

УДК 532.546

© 2002 г. А.А. ЗАЙЦЕВ, В.В. ФОМЧЕНКОВ, А.Я. ШПИЛЕВОЙ

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕЧЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ПОТОКА
 ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ КРУГОВЫХ ИЛИ СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЕВ
 РАЗЛИЧНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ**

Рассматривается задача нахождения потенциалов течения поступательного потока через систему круговых или сферических слоев в пористой среде, подчиняющегося закону Дарси. Коэффициенты проницаемости меняются скачком при переходе через границу раздела. Метод решения основан на выводе специальных рекуррентных соотношений, которые дают рациональную зависимость потенциалов от коэффициентов проницаемости, удобную для конкретных расчетов.

Ключевые слова: поступательный поток, пористая среда, закон Дарси, коэффициент проницаемости, круговые и сферические слои, рекуррентные соотношения.

Пусть в бесконечной пористой среде коэффициент проницаемости k терпит разрыв на концентрических окружностях (в двумерном случае) или сферах (в трехмерном случае) $r = R_i$, причем

$$k = k_{i+1}, \quad R_i < r < R_{i+1}, \quad i = \overline{1, n+1}$$

На бесконечности задан поступательный поток со скоростью c . Требуется определить потенциалы течений в каждой области с постоянной проницаемостью.

Потенциалы в однородных областях представим в виде

$$\varphi_i(r, \theta) = c(a_i^+ r + a_i^- r^{-m+1}) \cos \theta, \quad m = 2, 3, i = \overline{1, n+1}, \quad a_i^- = 0, \quad a_{n+1}^+ = 1 \quad (1)$$

На границах $r = R_i$ имеют место непрерывность расхода жидкости и давления [1, 2]

$$\frac{\varphi_{i+1}(r, \theta)}{k_{i+1}} = \frac{\varphi_i(r, \theta)}{k_i}, \quad \frac{\partial \varphi_{i+1}(r, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_i(r, \theta)}{\partial r}, \quad r = R_i \quad (2)$$

Подставляя представление (1) для φ_i в условия (2), получим следующую систему для неизвестных a_i^+ , a_i^- :

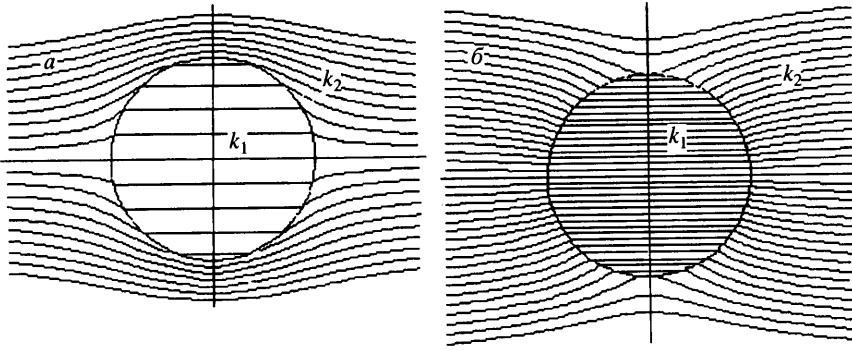
$$k_i R_i^m a_{i+1}^+ + k_i a_{i+1}^- = k_{i+1} R_i^m a_i^+ + k_{i+1} a_i^-$$

$$R_i^m a_{i+1}^+ - (m-1)a_{i+1}^- = R_i^m a_i^+ - (m-1)a_i^-$$

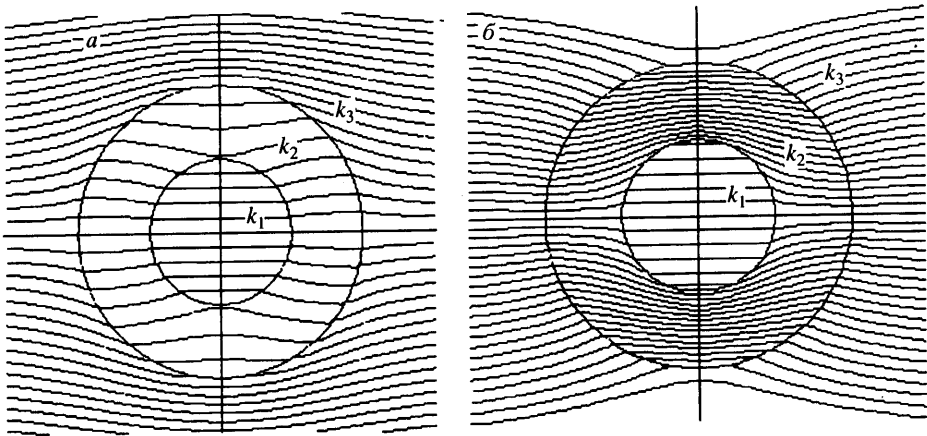
Запишем ее в виде

$$(a_{i+1}^+, a_{i+1}^-)^T = T_i (a_i^+, a_i^-)^T$$

$$T_i = \frac{1}{mk_i R_i^2} \begin{pmatrix} ((m-1)k_{i+1} + k_i)R_i^m & (m-1)(k_{i+1} - k_i) \\ (k_{i+1} - k_i)R_i^{2m} & (k_{i+1} + (m-1)k_i)R_i^m \end{pmatrix} \quad (3)$$



