

УДК 532.5.013.4:536.24

© 2002 г. П.Т. ЗУБКОВ, Е.В. КАЛАБИН, А.В. ЯКОВЛЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ПРЕСНОЙ ВОДЫ ВБЛИЗИ 4°C В КУБИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Численно решена задача о естественной конвекции воды вблизи температуры инверсии плотности в кубической полости с изотермическими горизонтальными гранями и теплоизолированными вертикальными. Получено шесть стационарных течений при различных числах Грасгофа, выявлены диапазоны их существования.

Ключевые слова: естественная конвекция воды, температура инверсии, бифуркация.

Одним из основных способов передачи тепла в жидкости является естественная конвекция, которая в холодной воде осложняется аномальной зависимостью плотности от температуры: чистая пресная вода имеет максимум плотности при температуре около 4°C. Экстремум плотности возникает при низких температурах вследствие усиления связей в водороде и ослабления интенсивности теплового движения молекул.

Инверсия плотности воды приводит к большему разнообразию конвективных течений по сравнению с жидкостями, у которых плотность линейно зависит от температуры, поэтому изучение конвекции именно холодной воды представляет определенный интерес. В [1] детально изучена естественная конвекция воды вблизи температуры инверсии плотности в квадратной ячейке с изотермическими горизонтальными стенками и адиабатическими вертикальными. Численно получены несколько стационарных решений при различных числах Грасгофа, и изучены диапазоны их существования.

В природе плоские течения составляют довольно узкий класс решений задач о конвекции, поэтому, особенно в последнее время, решаются задачи конвекции в трехмерной постановке. В [2] изучаются естественная конвекция и эффекты переноса тепла на вертикальных стенках в трехмерной кубической полости с адиабатическими горизонтальными стенками. В [3] рассматривается естественная конвекция в кубической области при малых числах Релея. В [4] изучаются естественная конвекция воздуха и теплоперенос в кубической полости с движущейся верхней гранью и изотермическими горизонтальными стенками при различных числах Re.

1. Постановка задачи. Исследуется естественная конвекция воды вблизи точки инверсии плотности в кубической ячейке с изотермическими горизонтальными и адиабатическими вертикальными стенками. Нелинейная зависимость плотности воды от температуры аппроксимируется формулой Гебхарта–Моллендорфа [5]:

$$\rho(T) = \rho_m \left(1 - \gamma |T - T_m|^b \right), \quad \rho_m = 999.9720 \text{ кг/м}^3$$

$$\gamma = 9.297173 \cdot 10^{-6} \left(^\circ\text{C}^{-b} \right), \quad b = 1.894816$$

где ρ_m – максимальная плотность воды при температуре $T_m \approx 4^\circ\text{C}$.

Естественная конвекция несжимаемой жидкости описывается системой уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + g\gamma |T - T_m|^b \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T &= a \Delta T, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{v} = (u, v, w)$ и T – скорость течения и температура жидкости; ν – кинематическая вязкость; α – коэффициент температуропроводности; $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$ – вектор ускорения свободного падения; $p = p' - x_i \rho_m \mathbf{g}$ – давление без гидростатического давления в жидкости, где x_i – декартова координата (ниже $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$); t – время.

Рассматривается естественная конвекция воды в замкнутой кубической полости с ребром L . Начало декартовой системы координат расположено в нижнем углу области. На границе области G заданы условия прилипания, вертикальные грани области $G_v \in G$ адиабатические, верхняя и нижняя грани изотермические с температурами соответственно T_1 и T_2 , где $T_1 = T_m - T_0$ и $T_2 = T_m + T_0$, причем $T_0 \leq T_m$. Таким образом, верхняя и нижняя грани охлаждаются и подогреваются симметрично относительно T_m :

$$(x, y, z) \in G: u(x, y, z) = v(x, y, z) = w(x, y, z) = 0$$

$$(x, y, z) \in G_v: \frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

$$T(x, L, z) = T_1; \quad T(x, 0, z) = T_2$$

Для удобства решения и анализа определяющих параметров системы проведем следующее обезразмеривание:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad Z = \frac{z}{L}, \quad \text{Fo} = \frac{t\nu}{L^2} \quad (1.2)$$

$$U = \frac{uL}{\nu}, \quad V = \frac{vL}{\nu}, \quad W = \frac{wL}{\nu}, \quad \Theta = \frac{T - T_m}{T_2 - T_1}$$

