

УДК 532.526:532.527

© 2002 г. В.Г. СУДАКОВ, В.В. СЫЧЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЯЗКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИХРЯ С ПЛОСКОСТЬЮ

С помощью метода построения сращиваемых асимптотических разложений решается задача о вязком взаимодействии течения, индуцируемого вихревой нитью, с ортогональной ей твердой поверхностью при больших числах Рейнольдса. Ввиду невозможности непосредственного сращивания главных членов асимптотических разложений для приосевого пограничного слоя и основной области течения решение проблемы достигается путем введения двух промежуточных областей. При этом на вихревой нити неизбежно возникает логарифмическая особенность для осевой скорости. Решение в приосевой области получено численно, в промежуточных областях – аналитически, а в основной области задача сводится к задаче о течении, вызываемом линией вихресток с малой закруткой.

Ключевые слова: вихревые течения с закруткой, вязкость, автомодельность, конические течения, асимптотическая теория.

Проблема вязкого взаимодействия осесимметричных течений с закруткой с твердой поверхностью принадлежит к числу тех, которые до сих пор не получили своего удовлетворительного разрешения. Между тем такие течения представляют значительный интерес как по принципиальным соображениям, так и потому, что они наблюдаются в интенсивных атмосферных вихрях и в некоторых технических устройствах типа вихревых камер. Простейшей моделью этих течений является задача о вязком взаимодействии вихревой нити с ортогональной ей твердой поверхностью.

Поскольку определяющие параметры этой задачи – циркуляция $2\pi\Gamma_0$ и коэффициент кинематической вязкости ν имеют одинаковые размерности, ее решение является автомодельным, т.е. система уравнений Навье – Стокса сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В [1] было впервые показано, что при условии ограниченности осевой скорости на вихревой нити решение поставленной задачи существует лишь в ограниченном диапазоне чисел Рейнольдса $Re = \Gamma_0/\nu < 5.53$. Этот результат является парадоксальным, так как решение, конечно, должно существовать при всех числах Re . В [2] предположение о конечности осевой скорости на оси было снято и показано, что решение задачи будет существовать при любых числах Re , если допустить для нее существование логарифмической особенности на оси. Однако этот результат был подвергнут критике по ряду соображений [3, 4], одно из которых состоит в неопределенности коэффициента при логарифме.

Цель настоящей работы – исследование задачи о взаимодействии вихря с плоскостью при больших числах Re с помощью построения системы сращиваемых асимптотических разложений. Поле течения при $Re \gg 1$ подразделяется на четыре области. Прежде всего это приосевой пограничный слой, где окружная и осевая скорости достигают своих экстремальных значений (а радиальная составляющая по сравнению с ними мала) и основная область течения, характеризующаяся тем, что в ней осевая и радиальная компоненты имеют одинаковый порядок величины, а окружная скорость по порядку величины оказывается много меньше. Так как непосредственное сращивание главных членов асимптотических разложений для этих областей невозможно,

то оказывается необходимым введение двух промежуточных областей, которые по принципу перекрытия [5] обеспечивают возможность сращивания всех асимптотических разложений в их главных членах. Таким образом, найдено решение во всей области течения. Наиболее важными результатами являются при этом неизбежность возникновения логарифмической особенности для осевой составляющей скорости на вихревой нити с вполне определенным коэффициентом, а также весьма малая закрутка потока в основной области, где течение в главных членах соответствует известному решению для линии стоков [6]. В целом, картина течения качественно вполне соответствует тенденции, описанной в [4] при числе Re , приближающемся к критическому значению 5.53 – оно является вязким во всех областях, так что пограничный слой вблизи твердой поверхности не формируется, а вращение жидкости локализуется вблизи оси.

