МЕХАНИКА

ЖИДКОСТИ И ГАЗА

№ 6 • 2002

УДК 532.528

© 2002 г. Г.В. ЛОГВИНОВИЧ

ОБ ОБТЕКАНИИ ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ТЕЛА С РАЗВИТОЙ КАВИТАЦИЕЙ

Суть правила Прандтля состоит в том, что в потоке при числе Маха $M < 1$ поперечные размеры тонкого заостренного на концах тела надлежит уменьшить в $1/\sqrt{1-M^2}$ раз, чтобы сохранить тоже распределение давлений по поверхности тела, какое было бы при его обтекании с той же скоростью при $M = 0$.

Повторим вывод Л. Прандтля [1], но применительно к осесимметричному течению с развитой кавитацией.

Ключевые слова: дозвуковые потоки, сжимаемая жидкость, кавитация.

1. Предварительно сделаем некоторые замечания о плотности ρ в функции давления. Для воды известно уравнение Тета, где p_0, ρ_0, a_0 – давление, плотность и скорость звука соответственно в невозмущенном потоке

$$p - p_0 = \frac{\rho_0 a_0^2}{n}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right] \tag{1.1}$$

где $n = 7.15$.

Приняв, что $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$, в результате разложения в ряд получим

$$\frac{p - p_0}{\rho_0 a_0^2} = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} + \frac{n-1}{2}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^2 + \ldots \tag{1.2}$$

Если $\Delta\rho/\rho_0 = 0.01$, то второй член разложения $3.075 \cdot 10^{-4}$; точное выражение

$$\frac{1}{n}\left[\left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right] = 0.0103133$$

при $\Delta\rho/\rho_0 = 0{,}01$.

В акустике принимается: $\rho = \rho_0(1 + s)$ и $p - p_0 = \varkappa s$, где s – относительное уплотнение, $\varkappa$ – объемный модуль упругости. Тогда $a_0^2 = dp/d\rho = \varkappa/\rho_0$ и $(p - p_0)/(\rho_0 a_0^2) = \Delta\rho/\rho_0$, т.е. сохраняется только первый член разложения в ряд $\Delta\rho/\rho_0$; при $\Delta\rho/\rho_0 < 0.01$ можно ограничиться акустическим приближением. Очевидно, что $\varkappa = \rho_0 a_0^2 = 2.25 \cdot 10^9$ Па. "Паровое" число кавитации $\sigma_S = p_0/(\rho_0 U_0^2/2)$, где U_0 – скорость невозмущенной жидкости. Таким образом, у границ каверны, поскольку $\sigma < \sigma_S$, всегда $-\Delta\rho/\rho_0 \leqslant \frac{1}{2}\sigma M^2$, а разность давлений $p_0 - p_k = \frac{1}{2}\sigma M^2 \varkappa$. Так, например, при $M^2 = 0.1$ и $\sigma = 0.02$ разность давлений $p_0 - p_k = 2.25 \cdot 10^6$ Па или около 22.5 атм, что соответствует глубине $h \sim 215$ м при скорости $U_0 \cong 474$ м/с, если $\sigma = \sigma_S$. На глубинах порядка 10–15 м величина σM^2 порядка 10^{-4}, при числах кавитации порядка 10^{-2} число M^2 также порядка 10^{-2} и учет влияния сжимаемости на кавитационное течение теряет смысл. Однако выполним вычисления, следуя Прандтлю.

2. Уравнение неразрывности в сжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат x, r для потенциала возмущений φ имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(1-M^2)+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial \varphi}{\partial r}=0 \tag{2.1}$$

В несжимаемой жидкости с потенциалом возмущений $\Phi(X, R)$ уравнение неразрывности

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\ \frac{\partial \Phi}{\partial R}=0 \tag{2.2}$$

Положим $\varphi=\varepsilon\Phi$, $R=\beta r$, $X=x$, тогда

$$\varepsilon\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2}(1-M^2)+\varepsilon\beta^2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\ \frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)=0 \tag{2.3}$$

при $\beta^2 = 1 - M^2$ уравнение (2.3) тождественно совпадает с уравнением (2.2). Для определения величины ε в случае обтекания с той же скоростью U_0 несжимаемым потоком тела, сжатого в поперечном направлении в $1/\sqrt{1-M^2}$ раз, выполним граничные условия.