После подстановки (1.2) в (1.1) система уравнений примет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \text{Fo}} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \Delta \mathbf{V} - \text{Gr} |\Theta|^b \mathbf{e}_y$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} + (\mathbf{V} \nabla) \Theta = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \Theta, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Gr} = \frac{g\gamma L^3 |T_2 - T_1|^b}{\nu^2}$$

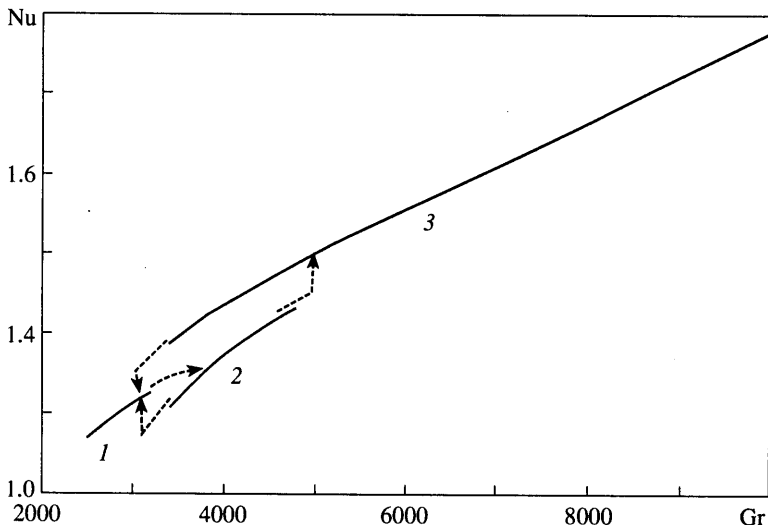
Здесь $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$, а все размерные параметры сгруппированы в числах Прандтля Pr и Грасгофа Gr . Вблизи температуры инверсии плотности вода имеет $\text{Pr} \approx 11.59$.

Граничные условия:

$$(X, Y, Z) \in G: U(X, Y, Z) = V(X, Y, Z) = W(X, Y, Z)$$

$$(X, Y, Z) \in G_v: \frac{\partial \Theta}{\partial n} = 0$$

$$\Theta(X, 1, Z) = 0.5; \quad \Theta(X, 0, Z) = -0.5$$



Фиг. 1. Зависимость числа Нуссельта (Nu) от числа Грасгофа ($0 \leq Gr \leq 10\,000$): 1, 2, 3 – типы течений

Интенсивность теплообмена на границах области оценивается с помощью средних чисел Нуссельта на верхней и нижней гранях:

$$\langle Nu \rangle_d = \iint_{0,0}^{1,1} \left. \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right|_{Y=0} dXdZ, \quad \langle Nu \rangle_u = \iint_{0,0}^{1,1} \left. \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right|_{Y=1} dXdZ$$

В численных расчетах использовался метод контрольного объема с алгоритмом SIMPLER [7]. Исследование проводилось на равномерной сетке, содержащей $39 \times 39 \times 39$ контрольных объемов. Шаг по времени равнялся $0.1 \Delta X^2$.

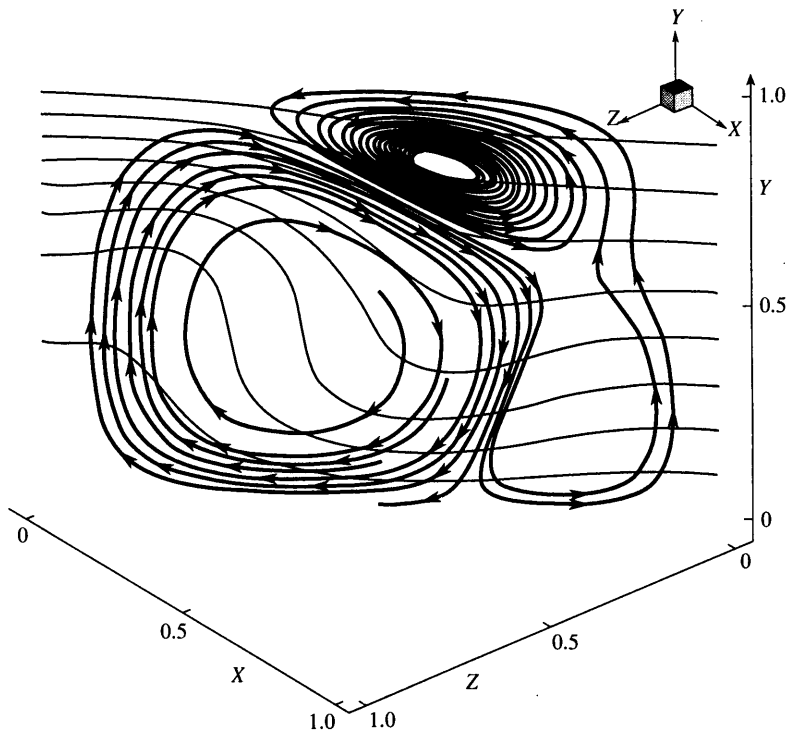
2. Полученные результаты. На фиг. 1 представлены кривые зависимости безразмерных средних тепловых потоков от изменения числа Грасгофа ($0 \leq Gr \leq 10\,000$). Каждая кривая на графике представляет собой отдельный тип стационарного решения. При движении вверх (вниз) по числу Грасгофа за начальное приближение берутся поля скоростей, давления и температуры из решения с меньшими (большими) значениями Gr.