1. Рассмотрим стационарное осесимметричное вращательное движение вязкой несжимаемой жидкости над плоской бесконечной твердой поверхностью под действием вихревой нити с заданной циркуляцией $2\pi\Gamma_0$. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z , где линия $r = 0$ совпадает с осью вихря, которая перпендикулярна твердой поверхности $z = 0$, u, v, w – радиальная, окружная и осевая компоненты скорости, p, ρ, ν – давление, плотность и кинематический коэффициент вязкости. Уравнения Навье – Стокса в таком случае могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

При этом на оси симметрии вихря $r = 0$ задается значение Γ_0 , а на твердой поверхности ставится условие прилипания, т.е. условие равенства нулю всех составляющих скорости.

В данной задаче три определяющих параметра: Γ_0, ρ, ν , из которых нельзя составить комбинацию с размерностью длины, поэтому рассматриваемая задача относится к типу автомодельных. Число Рейнольдса задачи $Re = \Gamma_0/\nu$.

Функция тока меридионального течения ψ определяется соотношениями

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.2)$$

Из условия баланса вязких и инерционных членов в уравнениях (1.1) следует, что она должна иметь вид

$$\psi = \nu z f(\xi), \quad \xi = \text{const} \left(\frac{r}{z} \right) \quad (1.3)$$

Тогда на основании (1.2) $w = \text{const}(\nu/r)f'$. В ядре вихря окружная и осевая составляющие вектора скорости, достигающие своих экстремальных значений, должны быть одного порядка, так как только в этом случае обеспечивается влияние градиента давления как в первом, так и в третьем из уравнений (1.1). Тогда, учитывая что $v \sim \Gamma_0/r$, нетрудно установить, что $\text{const} = Re$, т.е. независимой переменной порядка

единицы будет

$$\xi = \operatorname{Re} \frac{r}{z} \quad (1.4)$$

Используя (1.2)–(1.4), представим искомые функции в виде

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{\Gamma_0}{z}\right) U(\xi), \quad U(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(\xi)}{\xi} \\ v &= \left(\frac{\Gamma_0}{z}\right) \operatorname{Re} V(\xi), \quad V(\xi) = \frac{g(\xi)}{\xi} \\ w &= \left(\frac{\Gamma_0}{z}\right) \operatorname{Re} W(\xi), \quad W(\xi) = \frac{f'(\xi)}{\xi} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\frac{p - p_\infty}{\rho} = -\left(\frac{\Gamma_0}{z}\right)^2 \operatorname{Re}^2 h(\xi)$$

Подставив (1.5) в (1.1) и сохраняя главные члены, получим следующую систему уравнений:

$$g^2 + \xi^3 h' = 0, \quad \xi g'' + (f-1)g' = 0, \quad \xi f'' + (f-1)f' - \xi^3 h = 0 \quad (1.6)$$

Третье уравнение (1.6) является первым интегралом третьего уравнения (1.1). Эта система соответствует квазицилиндрическому приближению. Для получения граничных условий системы (1.6) необходимо рассмотреть поведение искомых функций при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow \infty$.

На оси вращения $r = 0$ должны выполняться условия: $f = 0$, $g = 1$. Разложения искомых функций при $\xi \rightarrow 0$ тогда будут иметь вид

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{4} \xi^2 \ln \xi + a_1 \xi^2 + O(\xi^4 \ln^2 \xi) \\ g(\xi) &= 1 + b_1 \xi^2 + O(\xi^3 \ln \xi) \\ h(\xi) &= \frac{1}{2\xi^2} + O(\ln \xi) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Появление логарифмического члена в разложении для $f(\xi)$ является следствием того, что $g(0) = 1$. В результате безразмерная осевая скорость

$$W(\xi) = \frac{1}{2} \ln \xi + O(1)$$

т.е. подтверждается указанная в [2] необходимость отказа от условия конечности осевой составляющей скорости при $r \rightarrow 0$. Логарифмическая особенность в поведении осевой скорости является следствием более сильной особенности в поведении окружной скорости, которая при $\xi \rightarrow 0$ пропорциональна $1/\xi$. Коэффициент при логарифмическом члене определен; он является положительным, так что течение на оси направлено вниз. Постоянные a_1 , b_1 в (1.7) подлежат определению при решении краевой задачи.

