МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 2002

УДК 532.529:541.182

 С.И. МАРТЫНОВ

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ РЕШЕТКУ СФЕР

Рассматривается течение вязкой жидкости через бесконечную периодическую решетку твердых сфер. Учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц в решетке. Предложено аналитическое решение задачи. Вычислены силы, действующие со стороны жидкости на частицы в решетке, и получено выражение для скорости фильтрации жидкости через решетку. Проведено сравнение с ранее полученными теоретическими и экспериментальными результатами.

Ключевые слова: вязкая жидкость, решетка сфер, сопротивление, непарные взаимодействия.

Автором предложен метод аналитического решения задачи о гидродинамическом взаимодействии конечного числа твердых частиц в потоках, скорость которых на бесконечности представляется в виде полинома любой целой степени [1, 2]. Показано, что решение задачи о гидродинамическом взаимодействии трех частиц в принципе нельзя свести к сумме решений задач о парных взаимодействиях этих частиц. Это связано с тем, что условия для скорости жидкости на поверхности каждой частицы являются интегральными в том смысле, что описывают суммарный вклад от гидродинамического взаимодействия выделенной частицы со всеми остальными. Из-за этого в граничных условиях для скорости нельзя отделить результат гидродинамического взаимодействия выделенной частицы с какой-либо другой частицей от результата взаимодействий этой же выделенной частицы со всеми остальными частицами. Именно поэтому решение задачи о гидродинамическом взаимодействии трех и более частиц нельзя представить в виде суммы решений задач о гидродинамическом взаимодействии пар частиц, где суммирование берется по всем возможным комбинациям пар из заданной конфигурации частиц. Погрешность представления гидродинамического взаимодействия всех частиц в виде их парных взаимодействий тем больше, чем больше число частиц, участвующих в таком взаимодействии. Этим объясняется причина расхождения интегралов, возникающая при попытке учесть взаимодействие бесконечного числа частиц, суммируя результат их парных взаимодействий [3].

Сказанное выше позволяет предположить, что корректный учет гидродинамического взаимодействия большого числа частиц, помещенных в поток вязкой жидкости, может качественно изменить структуру решения задачи. В связи с этим представляет интерес рассмотреть задачу о течении вязкой жидкости через периодическую решетку неподвижных частиц. Такая задача наиболее простая для рассматриваемой цели и, кроме того, актуальна в связи с использованием в технике различных устройств, в которых осуществляются подобные течения.

Течение вязкой жидкости через периодическую кубическую решетку сфер рассматривалось в [4]. При этом для получения решения использовалась гипотеза о том, что возмущение, вносимое в поток жидкости частицей, такое же, как и возмущение от точечной силы, действующей на жидкость в точке, занимаемой центром частицы. Поэтому вместо уравнений Стокса использовались уравнения движения жидкости, содержащие точечные силы, действующие в узлах решетки. Граничные условия на поверхности частиц при этом не учитывались. Для получения решения применялся интегральный метод Озеена [5] и условие, что среднее значение скорости жидкости по поверхности частицы равно нулю. Аналогичный подход использовался и в [6, 7].

Кроме того, существует и другой подход к решению подобных задач. Это метод нахождения осредненных характеристик среды с микровключениями [8, 9]. При этом необходимо решать задачу на ячейке с заданными граничными условиями на включениях. Соответствующее решение записывается в терминах быстро и медленно меняющихся функций. Для получения осредненных уравнений движения сплошной среды достаточно задать только свойства функций, но не их явный вид. При более детальном описании характеристик среды необходимо определять явный вид этих функций, т.е. решать задачу, аналогичную поставленной ниже.

1. Постановка задачи и решение. Исследуем течение несжимаемой жидкости с вязкостью η через периодическую решетку, образованную сферическими частицами радиуса a. Будем считать число Рейнольдса малым и использовать приближение Стокса для скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и давления $p(\mathbf{x})$ в жидкости

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \qquad \eta \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p \tag{1.1}$$

Структура решетки определяется векторами r_1, r_2, r_3, причем $r_i r_j = \delta_{ij}$, $r_1 = r_2 = r_3 = r$, и считается, что $a/r \ll 1$. Выберем произвольную частицу в решетке и совместим начало системы координат с центром этой частицы. Положение b-й частицы в решетке определяется вектором

$$\mathbf{r}_b = b_1 \mathbf{r}_1 + b_2 \mathbf{r}_2 + b_3 \mathbf{r}_3 \qquad b_1, b_2, b_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Положение точки жидкости относительно центра b-й сферы будем обозначать вектором $\mathbf{x}_b$. Для введенных векторов имеем соотношение $\mathbf{x}_b = \mathbf{x} - \mathbf{r}_b$.