При $0 \leq Gr \leq 2000$ конвекции нет, и имеет место аналитическое решение:

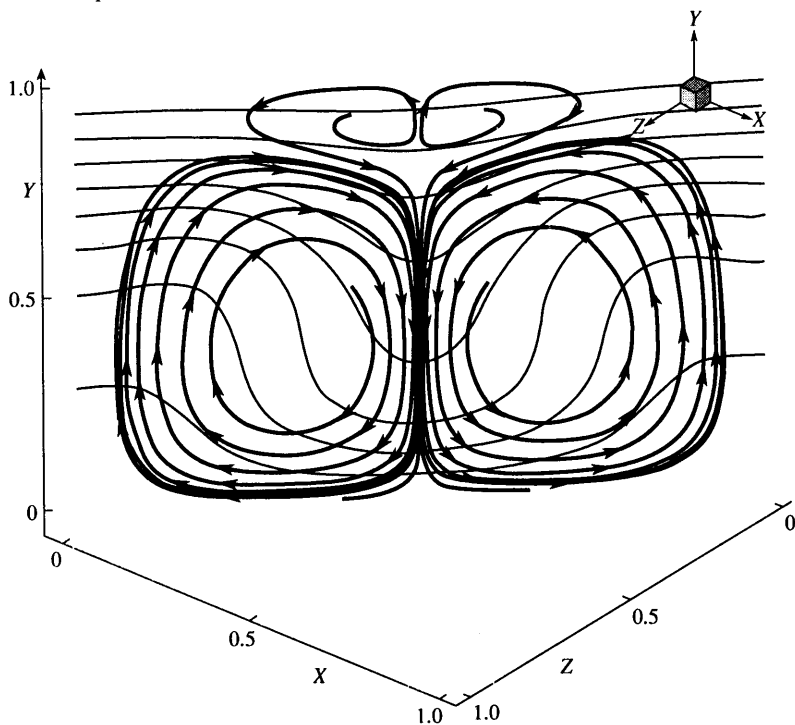
$$U = V = W = 0; \quad \Theta = 0.5 - Y; \quad P = Gr \int_0^1 |\Theta|^b dY + \text{const}$$

При $Gr > 2 \cdot 10^3$ состояние покоя абсолютно неустойчиво и переходит в течение первого типа. Это течение симметрично относительно плоскости $X + Z = 1$, параллельной оси Y (фиг. 2). Оно существует в диапазоне $2 \cdot 10^3 < Gr < 4 \cdot 10^3$. При $Gr > 3.4 \cdot 10^3$ возникает течение второго типа, которое симметрично относительно двух диагональных плоскостей $X + Z = 1$ и $X - Z = 0$, параллельных оси Y (фиг. 3). Область существования этого решения $3.4 \cdot 10^3 < Gr < 5 \cdot 10^3$, и при $Gr = 5 \cdot 10^3$ оно переходит в третий тип. Решение третьего типа симметрично относительно центральной плоскости $X = 0.5$, параллельной оси Y (фиг. 4). Если же находиться на ветви третьего типа течения и уменьшать число Грасгофа, то при $Gr = 3.2 \cdot 10^3$ третий тип переходит в первый. Исследованный диапазон существования течения третьего типа $3.2 \cdot 10^3 < Gr < 1.7 \cdot 10^4$.