Для определения поведения решения при $\xi \rightarrow \infty$ заметим, что функция g , как следует из второго уравнения (1.6), монотонно убывающая функция. Случай $f \sim \xi$ при $\xi \rightarrow \infty$ известен и соответствует невязкой асимптотике, при которой течение во внешней области $r/z = O(1)$ будет невязким. Удовлетворение условиям прилипания путем введения в рассмотрение пограничного слоя на твердой поверхности при этом оказывается невозможным [7]. Поэтому в данной работе рассмотрена вязкая асимптотика $f \rightarrow A_0$ при $\xi \rightarrow \infty$, где $A_0 = \text{const}$.

Тогда можно получить следующие представления функций при $\xi \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= A_0 + \frac{A_1}{\xi^{A_0-2}} + O\left(\frac{1}{\xi^{2(A_0-3)}}\right) \\ g(\xi) &= \frac{B_1}{\xi^{A_0-2}} + O\left(\frac{1}{\xi^{2(A_0-2)}}\right) \\ h(\xi) &= \frac{B_1}{2(A_0-1)} \frac{1}{\xi^{2(A_0-1)}} + O\left(\frac{1}{\xi^{3A_0-4}}\right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Если предположить, что баланс между членом, соответствующим градиенту давления ($\xi^3 h$), и остальными членами в третьем из уравнений (1.6) при $\xi \rightarrow \infty$ сохраняется, то постоянная A_0 будет равна 4. Но в этом случае асимптотическое представление функции $f(\xi)$ будет содержать логарифмический член и иметь вид

$$f(\xi) = 4 - \frac{B^2}{12} \frac{1}{\xi^2} \ln \xi + A_2 \frac{1}{\xi^2} + O\left(\frac{1}{\xi^4} \ln^2 \xi\right)$$

Появление логарифмического члена во внутренней области течения представляется весьма сомнительным. Численное исследование также показывает, что соответствующего решения краевой задачи при такой асимптотике не существует. Поэтому необходимо положить $A_0 > 4$. Из соображений симметрии следует, что функция $f(\xi)$ должна быть четной. Наименьшее число, удовлетворяющее этому требованию, есть $A_0 = 6$. Тогда при $\xi \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} f(\xi) &= 6 + A_1 \xi^{-4} + O(\xi^{-6}), \quad g(\xi) = B_1 \xi^{-4} + O(\xi^{-8}) \\ h(\xi) &= \frac{B_1}{10} \xi^{-10} + O(\xi^{-14}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Постоянные A_1, B_1 подлежат определению при решении краевой задачи.

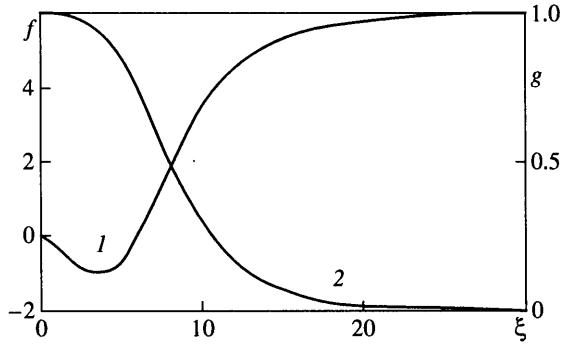
Таким образом, имеем следующую краевую задачу: система нелинейных дифференциальных уравнений пятого порядка (1.6), два граничных условия при $\xi \rightarrow 0$ (1.7) и три граничных условия при $\xi \rightarrow \infty$ (1.9).

Численное решение полученной краевой задачи проводилось, как и в [8], на основе неявного конечно-разностного метода с аппроксимацией дифференциальных уравнений по двухточечной схеме Келлера второго порядка точности. Решение системы нелинейных конечно-разностных уравнений осуществлялось при помощи метода Ньютона – Рафсона с автоматическим выбором итерационного параметра. Для решения линеаризованной системы сеточных уравнений на итерации по нелинейности применялся метод монотонной трехточечной векторной прогонки.

