эволюции локализованных волн показали, что коллапс локализованных волн аналогичен случаю уравнения Шредингера, кроме того факта, что профиль амплитуды коллапсирующей волны является умеренно несимметричным [14]. Таким образом, распад волновода под действием симметричных возмущений будет приводить к образованию волновых сгустков, которые будут подвергаться коллапсу, приводящему в свою очередь к возникновению особенностей в решении.

Нечетные возмущения должны вызывать поперечный распад волновода. Вопрос о формировании особенностей в решении в данном случае остается открытым.

*Случай 2.* Найденная неустойчивость аналогична неустойчивости в случае отсутствия среднего потока в том смысле, что волновод неустойчив только относительно возмущений одного типа, которые являются нечетными как в случае нелинейного уравнения Шредингера, так и в рассматриваемом здесь случае уравнения Дэви-Стюартсона. В связи с этим обстоятельством следует ожидать, что характер неустойчивости в данном случае будет аналогичен случаю гиперболического уравнения Шредингера, в котором неустойчивость волновода приводит к его распаду и дальнейшему дисперсионному расплыванию локализованного по  $Y$  волнового пакета [9].

*Случай 3.* Интервал  $I_3$  принадлежит к области эллиптичности нелинейного уравнения Шредингера, поэтому в этом случае развитие возмущений волноводного решения в силу уравнения Шредингера полностью аналогично случаю 1. Для уравнения Дэви-Стюартсона, однако, факт принадлежности  $k$  интервалу  $I_3$  означает то, что это уравнение имеет отличный от случаев 1 и 2 тип – эллиптико-гиперболический, для которого локализованные начальные данные также подвержены коллапсу [16]. В этом случае собственная функция для среднего потока не является убывающей на бесконечности, в связи с чем локализованное возмущение волноводного решения (которое

отвечает нулевому среднему потоку) может приводить к возникновению среднего потока во всем пространстве. Физический смысл таких решений остается неясным.

**Заключение.** В данной работе исследована неустойчивость относительно малых продольных возмущений волноводов, являющихся результатом самоканализации периодических поверхностных гравитационно-капиллярных или гравитационно-изгибных волн в жидкости конечной глубины. Показано, что эта неустойчивость имеет более жесткий характер, чем в жидкости бесконечной глубины, что обусловлено присутствием дополнительных неустойчивых возмущений различной четности. Обсуждаются особенности развития нелинейной фазы такой неустойчивости.

Автор благодарит И.Б. Бахолдина за полезные обсуждения. Настоящая работа поддержана проектом 99-01-00277 Российского фонда фундаментальных исследований, а также программой Российской академии наук "Нелинейная динамика и солитоны".

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Haragus-Courcelle M., Il'ichev A.* Three-dimensional solitary waves in the presence of additional surface effects // *Europ. J. Mech. B/Fluids.* 1998. V. 17. № 5. P. 739–768.
2. *Müller A., Eittema R.* Dynamic response of an icebreaker hull to ice breaking // *IAHR Rept.* 1984. № 273. 118 p.
3. *Zufiria J.* Symmetry breaking in periodic and solitary gravity-capillary waves on water of finite depth. // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 184. P. 183–206.
4. *Ильичев А.Т.* Уединенные волны в средах с дисперсией и диссипацией (обзор) // *Изв. РАН МЖГ.* 2000. № 2. С. 3–27.
5. *Il'ichev A.* Self-chanelling of surface water waves in the presence of an additional surface pressure // *Europ. J. Mech. B/Fluids.* 1999. V. 18. № 3. P. 501–510.
6. *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
7. *Захаров В.Е., Рубенчик А.М.* Неустойчивость волноводов и солитонов в нелинейных средах // *ЖЭТФ.* 1973. Т. 65. Вып. 3. С. 997–1011.
8. *Kuznetsov E.A., Rubenchik A.M., Zakharov V.E.* Soliton stability in plasmas and hydrodynamics // *Phys. Reports.* 1986. V. 142. № 3. P. 103–165.
9. *Janssen P.A.E.M., Rasmussen J.J.* Nonlinear evolution of the transverse instability of plane-envelope solitons // *Phys. Fluids.* 1983. V. 26. № 5. P. 1279–1287.
10. *Rypdal K., Rasmussen J.J.* Stability of solitary structures in the nonlinear Schrödinger equation // *Physica Scripta.* 1989. V. 40. P. 192–201.
11. *Saffman P.G., Yuen H.C.* Stability of a plane soliton to infinitesimal two-dimensional perturbations // *Phys. Fluids.* 1978. V. 21. № 8. P. 1450–1451.
12. *Iooss G., Adelmeyer M.* Topics in Bifurcation Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 1992. 160 p.
13. *Grimshaw R., Malomed B., Benilov E.* Solitary waves with damped oscillatory tails: an analysis of the fifth-order Korteweg-de Vries equation // *Physica D.* 1994. V. 77. № 4. P. 473–485.
14. *Papanicolaou G.C., Sulem C., Sulem P.L. et al.* The focusing singularity of the Davey-Stewartson equations for gravity-capillary surface waves // *Physica D.* 1994. V. 72. № 1–2. P. 61–86.
15. *Fibich G., Papanicolaou G.* Self-focusing in the perturbed and unperturbed nonlinear Schrödinger equation in critical dimension // *SIAM J. Appl. Math.* 1999. V. 60. № 1. P. 183–240.
16. *Sulem C., Sulem P.-L.* The Nonlinear Schrödinger Equation: Self Focusing and Wave Collapse. N.Y.: Springer, 1999. 352 p.

Москва  
E-mail: ilichev@mi.ras.ru

Поступила в редакцию  
13.XI.2001