Фиг. 1. Линии тока фильтрационного течения в двухкомпонентной среде: $a - k_1 = 2k_2$, $b - k_2 = 2k_1$



Фиг. 2. Линии тока фильтрационного течения в трехкомпонентной среде: $a - k_3 < k_1 < k_2$, $b - k_2 < k_1 < k_3$

Итерируя равенство (3) с учетом (1), получаем

$$(a_i^+, a_i^-)^T = a_i^+ T(i, 1) e^+, \quad e^+ = (1, 0)^T, \quad T(i, 1) = T_{i-1} T_{i-2} \dots T_1$$

Определим a_1^+ . Из равенства $a_{n+1}^+ = 1$ следует

$$a_1^+ = \frac{m^n k_1}{D_n} \prod_{j=2}^n k_j R_j^m, \quad D_n = m^n \prod_{j=2}^n k_j R_j^m \langle e^+, T(n+1, 1) e^+ \rangle \quad (4)$$

Из формул (3) находим выражения для остальных коэффициентов в представлениях (1)

$$a_i^+ = m^{n+1-i} \prod_{j=i}^n k_j R_j^m \frac{D_{i-1}}{D_n}, \quad a_i^- = -m^{n+1-i} \prod_{j=i}^n k_j R_j^m \frac{D_{i-1}^*}{D_n} \quad (5)$$

Здесь D_i, D_i^* – многочлены, определяемые рекуррентными соотношениями

$$D_i = (k_i + (m-1)k_{i+1})R_i^m D_{i-1} + (m-1)(k_i - k_{i+1})R_{i-1}^m D_{i-1}^*$$

$$D_i^* = (k_i - k_{i+1})R_i^m D_{i-1} + ((m-1)k_i + k_{i+1})R_{i-1}^m D_{i-1}^*$$

$$D_1 = k_1 + (m-1)k_2, \quad D_1^* = k_1 - k_2 \quad (6)$$

Равенства (6) являются следствием формул (1), (3), (5).

Рассматриваемая в работе задача исследовалась другими методами в работах [3–6]. Рассмотрим примеры.

Случай двухкомпонентной среды, $n = 1$

$$\varphi_1 = c \frac{2k_1}{D_1} r \cos \theta, \quad \varphi_2 = c \left(r - \frac{D_1^*}{D_1} \frac{R_1^2}{r} \right) \cos \theta$$

$$\psi_1 = \frac{2k_1}{D_1} cy, \quad \psi_2 = cy \left(1 + \frac{D_1^*}{D_1} \frac{R_1^2}{r^2} \right)$$

Случай трехкомпонентной среды, $n = 2$

$$\varphi_1 = c \frac{4k_1 k_2 R_2^2}{D_2} \cos \theta, \quad \varphi_2 = c \frac{2k_2 R_2^2 D_1}{D_2} \left(r - \frac{D_1^*}{D_1} \frac{R_1^2}{r} \right) \cos \theta$$

$$\varphi_3 = c \left(r - \frac{D_2^*}{D_2 r} \right) \cos \theta$$

$$\psi_1 = c \frac{4k_1 k_2 R_2^2 y}{D_2}, \quad \psi_2 = c \frac{2k_2 R_2^2 y D_1}{D_2} \left(1 + \frac{D_1^*}{D_1} \frac{R_1^2}{r^2} \right)$$

$$\psi_3 = cy \left(1 + \frac{D_2^*}{D_2} \frac{R_2^2}{r^2} \right)$$

Результаты расчета линий тока в двух- и трехслойных средах представлены на фиг. 1, 2.

Найденные представления для потенциалов удобны для расчета картины течения в конкретных случаях. Полученные результаты могут быть использованы для решения практических задач подземной гидродинамики.

Авторы благодарят А.А. Бармина и рецензента за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. школа, 1972. 368 с.
3. Костицына Л.И. Течение поступательного фильтрационного потока через систему сферических слоев различной проницаемости // Гидромеханика: Сб. науч. тр. М.: Изд-во Моск. обл. пед. ин-та им. Н.К. Крупской, 1973. Вып. 2. С. 14–17.

4. *Пивень В.Ф.* Функции комплексного переменного в динамических процессах. Орел: Изд-во Орловск. пед. ин-та. 1994. 147 с.
5. *Gheorghita St.J.* O solutie exactă pentru miscari in medii de tiquil II // Stud. si cerc. mat., 1954. V. 26. № 2. P. 159–167.
6. *Truchasson C.* Remargues concernant des obstacles perturbants daus un écoulement d'infiltration // С. г. Acad sci, 1963. V. 257. № 20. P. 2959–2962.

Калининград

E-mail: fomval@mail.ru

Поступила в редакцию
12.II.2002