На поверхности частиц имеем условия прилипания

$$u_i = 0, \qquad |\mathbf{x}_b| = a \tag{1.2}$$

Решение уравнений (1.1) должно быть периодическим по любому вектору $\mathbf{r}_b$, а в силу симметрии решетки скорость жидкости должна быть четной функцией координат

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}_b), \qquad p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x} + \mathbf{r}_b)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(-\mathbf{x})$$

Для бесконечной периодической решетки отсутствуют граничные условия на бесконечности.

Для получения периодического решения уравнений воспользуемся результатами работ [1, 2]. С учетом того, что рассматривается решетка с бесконечным числом частиц, выражения для давления p и скорости $\mathbf{u}$ записываются в виде

$$p = \mathbf{H}_i \sum_b L_i^b + \mathbf{F}_{ij} \sum_b L_{ij}^b + \mathbf{G}_{ijl} \sum_b L_{ijl}^b + \mathbf{D}_{ijls} \sum_b L_{ijls}^b + \ldots$$

$$\eta \mathbf{u}_i = \mathbf{U}_i - \frac{2}{3} \mathbf{H}_i \sum_b L_0^b - \frac{3}{5} \mathbf{F}_{ij} \sum_b L_j^b - \frac{4}{7} \mathbf{G}_{ijl} \sum_b L_{jl}^b - \frac{5}{9} \mathbf{D}_{ijls} \sum_b L_{jls}^b - \frac{1}{6} \mathbf{H}_j \sum_b L_{ij}^b x_b^2 -$$

$$- \frac{1}{10} \mathbf{F}_{jl} \sum_b L_{ijl}^b x_b^2 - \frac{1}{14} \mathbf{G}_{jls} \sum_b L_{ijls}^b x_b^2 - \frac{1}{18} \mathbf{D}_{jlst} \sum_b L_{ijlst}^b x_b^2 - \ldots \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{U}$ – неизвестный вектор, имеющий размерность скорости, который необходимо определить из дополнительных соотношений; индексы $i, j, k \ldots = 1, 2, 3$, а суммирование ведется по всем частицам по следующему правилу

$$\sum_b = \sum_{b_1} \sum_{b_2} \sum_{b_3}; \qquad b_1, b_2, b_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Здесь $\mathbf{H}_i$, $\mathbf{F}_{ij}$, $\mathbf{G}_{ijl}$, $\mathbf{D}_{ijls}$,... – неизвестные тензорные коэффициенты, а $L^k_{ij...s}$ – мультиполь, вычисляемый по следующему правилу

$$L^b_{ij...s} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{1}{x_b}\right)\right)\right)\right)$$

$$x_b = (x_j x_j - 2r_{bj}x_j + r_b^2)^{1/2}$$

Возмущения от одной частицы в выражениях для $\mathbf{u}, p$ на бесконечности стремятся к нулю. Однако далеко от рассматриваемой частицы существуют другие, в окрестности которых возмущения конечны. Поэтому давление p и скорость u_i в выражениях (1.3) конечны в любой точке пространства. Для течения вязкой жидкости через бесконечную периодическую решетку однородная составляющая $\mathbf{U}$ скорости течения жидкости через решетку частиц не задается граничными условиями на бесконечности, а должна быть определена из дополнительных условий.

Решение рассматриваемой задачи существенно отличается от решения задачи об обтекании вязкой жидкостью конечного числа частиц, образующих периодическую решетку конечных размеров, когда далеко от границы решетки задается скорость невозмущенного потока.