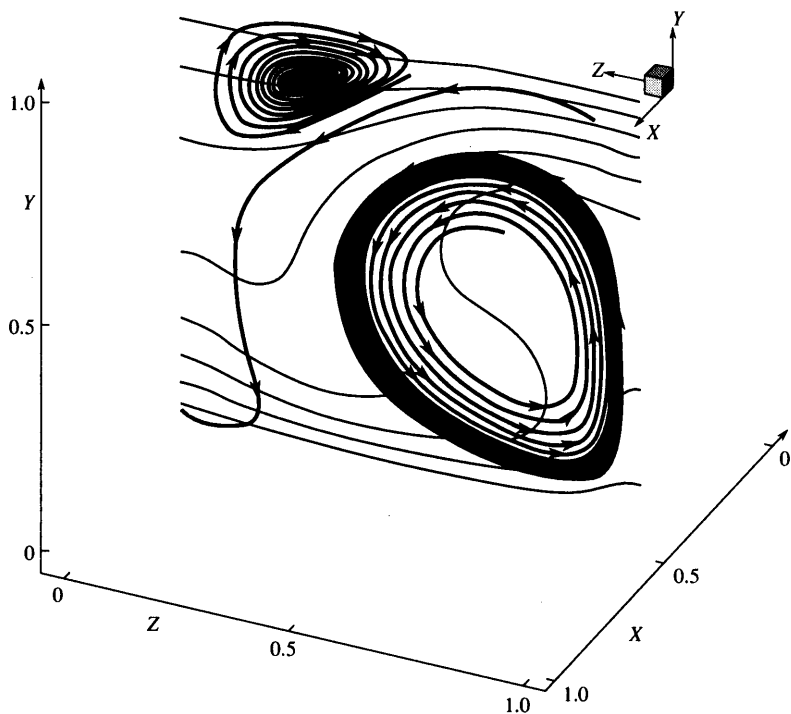
Далее изучаются процессы выхода системы на стационарный режим при различных начальных условиях при постоянном числе $Gr = 1.7 \cdot 10^4$. Для начальных



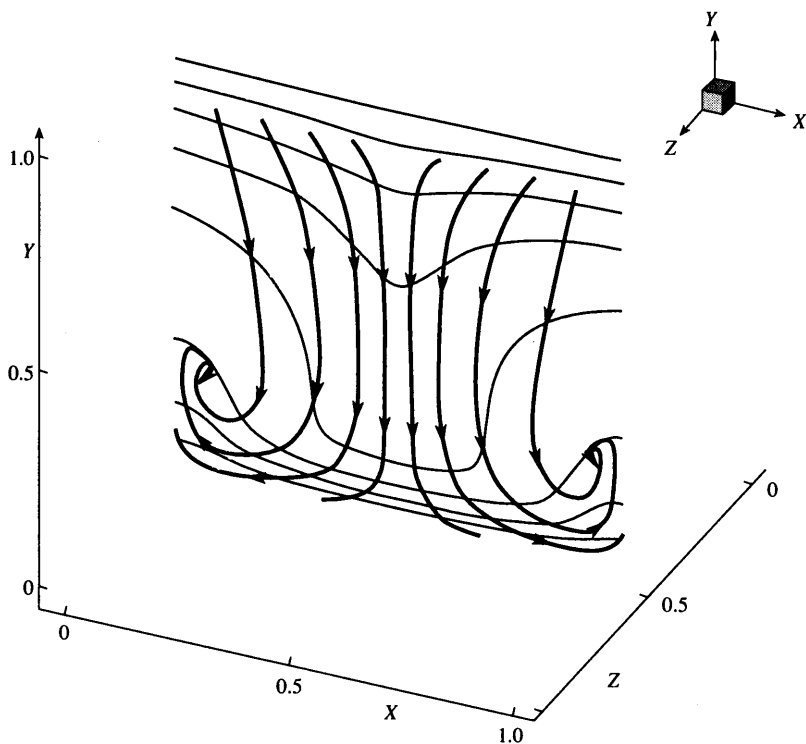
Фиг. 2. Изотермы (тонкие линии) и схематичная структура течения 1 типа в плоскости симметрии $X + Z = 1$