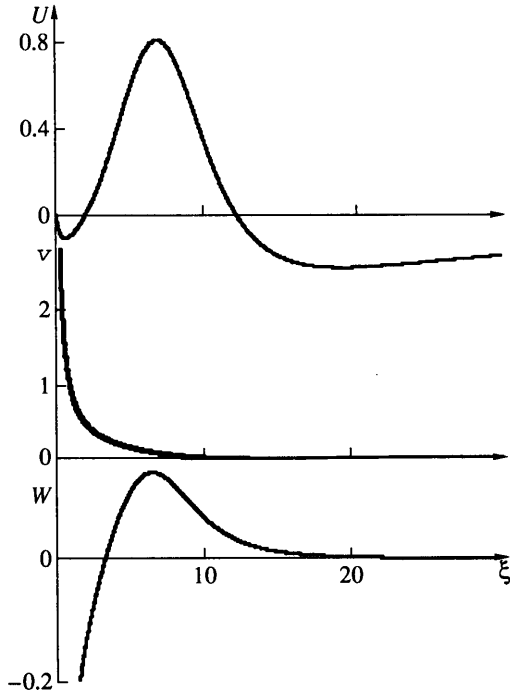
На фиг. 1 представлены полученные графики безразмерных функций f и g , которые характеризуют функцию тока меридионального течения и циркуляцию. На фиг. 2 представлены графики безразмерных функций $U(\xi), V(\xi), W(\xi)$, которые характеризуют радиальную, окружную и осевую компоненты скорости соответственно. Линии тока меридионального течения представлены в переменных $\text{Re } r$ и z и определены на основе параметрических соотношений, следующих из (1.3) и (1.4)

$$\text{Re } r = \left(\frac{\Psi}{v}\right) \frac{\xi}{f}, \quad z = \left(\frac{\Psi}{v}\right) \frac{1}{f}$$

Картина линий тока меридионального течения приведена на фиг. 3.

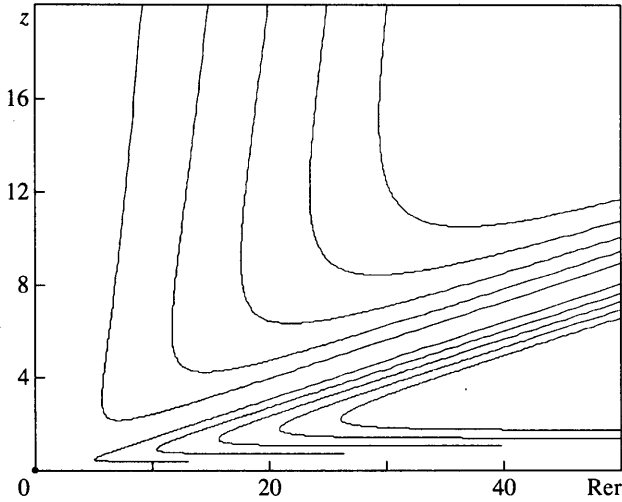


Фиг. 1. Расчетные функции, характеризующие течение в приосевой области: 1 – безразмерная функция тока $f(\xi)$; 2 – безразмерная циркуляция $g(\xi)$



Фиг. 2. Безразмерная радиальная $U(\xi)$, окружная $V(\xi)$ и осевая $W(\xi)$ скорости в приосевой области

2. Сращивание решения для приосевой области с асимптотикой (1.9) при $\xi \rightarrow \infty$ и решения для области основного течения, где $r/z \sim 1$, в главных членах невозможно. Поэтому необходимо ввести промежуточные области. Прежде всего это область, где радиальная и окружная составляющие вектора скорости сравниваются по порядку величины: $u/v = O(1)$. В этой области нарушается квазицилиндрическое приближение. На основании (1.5) и асимптотических представлений (1.9) нетрудно установить, что это происходит при $\xi = O(\text{Re}^{1/4})$. Поэтому вводим для этой области независимую переменную порядка единицы $\eta = \text{Re}^{3/4} r/z$. Вновь используя (1.5) и (1.9), получим