Выражение для скорости (1.3) содержит во втором слагаемом с тензорным коэффициентом H_i расходящийся ряд вида

$$\sum_{b_1}\sum_{b_2}\sum_{b_3}\frac{1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}, \qquad b_1^2+b_2^2+b_3^2 \neq 0, \qquad b_1, b_2, b_3 = 0, 1, 2\ldots$$

Поэтому из условия конечности скорости вида (1.3) в любой точке жидкости должно следовать равенство $H_i = 0$.

Однако отсутствие слагаемого с коэффициентом H_i в выражении для скорости приводит к тому, что система алгебраических уравнений для определения коэффициентов, получающаяся после подстановки выражения для скорости в граничное условие (1.2), оказывается незамкнутой (число уравнений больше числа неизвестных на единицу). Возможный выход из этого положения заключается в изменении структуры первого слагаемого в выражении (1.3).

Вообще говоря, выражение для скорости (1.3) содержит еще слагаемые с расходящимися рядами. Это ряды с мультиполями L^b_i и L^b_{ij}. Однако расходимость рядов легко устраняется модернизацией мультиполей по правилу, предложенному в [10]. При этом сохраняется условие периодичности решения и модернизированные мультиполя L'^b_i и L'^b_{ij} остаются гармоническими функциями. Однако для L^b_0 такая процедура приводит к тому, что модернизированный мультиполь не является гармонической функцией и поэтому не может быть использован в предлагаемом решении. Возникает проблема построения соответствующей функции, которая может быть использована вместо L^b_0. Такая проблема отсутствует при решении задач, в которых задается градиент функции, например градиент температуры в задаче о теплопроводности [10] или градиент скорости в задаче о вязкости суспензии. В этом случае можно положить $H_i = 0$.

Для получения необходимого слагаемого в выражении для скорости (1.3) поступим следующим образом. При определении сил, действующих на частицы в решетке, в силу периодичной структуры достаточно посчитать силу на одну частицу. Для этого необходимо знать распределение скорости и давления вблизи выделенной частицы. Но вблизи частицы можно считать с точностью до слагаемых порядка $(a/r)^3$, что

$$H_i \sum_b L'^b_i \approx -H_i x_i\left(\frac{1}{a^3} + \sum_b \frac{1}{r_b^3}\right)$$

Здесь суммирование берется только по таким b_i, чтобы члены ряда не превосходили порядок малости $(a/r)^3$. Тогда необходимое слагаемое в выражении для скорости, связанное с коэффициентом H_i, имеет вид

$$u_{0i}=C_{ijk}x_jx_k,\qquad 2\eta C_{ijj}=-H_i\left(\frac{1}{a^3}+\sum_b\frac{1}{r_b^3}\right)$$

$$C_{iik}=C_{iki}=0 \tag{1.4}$$

Это означает, что вблизи выбранной частицы реализуется течение с параболическим профилем скорости, на которое накладываются возмущения, т.е. вместо уравнений (1.3) с учетом (1.4) имеют место равенства

$$p=-H_ix_i\left(\frac{1}{a^3}+\sum_b\frac{1}{r_b^3}\right)+F_{ij}\sum_b L_{ij}^{b}+G_{ijl}\sum_b L_{ijl}^b+D_{ijls}\sum_b L_{ijls}^b+T_{ijkln}\sum_b L_{ijkln}^b+\dots$$

$$\eta u_i=\eta C_{ijk}x_jx_k-\frac{3}{5}F_{ij}\sum_b L_j^{b}-\frac{4}{7}G_{ijl}\sum_b {}^b_{jl}-\frac{5}{9}D_{ijls}\sum_b L_{jls}^b-\frac{6}{11}T_{ijkln}\sum_b L_{jkln}^b-\frac{1}{10}F_{jl}\sum_b L_{ijl}^b x_b^2-$$

$$-\frac{1}{14}G_{jls}\sum_b L_{ijls}^b x_b^2-\frac{1}{18}D_{jlst}\sum_b L_{ijlst}^b x_b^2-\frac{1}{22}T_{jklns}\sum_b L_{ijkls}x_b^2-\dots \tag{1.5}$$

