

УДК 532.543.031

© 2002 г. А.Б. МАЗО

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПРОНИЦАЕМОЙ ПЕРЕГОРОДКИ НА ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ

Рассматривается плоское течение идеальной несжимаемой жидкости в прямоугольном канале, перегородженном тонкой проницаемой преградой (решеткой). При протекании через решетку поток скачком изменяет направление и теряет энергию. Течение жидкости предполагается вихревым; завихренность терпит скачок на решетке. Предлагается математическая формулировка задачи для функции тока в виде нелинейного эллиптического уравнения с коэффициентами, терпящими разрыв на линии решетки. Численное решение строится с помощью итерационного метода конечных элементов. Результаты численного моделирования показывают, как управлять профилем скорости потока в канале с помощью проницаемых перегородок.

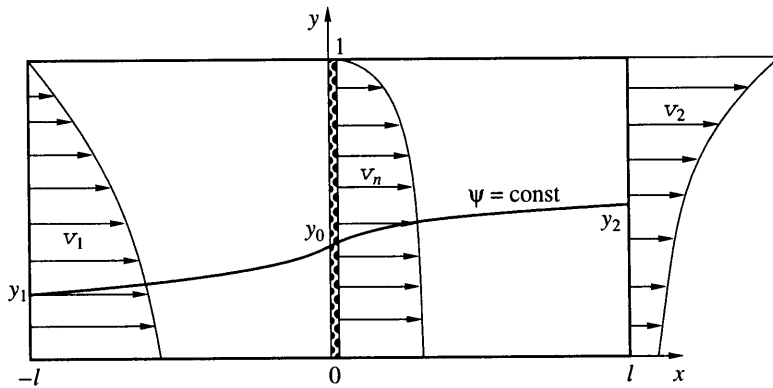
Ключевые слова: несжимаемая жидкость, вихревое течение, проницаемая перегородка, управление профилем скорости, численное моделирование.

Управление потоками жидкостей и газов в камерах технологических аппаратов с помощью проницаемых перегородок широко используется в технике [1]. В частности, если на входе в канал профиль скорости неравномерный, то, увеличивая сопротивление перегородки, можно существенно выровнять поток. Более того, при достаточно высоких значениях густоты решетки наблюдается "переворачивание" эпюры скорости: вогнутый профиль при прохождении через решетку становится выпуклым, и наоборот (фиг. 1). Этот феномен подробно описан в [1] и объясняется так. Быстрые слои потока испытывают более существенное торможение у решетки, и, согласно закону Бернулли, давление в них возрастает сильнее, чем в сравнительно медленных слоях. В результате перед препятствием формируется перепад давления в направлении, поперечном потоку, что и приводит к указанному перераспределению скоростей.

Построение адекватной теории и эффективных методов расчета течений данного типа до настоящего времени является актуальной проблемой. В нашей статье [2] были выписаны основные соотношения для плоского потока идеальной несжимаемой жидкости в подбластиях до и после перегородки, когда ее сопротивление и поворотные свойства заданы соотношениями [3]

$$i^- - i^+ = \frac{1}{2} \gamma u_n^2, \quad i = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2; \quad \frac{v_\tau^-}{v_\tau^+} = \alpha \quad (1)$$

Здесь индексами "+" и "-" помечены величины непосредственно до и после перегородки, i – константа Бернулли, p – давление, ρ – плотность жидкости, u_n и v_τ – нормальная и касательная составляющие скорости на решетке, γ – коэффициент сопротивления. Параметр поворота α , также как и γ , концентрирует в себе информацию о течении в масштабе одной ячейки решетки. Для его определения, вообще говоря, необходимо решать задачу вязкого отрывного обтекания в окрестности ячейки [4]. Однако в первом приближении можно считать α константой решетки и связать его с коэффициентом сопротивления; например, экспериментальные данные



Фиг. 1. Схема течения в канале с проницаемой перегородкой

для решетки из круглой проволоки удовлетворительно описываются простой формулой [5]

$$\alpha = 1/\sqrt{1+\gamma} \quad (2)$$

В каждой из подобластей до и после перегородки завихренность ω постоянна вдоль линии тока, а при прохождении через решетку ω терпит разрыв, пропорциональный γ [2]:

$$x = 0: \quad \omega^+ - \omega^- = \gamma \frac{\partial v_n}{\partial y} \quad (3)$$

В данной работе предлагается новая математическая формулировка и метод численного решения задачи для функции тока во всей области течения с разрывом коэффициентов на линии решетки.