Фиг. 3. Картина линий тока в приосевой области

следующие представления для искомых функций течения при $\eta = O(1)$

$$u = \left(\frac{\Gamma_0}{z}\right) \text{Re}^{-1/4} U_1(\eta), \quad v = \left(\frac{\Gamma_0}{z}\right) \text{Re}^{-1/4} V_1(\eta) \quad (2.1)$$

$$w = \left(\frac{\Gamma_0}{z}\right) \text{Re}^{-1/2} W_1(\eta), \quad \frac{p - p_\infty}{\rho} = -\left(\frac{\Gamma_0}{z}\right)^2 \text{Re}^{-1/2} P_1(\eta)$$

Подставляя (2.1) в уравнения Навье – Стокса (1.1), получим для главных членов следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \eta^2 U_1 U_1' - \eta V_1^2 &= \eta^2 P_1' + \eta^2 U_1'' + \eta U_1' - U_1 \\ \eta^2 U_1 V_1' + \eta U_1 V_1 &= \eta^2 V_1'' + \eta V_1' - V_1 \\ \eta W_1'' + (1 - \eta U_1) W_1' &= 0, \quad \eta U_1' + U_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решение этой системы можно получить аналитически

$$\begin{aligned} U_1(\eta) &= -6\eta^{-1}, \quad V_1(\eta) = B_1 \eta^{-5} + \beta_1 \eta^{-1} \\ W_1(\eta) &= -4A_1 \eta^{-6} + \gamma_1 \\ P_1(\eta) &= \frac{B_1^2}{10} \frac{1}{\eta^{10}} + \frac{B_1 \beta_1}{3} \frac{1}{\eta^6} + \frac{36 + \beta_1^2}{2} \frac{1}{\eta^2} + \delta_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Постоянные интегрирования β_1 и δ_1 следует положить равными нулю на основании требования монотонности убывания циркуляции (пропорциональной ηV) и перепада давления ($p - p_\infty$), а постоянная $\gamma_1 = 0$ из условия обеспечения сращивания с основной областью течения, где $u/w = O(1)$. Отсюда при $\eta \rightarrow \infty$

$$U_1(\eta) \sim -6\eta^{-1}, \quad V_1(\eta) \sim B_1 \eta^{-5}; \quad W_1(\eta) \sim -4A_1 \eta^{-6}, \quad P_1(\eta) \sim 18\eta^{-2} \quad (2.4)$$

Таким образом, рассмотрение области, где $u/v = O(1)$, необходимо для учета влияния радиальной скорости на давление.

Тем не менее сращивание области $\eta = O(1)$ с асимптотикой (2.4) и области основного течения, где $r/z = O(1)$, в главных членах невозможно. Поэтому необходимо ввести еще одну промежуточную область. Пусть система соотношений для области $\eta = O(1)$ перестает быть справедливой при $\eta \sim \text{Re}^\alpha$. Тогда можно ввести в рассмотрение переменную

$$\zeta = \text{Re}^{3/4-\alpha}(r/z), \quad \alpha < 3/4$$

и рассмотреть область, где $\zeta = O(1)$.

На основе условий сращивания с главными членами разложения при $\eta \rightarrow \infty$ (2.4) имеем

