

УДК 532.5.013.4:536.25:532.546

© 2002 г. Р. ЙЮНСИ, Д. КАЛАЧЕ, А. ХАРКАТИ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОЙ И КОНЦЕНТРАЦИОННОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОРИСТОЙ ПОЛОСТИ ПРИ ВСТРЕЧНОМ ТЕЧЕНИИ

Проведено численное моделирование двумерной установившейся тепловой концентрационной конвекции в прямоугольной пористой полости. Температурный и концентрационный градиенты горизонтальны, а силы плавучести либо сонаправлены, либо противоположны. Течение в пористой среде описывается уравнениями Дарси – Бринкмана и Форчхеймера. Используется численный алгоритм SIMPLER, основанный на приближении конечных объемов для решения задачи в переменных скорость – давление.

Многочисленные серии расчетов были выполнены в областях $Ra_r = 3 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^7, 10^{-6} < Da < 1, 1 < N < 20, Le = 10$ и 100 , где Ra_r, Da, Le и N – числа Рэлея, Дарси, Льюиса и отношение плавучестей. Показано, что основное влияние наличия пористой среды проявляется в уменьшении тепло- и массопереноса и поля течения при уменьшении проницаемости. При определенном наборе чисел Ra_r, Le и N имеет место многоячеистая структура течения. Средние числа Нуссельта и Шервуда представлены как функции определяющих параметров.

Ключевые слова: пористая среда, теплоперенос, противоток, метод конечного объема, двойная диффузия.

Интерес к изучению течений в пористой среде при наличии двух источников плавучести в основном вызван важностью этой проблемы во многих природных и технических задачах. В первую очередь это геотермальные процессы, фиброизоляционные материалы, криогенные системы. Важный пример двойной диффузионной конвекции может быть найден в процессах затвердевания материалов, поскольку затвердевание сплавов и кристаллов включает одновременные потоки количества движения, тепла и примесей. Появление градиентов температуры и концентраций в окрестности границы жидкость – твердое тело могут быть причиной неоднородного распределения плотности и конвективного движения. Это движение может оказывать сильное влияние на структуру твердого тела через воздействие на процесс кристаллизации.

Совместное исследование тепло- и массопереноса в пористой среде ограничено из-за сложности, связанной с двойной естественной конвекцией. В большинстве предшествующих исследований в этой области для описания течения в пористой среде использован закон Дарси [1]. Естественный конвективный теплоперенос в квадратной пористой полости, находящейся при постоянной температуре и концентрации, был исследован в [1], где была использована модель Дарси. Численное исследование было выполнено для некоторой области значений чисел Дарси, Рэлея, Льюиса и отношения плавучестей.

Исследования авторов сосредоточены на совместной термической и концентрационной конвекции бинарной жидкости в замкнутом частично заполненном пористой средой объеме под действием трансверсального магнитного поля. Подобная система была изучена ранее для термической конвекции в [2]. Это исследование показало, что главный эффект наличия пористой среды – уменьшение восходящего течения и тем самым уменьшение конвективного потока тепла. В [3] изучалось влияние инерционных членов на конвекцию Бенара в пористой среде. Было показано, что инерционные члены в уравнении движения не действуют на общий поток тепла. В [4] рассматри-

вается взаимодействие внешнего магнитного поля с конвективным течением в пористой среде, течение в которой моделируется законом Дарси. Найдено, что при наличии магнитного поля поля температур и скорости существенно меняются.

В настоящей работе исследовано температурно-концентрационное течение в полости при горизонтально приложенных градиентах температуры и концентрации для случая встречного течения. При этом варьировались управляющие параметры: числа Рэлея (Ra), Дарси (Da), Льюиса (Le) и отношения плавучести (N). Течение в пористой среде описывается с помощью обобщенной модели Дарси–Бринкмана–Форхгеймер.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двухмерную, естественную конвекцию в вертикальной прямоугольной полости, заполненной бинарной жидкостью (фиг. 1). Различные типы граничных условий могут быть использованы. Для температуры и концентрации ставятся на левой и правой границах условия Дирихле, на верхней и нижней – условия Неймана, т.е. равенство нулю градиентов. Условия прилипания требуются на всех четырех границах.