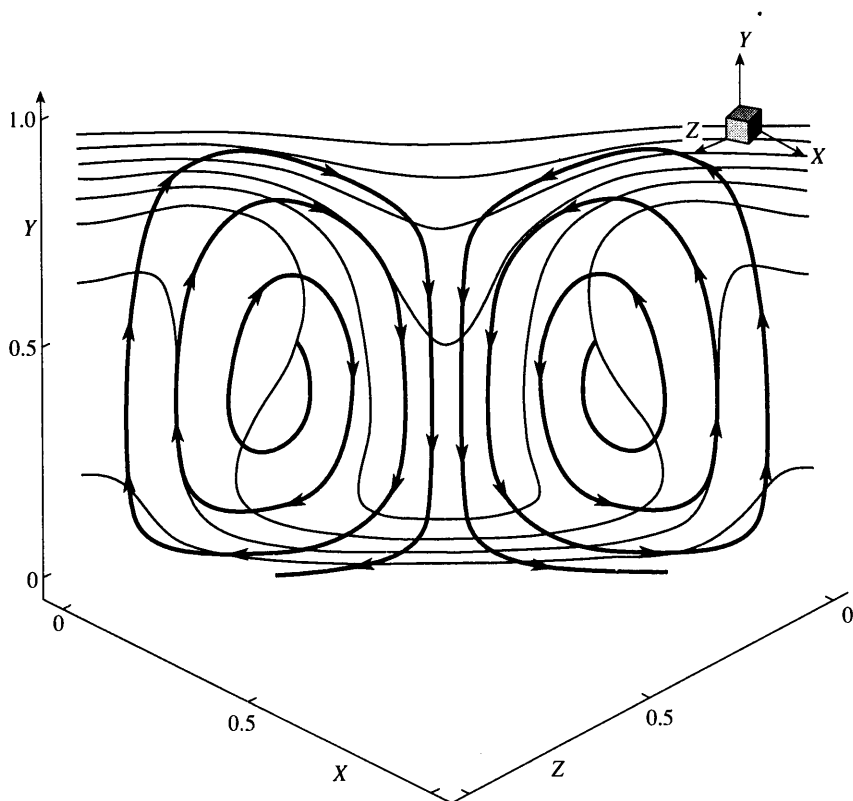
Фиг. 3. Изотермы (тонкие линии) и схематичная структура течения 2 типа в плоскости симметрии $X + Z = 1$



Фиг. 4. Изотермы (тонкие линии) и схематическая структура течения 3 типа в плоскости симметрии $X = 0.5$



Фиг. 5. Изотермы (тонкие линии) и схематическая структура течения, симметричного относительно двух плоскостей $X = 0.5$ и $Z = 0.5$, параллельных оси Y



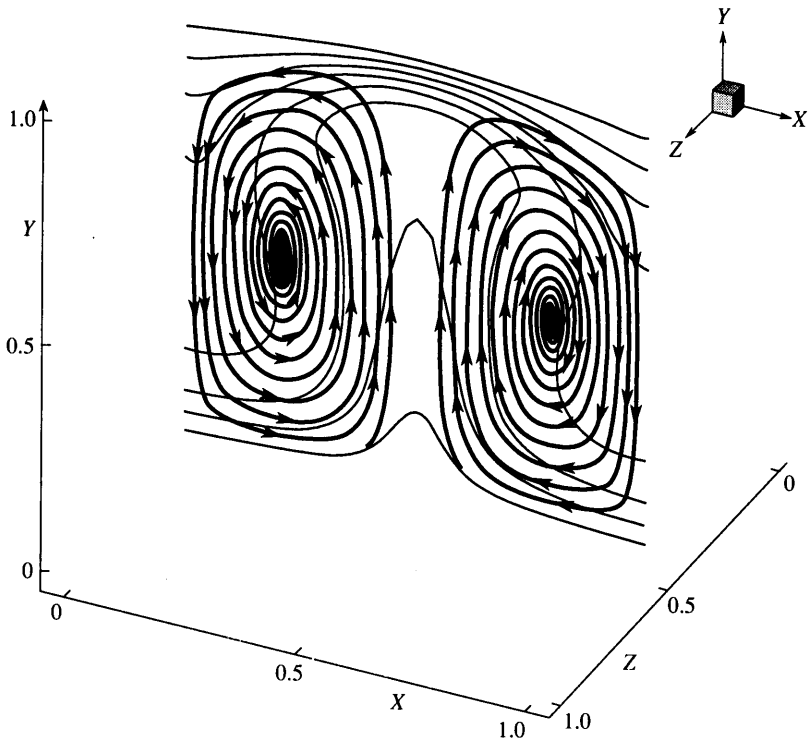
Фиг. 6. Изотермы (тонкие линии) и схематичная структура течения, симметричного относительно плоскостей $X = 0.5$, $Z = 0.5$ и диагональных плоскостей $X + Z = 1$, $X - Z = 0$, параллельных оси Y