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{\Gamma_0}{z}\right) \text{Re}^{-(1/4+\alpha)} U_2(\zeta), \quad v = \left(\frac{\Gamma_0}{z}\right) \text{Re}^{-(1/4+5\alpha)} V_2(\zeta) \\ w &= \left(\frac{\Gamma_0}{z}\right) \text{Re}^{-(1/2+6\alpha)} W_2(\zeta) \\ \frac{p-p_\infty}{\rho} &= -\left(\frac{\Gamma_0}{z}\right)^2 \text{Re}^{-(1/2+2\alpha)} P_2(\zeta) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в уравнения Навье – Стокса (1.1), получим систему

$$\begin{aligned} \zeta^2 U_2 U_2' &= \zeta^2 P_2' + \zeta^2 U_2'' + \zeta U_2' - U_2 \\ \zeta^2 U_2 V_2' + \zeta U_2 V_2 &= \zeta^2 V_2'' + \zeta V_2' - V_2 \\ \zeta U_2 W_2' &= [-2\zeta P_2 - \zeta^2 P_2'] + \zeta W_2'' + W_2' \\ \zeta U_2' + U_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Покажем теперь, что сращивание решения для области $\zeta = O(1)$ с основной областью течения, где $r/z = O(1)$, возможно, если $\alpha = 1/12$. В самом деле, при этом решение (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} U_2(\zeta) &= -6\zeta^{-1}, \quad V_2(\zeta) = B_1 \zeta^{-5} + \beta_2 \zeta^{-1} \\ W_2(\zeta) &= -4A_1 \zeta^{-6} + \gamma_2, \quad P_2(\zeta) = 18\zeta^{-2} + \delta_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Сохраняя произвольную постоянную интегрирования γ_2 , получаем при $\zeta \rightarrow \infty$

$$w \sim \text{Re}^{-1} \gamma_2 (\Gamma_0/z) = \gamma_2 (v/z)$$

Так что осевая составляющая скорости в основной области течения становится порядка радиальной.

Граничное условие именно такого вида необходимо для возможности разрешения задачи в области $r/z = O(1)$ [4]. Сказанное также оправдывает требование $\gamma_1 = 0$ в соотношениях (2.3). Что касается постоянных интегрирования β_2 и δ_2 , то их вновь следует положить равными нулю из соображений монотонности убывания циркуляции и перепада давления.

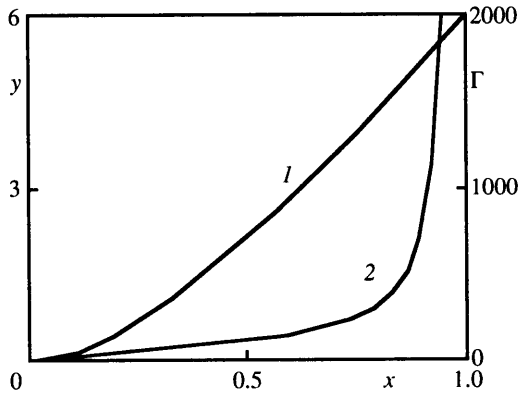
Тогда при $\zeta \rightarrow \infty$

$$U(\zeta) = -6\zeta^{-1}, \quad V(\zeta) = B_1 \zeta^{-5}, \quad W(\zeta) = \gamma_2, \quad P(\zeta) = 18\zeta^{-2} \quad (2.8)$$

3. Течение в основной области $r/z = O(1)$ удобнее рассматривать в сферических координатах R, θ, φ , где

$$r = R \sin \theta, \quad z = R \cos \theta$$

$$u = V_R \sin \theta + V_\theta \cos \theta, \quad w = V_R \cos \theta - V_\theta \sin \theta, \quad v = V_\varphi$$



Фиг. 4. Расчетные функции в основной области течения: 1 – $y(x)$, характеризующая функцию тока; 2 – $\Gamma(x)$, характеризующая циркуляцию

Тогда при $\theta \rightarrow 0$ на основании (2.8) имеем

$$V_R \sim -\frac{v(6-\gamma_2)}{R}, \quad V_\theta \sim -\frac{6v}{R \sin \theta}, \quad V_\varphi \sim \text{Re}^{-3} \frac{v}{R \sin \theta} \frac{B_1}{(\sin \theta)^4} \quad (3.1)$$