Вид тензорных коэффициентов в выражениях (1.4) для давления p и скорости $\mathbf{u}$ определяется согласно процедуре, предложенной в [1, 2]. В силу линейности уравнений движения и граничных условий на поверхности частиц по параметру U_i решение и, следовательно, тензорные коэффициенты должны быть линейными по этому параметру. Кроме того, решение должно зависеть от векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$. Поэтому получаем

$$H_i=\eta U_iEA,$$

$$F_{ij}=\eta(C_{kij}r_{ak}F^a+C_{ijk}r_{ak}FA^a+C_{ikk}r_{aj}FB^a+C_{jkk}r_{ai}FH^a+C_{kln}r_{ak}r_{cl}r_{dn}\delta_{ij}\delta_{ij}FC^{acd}+C_{kss}r_{ak}\delta_{ij}FK^a)$$

$$G_{ijk}=\eta(C_{ijk}G+C_{kln}r_{al}r_{cn}\delta_{ij}GE^{ac}+C_{lkn}r_{al}r_{cn}\delta_{ij}GD^{ac}+(C_{ill}\delta_{kj}+C_{jll}\delta_{ik}+C_{kll}\delta_{ij})GA+$$

$$+C_{ill}r_{aj}r_{ck}GG^{ac}+C_{jll}r_{ai}r_{ck}GH^{ac}+C_{tss}r_{at}(r_{ck}\delta_{ij}+r_{cj}\delta_{ik})GM^{ac}+$$

$$+C_{lnm}r_{al}r_{cn}r_{dm}(r_{gi}\delta_{kj}+r_g\delta_{ij}+r_{gj}\delta_{ik})GU^{acdg})$$

$$D_{ijkl}=\eta(C_{jkn}r_{an}\delta_{il}DE^a+C_{jkn}r_{cn}\delta_{il}DE^c+C_{jkn}r_{dn}\delta_{il}DE^d),$$

$$T_{ijkln}=\eta(T((C_{ijk}+C_{kij}+C_{jik})\delta_{ln}+(C_{ijn}+C_{nij}+C_{jin})\delta_{lk}+(C_{ink}+C_{kin}+C_{nik})\delta_{lj}+$$

$$+(C_{njk}+C_{knj}+C_{jnk})\delta_{li}+(C_{ijl}+C_{lij}+C_{jil})\delta_{kn}+(C_{ilk}+C_{kil}+C_{lik})\delta_{jn}+(C_{ljk}+C_{klj}+C_{jlk})\delta_{in}+$$

$$+(C_{lin}+C_{nli}+C_{inl})\delta_{jk}+(C_{ljn}+C_{nlj}+C_{jnl})\delta_{ik}+(C_{nlk}+C_{lnk}+C_{kln})\delta_{ij}))$$

Аналогичным образом записываются остальные тензорные коэффициенты.

Неизвестные скалярные коэффициенты EA, G, GA, GE^{ac}, GD^{ab}, GG^a, GU^{acdg}, T,... находятся из граничных условий на поверхности частиц. При этом в силу периодичности решения достаточно использовать граничные условия на поверхности одной частицы. Однако значения некоторых коэффициентов можно найти, используя свойства решения. Так, в силу свойства четности функции для скорости значения тензорных коэффициентов четного порядка равны нулю

$$F^a=FB^a=FH^a=FC^{acd}=FK^a=DE^a=DE^c=DE^d\dots=0$$

Для подсчета других коэффициентов воспользуемся условием, что $a/r\ll 1$. Функции вида $1/x_b$ можно разложить в ряд по параметру a/r. При этом в разложениях получим слагаемые, содержащие компоненты r_{bj} вектора $\mathbf{r}_b$. В силу симметрии решетки для каждой частицы с вектором $\mathbf{r}_b$ найдется частица с вектором $-\mathbf{r}_b$. Поэтому при суммировании слагаемых в разложениях члены с нечетным числом r_{bj} сокращаются, а члены, содержащие четное число компонент r_{bj}, удваиваются. С учетом этого суммирование в выражениях для скорости и давления берется для положительных значений b_i.

Используя вышесказанное, из граничных условий (1.2) на поверхности сферы получим следующие значения скалярных коэффициентов с точностью до слагаемых порядка $(a/r)^3$

$$G = \frac{7a^5}{12}, \quad T = -\frac{11a^7}{1728}, \quad EA = 12a$$

Полученные распределения скорости и давления (1.5) существенно отличаются как от случая сферы в однородном потоке, так и от случая сферы в параболическом потоке [1, 2].