Рассмотрим прямоугольный канал единичной ширины с проницаемой пластиной в сечении $x = 0$ (фиг. 1). Пусть $v_1(y)$, p_1 и $v_2(y)$, p_2 – скорость, давление несжимаемой жидкости в сечениях $x = -l$ и $x = l$ канала, причем границы $x = \pm l$ удалены от решетки настолько, что давления p_1 и p_2 можно считать константами, а поперечная составляющая скорости в этих сечениях отсутствует. Плотность жидкости и расход для простоты считаются единичными.

В терминах функция тока ψ – вихрь ω , определенных формулами

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

установившееся течение в каждой подобласти до и после перегородки описывается уравнением Пуассона со следующими граничными условиями:

$$-\Delta \psi = \omega^\pm(\psi), \quad \omega^-, \quad -l < x < 0; \quad \omega^+, \quad 0 < x < l \quad (4)$$

$$x = -l: \quad \psi(y) = \int_0^y v_1(\eta) d\eta; \quad x = l: \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = v_y = 0 \quad (5)$$

$$y = 0: \quad \psi = 0; \quad y = 1: \quad \psi = 1$$

В уравнении (4) правая часть ω является нелинейным оператором от решения ψ . Определение $\omega(\psi)$ основано на отмеченном выше свойстве постоянства ω при $\psi = \text{const}$ в подобластях $-l < x < 0$ и $0 < x < l$ и условия (3) на линии $x = 0$. Для вычисления ω в произвольной точке (x, y) слева от решетки достаточно провести

через нее линию тока $\psi = \text{const}$ (фиг. 1) до пересечения со входным сечением в точке $x = -l, y = y_1$ и вычислить значение вихря по формуле $\omega^-(x, y) = \partial v_1(y_1)/\partial x$, в которой входной профиль скорости $v_1(y)$ задан. Для определения $\omega(\psi)$ в правой подобласти необходимо добавить к полученному значению завихренности скачок (3) в точке $x = 0, y = y_0$:

$$\omega^+ = \omega^- + [\omega], \quad [\omega] = \gamma \frac{\partial v_n}{\partial y}(y_0) = \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(y_0) \quad (6)$$

На решетке $x = 0$ функция ψ непрерывна, но ее производная $\partial\psi/\partial x = v_x$ имеет разрыв в соответствии с законом (1). Вместо двух уравнений (4) в подобластях можно сформулировать краевую задачу во всей области течения $D = [-l, l] \times [0, 1]$, вводя разрывные коэффициенты так, чтобы удовлетворить условию (1) на решетке:

$$L\psi \equiv -\text{div}[k(x)\text{grad}\psi] = f(x; \psi), \quad x, y \in D; \quad (7)$$

$$k = 1, \quad f = \omega^-(\psi), \quad -l < x < 0; \quad k = \alpha, \quad f = \alpha\omega^+(\psi), \quad 0 < x < l$$

Таким образом, функция тока ψ в области D определяется уравнением (7), правая часть f которого зависит от искомой функции и вычисляется по входному профилю скорости и условию на скачке (6). Граничные условия заданы соотношениями (5).

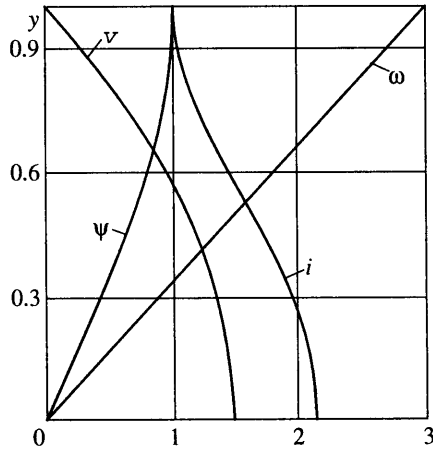
Для отыскания численного решения задачи (5)–(7) применялся стационарный двухслойный неявный итерационный процесс [6]

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\tau} + L\psi^{n+1} = f(\psi^n), \quad \tau > 0 \quad (8)$$