Система уравнений, получающаяся с использованием сферических координат, указана в [4]. С учетом того, что в данной области окружная скорость мала по сравнению с остальными компонентами, эта система приобретает вид:

$$(1-x^2)y' + 2xy - \frac{1}{2}y^2 = C_3 + C_2x + C_1x^2, \quad (1-x^2)\Gamma'' = y\Gamma' \quad (3.2)$$

$$V_R = -\frac{vy'(x)}{R}, \quad V_\theta = -\frac{vy(x)}{R \sin \theta}, \quad V_\varphi = \frac{v\Gamma(x)}{R \sin \theta} \text{Re}^{-3} \quad (3.3)$$

$$x = \cos \theta, \quad \psi = vRy$$

Из условия прилипания жидкости на плоскости при $x = 0$ ($\theta = \pi/2$)

$$y(0) = y'(0) = \Gamma(0) = 0 \quad (3.4)$$

На основании (3.1) и (3.3) граничное условие для $y(x)$ при $x = 1$ ($\theta = 0$) имеет вид:

$$y(1) = 6, \quad y'(1) = 6 - \gamma_2 \quad (3.5)$$

При этом $\Gamma \sim (1-x)^{1-y(1)/2}$ при $x \rightarrow 1$. Используя условия (3.4) и (3.5), можно исключить неизвестные постоянные из (3.2), так что

$$(1-x^2)y' + 2xy - \frac{y^2}{2} = C_2x - (6+C_2)x^2. \quad (3.6)$$

$$(1-x^2)\Gamma'' = y\Gamma', \quad C_2 = 6(2-\gamma_2)$$

Система (3.6) с граничными условиями (3.4) и (3.5) решалась численно. В точке $x = 1$ имеется особенность. Поэтому при интегрировании использовалось разложение функции $y(x)$ при $x \rightarrow 1$. Задача определения меридионального течения, т.е. функции $y(x)$ соответствует задаче о линии стоков, расположенной перпендикулярно твердой поверхности. Она была решена в [6]. На фиг. 4 представлены вычисленные функции y и Γ .

Заключение. Рассмотрение течения, индуцируемого вихревой нитью, ортогональной твердой поверхности, при больших значениях чисел $\text{Re} = \Gamma_0/v$ показывает, что оно

описывается системой асимптотических разложений, сращивание которых в главных членах требует рассмотрения четырех характерных областей, в которых r/z последовательно принимает значения порядка Re^{-1} , $Re^{-3/4}$, $Re^{-2/3}$, 1. Течение во всех этих областях является вязким. В области $r/z = O(1)$ оно соответствует линейному вихрестоку со слабой закруткой. В приосевой области $r/z = O(Re^{-1})$ поведение функции при $Re(r/z) \rightarrow 0$ является особым. Следствием очевидной особенности для окружной скорости $v \sim \Gamma_0 / r$ оказывается логарифмическая особенность (с вполне определенным коэффициентом) для осевой скорости: $w \sim Re(\Gamma_0 / z) \ln(Re r / z)$. Это подтверждает основное предположение работы [2], согласно которому для получения решения при всех числах Re необходимо отказаться от требования ограниченности осевой скорости при $r = 0$, приводящему к известному парадоксу [1] об отсутствии решения при $Re > 5.53$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 00-15-96070).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдштик М.А. Одно парадоксальное решение уравнений Навье – Стокса // ПММ. 1960. Т. 24. № 4. С. 610–621.
2. Serrin J. The swirling vortex // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1972. V. 271. № 1214. P. 325–360.
3. Гольдштик М.А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
4. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 311 с.
6. Голубинский А.А., Сычев В.В. Об одном автомодельном решении уравнений Навье – Стокса // Учен. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 6. С. 11–17.
7. Burggraf O.R., Stewartson K., Belcher R. Boundary layer induced by a potential vortex // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 9. P. 1821–1833.
8. Булдаков Е.В., Егоров И.В., Сычев В.В. Некоторые свойства автомодельных решений для течений в вязких вихревых ядрах // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 1. С. 38–43.

Москва
E-mail: vit_soudakov@mail.ru

Поступила в редакцию
11.V.2002