2. Силы, действующие на сферы в решетке. Полученное выше аналитическое решение задачи о течении жидкости через периодическую решетку сфер позволяет провести прямые вычисления сил $\mathbf{F}$, действующих на сферы со стороны жидкости

$$F_i = 100\pi\eta a U_i S_b \frac{a^5}{r^5}, \qquad S_b = \sum_b \frac{(b_2^2 + b_3^2)}{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{7/2}}$$

Верхние значения сумм b_{10}, b_{20}, b_{30} берутся таким образом, чтобы выполнялось условие для погрешности вычислений

$$\sum_{b_1}^{b_{10}} \sum_{b_2}^{b_{20}} \sum_{b_3}^{b_{30}} \frac{a^3(b_2^2 + b_3^2)}{r^3(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{7/2}} \ll \frac{a^4}{r^4}$$

Полученное выражение силы (2.1) отличается от известного выражения Стокса для одиночной сферы сомножителем, пропорциональным $(a/r)^5$. Такое отличие – результат взаимодействия выделенной сферы с остальными. Следует отметить, что скорость $\mathbf{U}$ не есть величина, задаваемая условием на бесконечности, а есть неизвестный вектор, определяемый из дополнительных условий. Поэтому отсутствует предельный переход при $r \to \infty$ в выражении (2.1) к силе Стокса для одиночной частицы.

Скорость $\mathbf{U}$ – скорость фильтрации жидкости через периодическую решетку сфер. Предположим, что на жидкость действует еще градиент давления ∇p. Тогда в безинерционном приближении суммарная сила, действующая на объем жидкости V_l вокруг частицы, равна

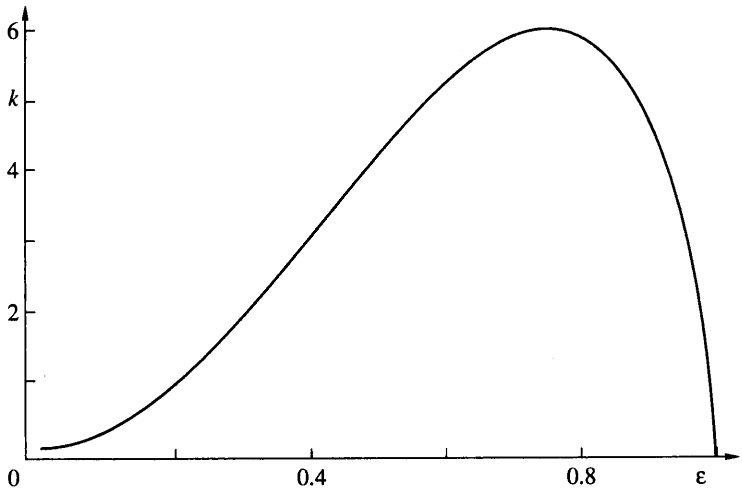
$$-\nabla_i p V_i - 100\pi\eta a U_i S_b \frac{a^5}{r^5} = 0$$

Откуда получим соотношение, аналогичное закону Дарси

$$U_i = -\frac{K}{\eta}\nabla_i p, \qquad K = \frac{\varepsilon r^8}{100\pi a^6 S_b} \tag{2.1}$$

Здесь ε – порозность решетки. После несложных преобразований выражение для коэффициента K в соотношении (2.2) можно записать в форме Кармана – Козени [5]

$$K = \frac{\varepsilon m^2}{k}, \quad k = 25\varepsilon^2(1-\varepsilon)^{2/3} S_b \left(\frac{9}{(4\pi)^5}\right)^{1/3}$$



Зависимость постоянной Козени k от порозности ε

где m – отношение объема жидкости V_l к площади поверхности частицы (так называемый гидравлический радиус), k – постоянная Козени. На фигуре представлен график зависимости постоянной k от порозности ε. Минимальное значение порозности для плотной упаковки кубической решетки $\varepsilon = 0.476$. Результаты численных расчетов в диапазоне порозности ε от 0.48 до 0.975 качественно согласуются с результатами, полученными на основе других моделей и приведенными в монографии [5].