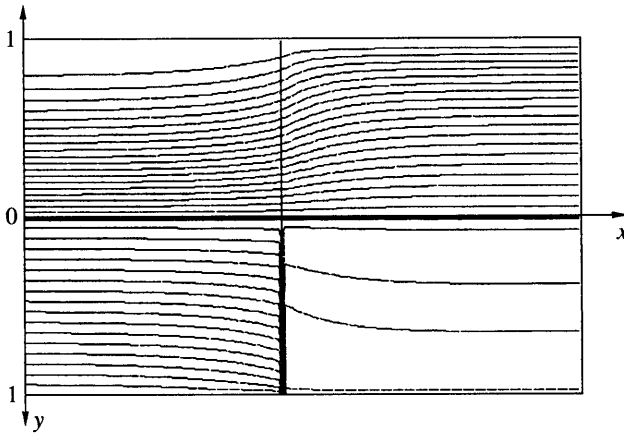
Здесь $n = 0, 1, \dots$ – номер итерации. В качестве начального приближения выбиралась функция тока $\psi^0(x, y)$, в любом сечении x совпадающая с функцией, заданной на левой границе $x = -l$ (5). Сеточное решение задачи (8) строилось с применением метода конечных элементов. Особенностью данной задачи является то, что при вычислении правой части f необходимо дважды дифференцировать сеточное решение вдоль линии решетки (6). Поэтому в качестве конечных элементов выбирались шестиузловые треугольники с квадратичными базисными функциями. На каждом шаге итерационного процесса (8) конечно-элементное решение строилось методом сопряженных градиентов [7] с предобуславливателем, полученным как неполное разложение Холецкого исходной матрицы [8].

После того, как функция тока ψ найдена, рассчитывается поле давления $p(x, y)$ подобно тому, как вычислялась завихренность. Вначале в каждом узле сетки вычисляется $v^2 = |\text{grad}\psi|^2$ непосредственным дифференцированием. При использовании квадратичных конечных элементов поле скорости непрерывно и может вычисляться на любом элементе, инцидентном выбранному узлу. Затем по линии тока $\psi = \text{const}$ определяется ордината y_1 во входном сечении $x = -l$ и находится константа Бернулли для левой подобласти: $i = i^-(y_1) = p_1 + v_1(y_1)^2/2$. Если выбранная точка лежит ниже решетки, $x > 0$, то необходимо учесть падение полного давления в соответствии с законом (1). Для этого определяется ордината y_0 на линии $x = 0$, вычисляется нормальная составляющая скорости $v_n(y_0) = \partial\psi/\partial y$ в этой точке и находится $i = i^+ = i^- - \gamma v_n^2/2$. Полученные значения v^2 и i подставляются в формулу для давления $p(x, y) = i(x; \psi) - v^2(x, y)/2$.

Все расчеты проводились для длинного канала с $l = 3$ при расходе $q = 1$ и давлением на входе $p_1 = 1$. Эпюра скорости во входном сечении $x = -l$ задана формулой $v_1 = v_0 + 3(1 - v_0)y^2$, которая при $v_0 = 1.5$ дает выпуклый параболический профиль с "прилипанием" на стенке $y = 1$, а при $v_0 = 0$ – вогнутый профиль скорости с максимумом при $y = 1$. Предложенная выше математическая модель не накладывает существенных ограничений на профиль входной скорости, выбранная параболическая эпюра, в принципе, моделирует широкий диапазон возникающих в технике потоков, оставляя вне рассмотрения лишь случаи с возвратными течениями. Коэффициент сопротивления решетки γ был взят равным 0.5, 1, 3, а поворот α вычислялся по формуле (2).