Для исходного тела уравнение его поверхности $f(x, r) = 0$, граничные условия

$$V_S=U_0\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial r}\ \frac{\partial f}{\partial r}=0$$

Для вспомогательного тела, сжатого в поперечном направлении в $1/\sqrt{1-M^2}$ раз, обтекаемого с той же скоростью U_0, уравнение поверхности $F(X, R) = 0$ и условие непротекания

$$V_S=U_0\frac{\partial F}{\partial X}+\frac{\partial \Phi}{\partial R}\ \frac{\partial F}{\partial R}=U_0\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial r}\ \frac{\partial F}{\partial r}\ \frac{1}{\varepsilon\beta^2}=0$$

Следовательно, $\varepsilon = 1/\beta^2$, но поскольку вспомогательное тело сжато в поперечном направлении, $F=f\sqrt{1-M^2}$. Проекции возмущенной скорости будут

$$u_c=\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{1}{1-M^2}\ \frac{\partial \Phi}{\partial X}=\frac{u_B}{1-M^2}$$

$$v_{rc}=\frac{\partial \varphi}{\partial r}=\frac{1}{1-M^2}\ \frac{\partial \Phi}{\partial r}=\frac{v_{rB}}{\sqrt{1-M^2}}$$

где $v_{rB} = \partial\Phi/\partial r$.

Скорости u_B, v_{rB} относятся к поверхности вспомогательного тела. В приложении к кавернам, с тем же приближением число кавитации $\sigma_B = 2u_B/U_0$, σ_B относится не к исходной конфигурации, а к афинно-сжатой в поперечном направлении в $1/\sqrt{1-M^2}$ раз, т.е. к вспомогательному телу с увеличенным удлинением $\lambda_B=\lambda/\sqrt{1-M^2}$. Поэтому если зависимость числа кавитации от удлинения $\lambda = L_k/R_k$ имеет вид для несжимаемой жидкости $\sigma = 1/\lambda^2 f(\lambda^2)$, то для сжимаемой жидкости при том же λ число кавитации возрастает

$$\sigma_c(1-M^2)=\frac{1-M^2}{\lambda^2}f\left(\frac{\lambda^2}{1-M^2}\right)$$

Так, если по старым формулам $L_k\sigma/R_S = \text{const}$, $R_k = R_S\sqrt{C_x/\sigma}$ и $\sigma = \text{const}/\lambda^2$, получится $\sigma_c = \sigma$, т.е. сжимаемость не приводит к изменению σ. В формуле А.Д. Васина [3] $f(\lambda^2/e) = \ln(\lambda^2/e)$ (e – основание натурального логарифма) для несжимаемой жидкости, следовательно, для сжимаемой жидкости получится

$$\sigma_c=\frac{1}{\lambda^2}\ln\frac{\lambda^2}{e(1-M^2)} \tag{2.4}$$

(Формула (2.4) была выведена А.Д. Васиным с использованием метода источников.)

Приведенное преобразование координат и все выводы принадлежат Л. Прандтлю, здесь изложение повторяет Л.Г. Лойцянского [2], но применительно к кавитационному течению.

В приложении к тонким кавернам заметим, что σ и $u = \partial\varphi/\partial x$ постоянны вдоль каверны, следовательно, вблизи каверн $\partial^2\varphi/\partial x^2 = 0$, а при больших r функция $u(x, r)$ имеет пологий максимум по x. Поэтому в первом приближении слагаемое в уравнении (2.1), зависящее от М, должно быть малой величиной более высокого порядка по сравнению с последними двумя слагаемыми. А тогда дело сводится к радиальному расширению некоторого поперечного сечения каверны, фиксированного относительно неподвижной жидкости, и сжимаемость на это расширение не должна влиять. В [4, 5] показано, что в этих условиях задача приводит к уравнению С.С. Григоряна, которое можно свести к уравнению энергии для $\sigma = 0$. Таким образом, если поперечное сечение каверны расширяется в несжимаемой жидкости, то справедливо уравнение расширения [5]

$$\frac{dR^2}{2dt}=\left[\frac{X/(\pi\rho)-R^2\Delta p/\rho}{\ln R/R_1+A}\right]^{1/2} \tag{2.5}$$

Однако сжимаемость скажется через сопротивление кавитатора при пересечении данного сечения каверны $X = X(t_0, \mathrm{M})$ в момент времени $t = t_0$. Не очень ясно, эквивалентно ли это влияние повышению σ_c по сравнению с σ_{nc} несжимаемой жидкости по (2.4) для того же кавитатора и удлинения λ. В этом случае $\sigma_c > \sigma_{nc}$.