условий $\Theta = 0.5$, $\Theta = -0.5$ и $\Theta = 0$, несмотря на различное развитие течения, в конечном итоге получается одно решение, симметричное относительно центральной плоскости $X = 0.5$, параллельной оси Y , или течение третьего типа (фиг. 4). Значение числа Нуссельта для него равно 2.6922.

Так как изучаем симметричную задачу (симметричные граничные условия и сама расчетная область), то можно предположить, что должно существовать полностью симметричное течение (т.е. течение, симметричное относительно плоскостей $X = 0.5$, $Z = 0.5$ и двух диагональных плоскостей $X + Z = 1$, $X - Z = 0$, параллельных оси Y). Поэтому помимо различных начальных условий в области ставились условия симметрии, т.е. копировались поля скорости, давления и температуры симметрично относительно двух плоскостей $X = 0.5$, $Z = 0.5$, параллельных оси Y . После выхода системы на стационарный режим условия симметрии отключались.

Как уже отмечалось выше, без условий симметрии после начального периода чистой теплопроводности развивается как раз полностью симметричное решение, но после некоторого промежутка времени (различного для каждого конкретного случая) оно переходит в решение третьего типа.

При использовании условий симметрии с начальным условием $\Theta = 0.5$ получилось течение, изображенное на фиг. 5. При выходе на стационарный режим (время выхода $Fo \approx 5$) значения тепловых потоков равны 2.6783. С начальным условием $\Theta = -0.5$ получилось решение, симметричное еще и относительно диагональных плоскостей $X + Z = 1$, $X - Z = 0$, параллельных оси Y (фиг. 6). Время выхода на стационар теперь составляет $Fo \approx 4$, и итоговые значения потоков равны 2.8060. В обоих этих течениях



Фиг. 7. Изотермы (тонкие линии) и схематичная структура течения, симметричного относительно плоскостей $X = 0.5$, $Z = 0.5$ и диагональных плоскостей $X + Z = 1$, $X - Z = 0$, параллельных оси Y , с течением воды у стенок вниз

вода у стенок течет вверх. Также было получено решение с течением у стенок вниз (фиг. 7). При выходе на стационарный режим значения тепловых потоков равны 2.7206.

Заключение. В результате численного исследования естественной конвекции пресной воды вблизи 4°C в кубической области с изотермическими горизонтальными гранями и теплоизолированными вертикальными в диапазоне числа Грасгофа от 0 до 17 000 было получено шесть типов стационарных течений. Детально исследовано существование трех типов течений при различных числах Грасгофа. В диапазоне $3.4 \cdot 10^3 < Gr < 5 \cdot 10^3$ существуют два типа течений (второе и третье) с разным значением числа Нуссельта. При движении вверх и вниз по числу Грасгофа в диапазоне $2 \cdot 10^3 < Gr < 5 \cdot 10^3$ наблюдается явление гистерезиса с различным переходом между типами течений. Также были получены дополнительно три симметричных течения при фиксированном числе Грасгофа с использованием условий симметрии, которые отключались при выходе системы на стационарный режим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубков П.Т., Климин В.Г. Численное исследование естественной конвекции чистой воды вблизи точки инверсии плотности. // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 4. С. 171–176.
2. Le Peutrec Y., Lauriat G. Effects of the Heat Transfer at the Side Walls on Natural Convection in Cavities // Trans. Asme. J. Sec. C. Heat Transfer. 1990. V. 112. № 2. P. 370–378.
3. Pallares J., Cuesta I., Grau F.X. Natural convection in a cubical cavity heated from below at low Rayleigh numbers // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1996. V. 39. № 15. P. 3233–3247.

4. *Reima Iwatsu, Jae Min Hyun*. Tree-dimensional driven-cavity flows with a vertical temperature gradient // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. № 18. P. 3319–3328.
5. *Gebhart B., Mollendorf J.* A new density relation for pure and saline water // Deep-Sea Res. 1977. V. 24. № 9. P. 831–848.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.

Сургут

Поступила в редакцию
21.VI.2001