Фиг. 2. Распределение параметров потока на входе в канал по сечению y при $p = 1$

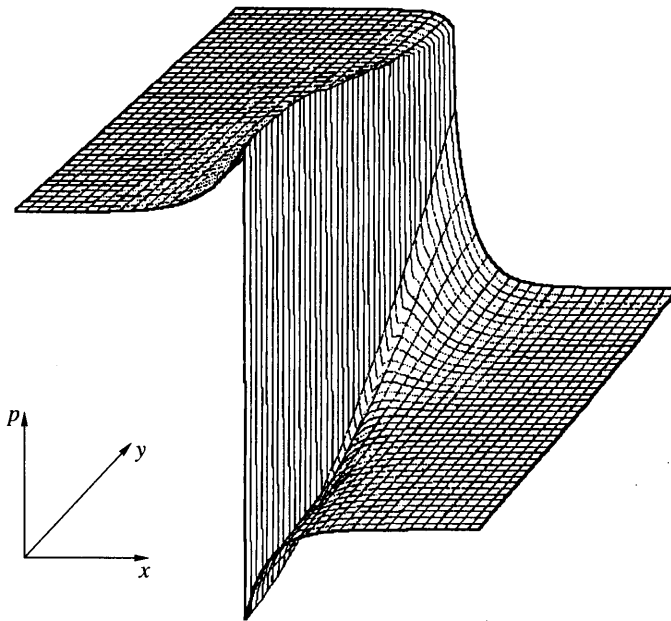


Фиг. 3. Линии тока (сверху) и вихря (внизу) в канале при выпуклой эпюре скорости на входе ($\gamma = 3$)

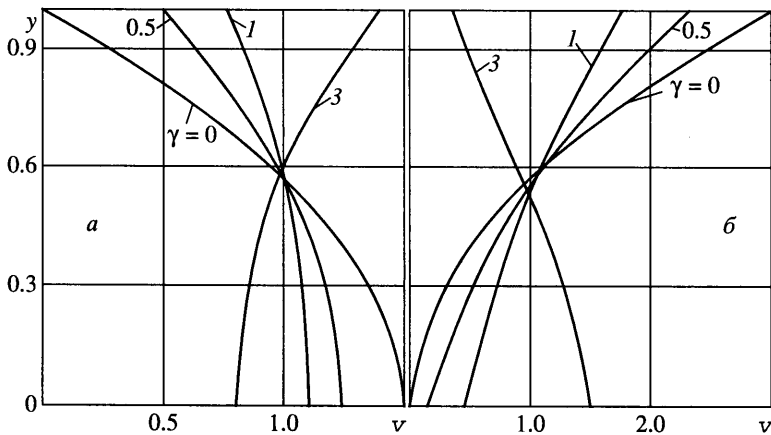
Представим вначале результаты моделирования воздействия проницаемой перегородки на поток с выпуклым профилем скорости ($u_0 = 1.5$). Распределение всех параметров потока в сечении $x = -l$ показано на фиг. 2.

Линии тока $\psi = \text{const}$ и линии равной завихренности $\omega = \text{const}$ для решетки с высоким сопротивлением γ изображены на фиг. 3. Картина течения качественно вполне согласуется с предварительными результатами [2]. Хорошо виден скачок завихренности на решетке.

Изменения p сосредоточены вблизи преграды $x = 0$, причем наибольший скачок давления происходит на стрежне, где у входного потока был максимум скорости (фиг. 4). Непосредственно перед решеткой давление становится выше исходного значения p_1 , а сразу за решеткой вблизи центра потока образуется разрежение $p < p_2$. Таким образом, при выпуклой исходной эпюре скорости жидкость на стрежне потока как до, так и после преграды течет в направлении роста давления. Значительно более плавные изменения p происходят вблизи "стенки" $y = 1$, где был минимум скорости. Явно заметен на фиг. 4 и образующийся на пластине поперечный градиент давления, приводящий к перестройке потока. Торможение потока приводит к трансформации эпюры скорости, и при достаточно больших значениях гидравлического сопротив-



Фиг. 4. Распределение давления в канале с решеткой при выпуклом параболическом профиле скорости на входе ($\gamma = 3$). Рисунок сжат по оси x

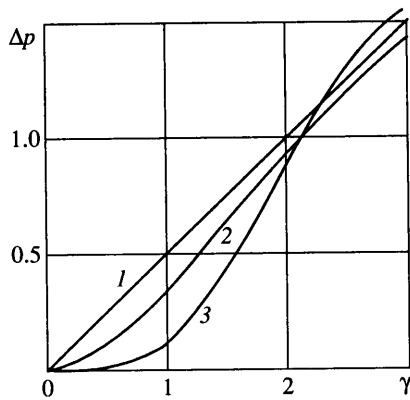


Фиг. 5. Трансформация эпюры скорости в выходном канале в зависимости от гидравлического сопротивления решетки γ при выпуклом (а) и вогнутом (б) профиле скорости на входе

ления решетки γ выпуклый профиль при удалении вниз по потоку становится вогнутым (фиг. 5, а). При этом давление выравнивается к величине $p_2(\gamma) < p_1$.