Как можно заключить из предыдущего, практически влияние сжимаемости не очень велико и в обычной лабораторной практике его обнаружить очень трудно. Однако эти исследования имеют принципиальное значение и в этом отношении интересны и важны.

Если уменьшать число кавитации, сохраняя конфигурацию границ каверны, относительное влияние на σ числа Маха М также будет уменьшаться, и при $\sigma \to 0$ обтекание каверны вообще не будет зависеть от числа М.

Полутело конечного сопротивления [6] можно рассматривать как каверну при $\sigma = 0$ за счет $p_0 - p_k = 0$; тогда из настоящих рассуждений получается результат [6], заключающийся в том, что конфигурация осесимметричного полутела конечного сопротивления не зависит от числа Маха М.

3. Из интеграла Бернулли следует

$$\frac{1}{2}U_0^2=\int_0^{p_T-p_0}\frac{dp}{\rho}$$

$$dp = d(p-p_0) = d\Delta p$$

где p_T – давление торможения.

$\Delta p/\varkappa$	0.1	0.25	0.5	Метод
1/2 M^2	0.0953	0.223	0.4	Линейное приближение
U_0 м/с	286	669	1200	
1/2 M^2	0.0959	0.23	0.439	Уравнение
U_0 м/с	288	690	1317	Тета

В линейном приближении $\rho = \rho_0(1 + \Delta\rho/\varkappa)$. Интеграл равен $a_0^2 \ln(1 + \Delta p / \varkappa)$, и окончательно $\frac{1}{2}M^2 = \ln(1 + \Delta p / \varkappa)$. Приближенно

$$p_T - p_0 = \varkappa(e^{\frac{1}{2}M^2} - 1) \sim \frac{1}{2}\rho_0 U_0^2\left(1 + \frac{1}{4}M^2 + \ldots\right) \quad (3.1)$$

Если использовать уравнение Тета, получится

$$\frac{1}{2}M^2 = \frac{1}{n-1}\left[\left(1 + \frac{p_T - p_0}{\varkappa}n\right)^{(n-1)/n} - 1\right]$$

Результаты расчета даны в таблице.

Из предыдущего следует, что в дозвуковых потоках сжимаемой воды для анализа течений можно с достаточной точностью пользоваться линейным (акустическим) приближением в определении плотности в зависимости от давления. Также можно предположить, что коэффициент сопротивления кавитатора при $1 > M > 0$ пропорционален $C_x(M) / C_x(0) = (1 + \frac{1}{4}M^2 + \ldots)$. Тогда выполнение результата М.И. Гуревича для $\sigma = 0$ требует условия для диаметра кавитатора $d^2(1 + \frac{1}{4}M^2 + \ldots) = d_0^2$, где d_0 соответствует $M = 0$.

Заключение. Использование метода Л. Прандтля привлекательно своей простотой и наглядностью. Представляется, что хотя приведенный здесь анализ никаких "новых Америк" не открывает, но в некоторой степени разъясняет практическую ситуацию с учетом сжимаемости воды при кавитационных течениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прандтль Л.* Гидромеханика. М.: Изд-во иностр. лит. 1949. 520 с.
2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Физматгиз, 1959. 784 с.
3. *Васин А.Д.* Тонкие осесимметричные каверны в дозвуковом потоке сжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 174–177.
4. *Логвинович Г.В.* Вопросы теории тонких осесимметричных каверн // Тр. ЦАГИ. 1976. Вып. 1797. 25 с.
5. *Логвинович Г.В.* О законе расширения нестационарной каверны // Прикл. гидромеханика. 2000. Т. 2(74). № 3.
6. *Гуревич М.И.* Полутело конечного сопротивления в дозвуковом потоке // Тр. ЦАГИ. 1947. Вып. 653. 12 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.II.2002