В этом же диапазоне ε экспериментальное значение $k = 5.0$. Однако поведение коэффициента k при значениях $0.75 < \varepsilon \leqslant 1$ качественно отличается от соответствующих кривых, получающихся на основе моделей, использующих в качестве основы закон Стокса [5].

3. Обсуждение результатов. В работе предложено приближенное аналитическое решение задачи о движении вязкой жидкости через периодическую решетку неподвижных сфер. Решение основано на суммировании возмущений от каждой частицы в решетке. При этом возникает проблема расходимости рядов в выражении (1.3) для скорости жидкости, связанная с условием бесконечности периодической решетки. Для решетки конечных размеров соответствующие ряды имеют конечные суммы, хотя и большие по абсолютной величине. В этом случае коэффициенты при этих суммах должны иметь значения, порядок которых обратно пропорционален сумме соответствующего ряда $1/\sum_{k=1}^{n} L_0^k$. Таким образом, увеличение числа частиц в периодической решетке приводит к уменьшению численных значений соответствующих коэффициентов, и наоборот. Сказанное выше позволяет объяснить известную проблему расходимости рядов или интегралов при учете взаимодействия большого числа частиц, имеющую место при использовании решения задачи об обтекании вязкой жидкостью одиночной сферы или двух гидродинамически взаимодействующих сферических частиц [3]. В действительности расходимость связана с заменой граничных условий (1.2) на другие, в которых считается, что на поверхности частиц обращается в нуль скорость, вызванная возмущением потока жидкости каждой отдельной частицей. На самом деле условие (1.2) накладывает такое ограничение только на суммарную скорость возмущений от всех частиц. Поэтому замена граничных условий (1.2) на другие приводит к неправильным значениям коэффициентов, вычисляемых из граничных условий для скорости на поверхности частиц. При этом погрешность в вычисленных значениях коэффициентов тем больше, чем больше взаимодействующих частиц в жидкости.

Фактически это означает необходимость качественного изменения вида решения уравнений Стокса при увеличении числа обтекаемых частиц. В настоящей работе получено такое решение, что проявилось в изменении значений коэффициентов H_i и структуры слагаемого, содержащего этот коэффициент.

Заключение. Найдено приближенное аналитическое решение задачи о движении вязкой жидкости через бесконечную периодическую решетку неподвижных сфер. Учет гидродинамического взаимодействия сфер приводит к качественному изменению распределения скорости жидкости вблизи частиц. Хотя в жидкости реализуется однородный поток, однако около частиц скорость жидкости описывается функцией, главное слагаемое в которой есть полином второй степени по координатам, что качественно отличается от решения задачи об одной частицы в однородном потоке вязкой жидкости. Такое изменение решения для скорости приводит к новому выражению для силы, действующей со стороны жидкости на частице в решетке. В частности, отсутствует предельный переход к силе Стокса, действующей на частицу в однородном потоке. Используя найденное выражение для силы, получено выражение для коэффициента Козени – Кармана в уравнении Дарси, дающее качественное согласие с экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 01-01-00435).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мартынов С.И.* Гидродинамическое взаимодействие частиц // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 2. С. 112–119.
2. *Мартынов С.И.* Взаимодействие частиц в течении с параболическим профилем скорости // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 1. С. 84–91.
3. *Batchelor G.K., Green J.T.* The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. Pt. 2. P. 375–400.
4. *Hasimoto H.* On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres // J. Fluid Mech. 1959. V. 5. Pt. 2. P. 317–328.
5. *Happel J., Brenner H.* Low Reynolds Number Hydrodynamics. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965. = *Хаппель Дж., Бренер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1971. 630 с.
6. *Zick A.A., Homsy G.M.* Stokes flow through periodic arrays of spheres // J. Fluid Mech. 1982. V. 115. P. 13–26.
7. *Nunan K.C., Keller J.B.* Effective viscosity of a periodic suspension // J. Fluid Mech. 1984. V. 142. P. 269–287.
8. *Бахвалов Н.С.* Осредненные характеристики тел с периодической структурой // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 5. С. 1046–1048.
9. *Бердичевский В.Л.* Об осреднении периодических структур // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 6. С. 993–1006.
10. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.

Саранск
E-mail: martynovsi@mrsu.ru

Поступила в редакцию
25.IX.2001