Особенности гидродинамики для случая вогнутого профиля скорости $v_1(y)$ в основных чертах схожи с представленными выше для выпуклой эпюры, однако скачки параметров ω и p на решетке больше, что объясняется сравнительно большим значением максимума скорости и, следовательно, более резким торможением. Трансформация эпюры $v_1 \rightarrow v_2$ для этого случая в зависимости от γ показаны на фиг. 5, б.

Практический интерес имеет зависимость потери давления $\Delta p = p_1 - p_2$ от γ для рассматриваемых неоднородных потоков. Построенные по результатам расчетов кри-



Фиг. 6. Потеря давления в зависимости от сопротивления преграды γ для равномерного потока (1), при выпуклом (2) и вогнутом (3) профилях скорости $v_1(y)$

вые для выпуклого и вогнутого профилей скорости в сравнении с линейной зависимостью $\Delta p(\gamma)$ для однородного потока приведены на фиг. 6. В обоих случаях неравномерного потока падение давления при прохождении через препятствие меньше, чем при равномерном, в диапазоне $0 < \gamma < 2.2$. Для решеток с большим сопротивлением ($\gamma > 2.2$) зависимость $\Delta p(\gamma)$ близка к линейной и слабо зависит от эпюры $v_1(y)$.

Заключение. Предлагаемая математическая модель верно отражает все особенности вихревого течения несжимаемой жидкости в каналах с проницаемой перегородкой и может рассматриваться как инструмент для решения конкретных задач управления профилем скорости.

Переход от традиционных уравнений в подобластях и условий сопряжения на решетке к уравнению эллиптического типа с разрывными коэффициентами позволяет существенно расширить класс методов решения задачи.

Результаты численного моделирования показывают, что на стрежне, где скорость максимальна, давление возрастает в направлении течения как до преграды, так и за ней, а на перегородке падает скачком. Зависимость потери давления от сопротивления пластины при неравномерном входном потоке существенно нелинейна; для разреженных решеток Δp в неравномерных потоках значительно меньше, чем в равномерных. При сопротивлении $\gamma < 1$ профиль скорости качественно не изменяется, решетка с $\gamma \sim 2$ выравнивает неравномерную эпюру, а при $\gamma > 3$ происходит трансформация выпуклого профиля в вогнутый, и наоборот.

Следует отметить, что и определяющие уравнения, и численные методы без труда могут быть обобщены на случай каналов с криволинейными стенками.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 01-01-00068).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Идельчик И.Е. Аэрогидродинамика технологических аппаратов. М.: Машиностроение, 1983. 351 с.
2. Мазо А.Б., Снигерев Б.А., Алимов М.М. Вихревое течение идеальной жидкости в канале с проницаемой перегородкой // Тр. 6-й Междунар. конф. "Современные проблемы механики сплошной среды". Ростов н/Д: Северо-Кавказ. НЦ Высш. шк., 2001. С. 101–105.
3. Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 1970. = Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. Мазо А.Б., Алимов М.М. Моделирование стационарного отрывного обтекания тел и решеток несжимаемой жидкостью // Тр. 9-й Всерос. школы-семинара "Современные проблемы математического моделирования". Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 2001. С. 223–231.

5. *Elder J.W.* Steady flow through non-uniform gauzes of arbitrary shape // *J. of Fluid Mechanics*. 1959. V. 5. Pt 3. P. 355–368.
6. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.
7. *Daniel J.W.* The conjugate gradient method for linear and nonlinear operator equations // *SIAM J. Numer. Analysis*. 1967. V. 4. № 1. P. 10–26.
8. *Gustafsson I.* On modified incomplete Cholesky factorization methods for the solution of problems with mixed boundary conditions and problems with discontinuous material coefficients // *Intern. J. Numer. Methods in Eng.* 1979. V. 14. № 8. P. 1127–1140.

Казань

Поступила в редакцию
28.II.2002