Для упрощения анализа сделаем следующие предположения. Среда предполагается ньютоновской несжимаемой жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска. Течение в полости ламинарное и двухмерное. Пористая среда изотропна, однородна и находится в термодинамическом равновесии с бинарной жидкостью. Эффектами Сарре и Дюфор пренебрегаем.

Зависимость плотности от температуры и концентрации задается линейным уравнением состояния

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0)]$$

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_C, \quad \beta_C = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial C} \right]_T$$

Используя законы сохранения, выпишем уравнения в безразмерных переменных в виде [3]:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial \tau} + (\mathbf{V} \nabla) U = -\frac{\partial P}{\partial X} + \varepsilon \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}} \right)^{1/2} \nabla^2 U - \frac{C_f \varepsilon^2}{\sqrt{\text{Da}}} |V| U - \frac{\varepsilon^2}{\text{Da}} \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}} \right)^{1/2} U \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \tau} + (\mathbf{V} \nabla) V = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \varepsilon \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}} \right)^{1/2} \nabla^2 V - \frac{C_f \varepsilon^2}{\sqrt{\text{Da}}} |V| V - \frac{\varepsilon^2}{\text{Da}} \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}} \right)^{1/2} V + \varepsilon^2 (\Theta - N\Phi) \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (\mathbf{V} \nabla) \Theta = \frac{1}{(\text{Ra Pr})^{1/2}} \nabla^2 \Theta \quad (1.4)$$

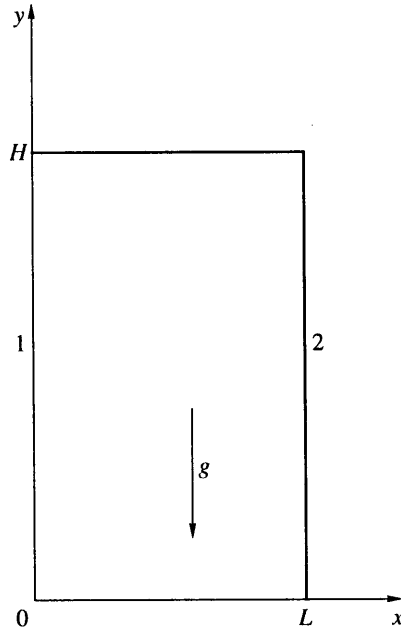
$$\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + (\mathbf{V} \nabla) \Phi = \frac{1}{\text{Le}(\text{Ra Pr})^{1/2}} \nabla^2 \Phi \quad (1.5)$$

$$(X, Y) = \frac{x, y}{H}, \quad (U, V) = V \frac{(u, v)}{(\alpha_p / H)(\text{Ra Pr})^{1/2}}, \quad \tau = \frac{t}{(H^2 / \alpha_p)} (\text{Ra Pr})^{1/2}$$

$$\lambda = \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f}, \quad \Theta = \frac{T - (T_1 + T_2)/2}{T_1 - T_2}, \quad \Phi = \frac{C - (C_1 + C_2)/2}{C_1 - C_2}, \quad P = \frac{\varepsilon^2 H^2 (p)}{\rho_f \alpha_p^2 (\text{Ra} \cdot \text{Pr})}$$

$$\text{Da} = \frac{K}{H^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Le} = \frac{\alpha}{D}, \quad N = \frac{\beta_c}{\beta_t}, \quad \text{Ra}_t = \frac{g \beta_t \Delta T H^3}{\nu \alpha}$$

$$\text{Cr}_t = \frac{g \beta_t \Delta T H^3}{\nu^2}, \quad \text{Cr}_s = \frac{g \beta_c \Delta C H^3}{\nu^2}$$



Фиг. 1. Схема течения

Здесь (1.1) – уравнение неразрывности, (1.2), (1.3) – уравнения количества движения в проекциях на оси x и y , (1.4) – уравнение энергии и (1.5) – уравнение для концентрации. Здесь H и L – высота и ширина полости, K , ε – проницаемость и пористость среды, V , α , D – коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и диффузии, β_r , β_c – коэффициенты термического и концентрационного расширения. Остальные обозначения – общепринятые. Индексы: f – жидкость, p – пористая среда (скелет), 1, 2 – нагреваемая и охлаждаемая поверхности.

Начальными и граничными условиями в безразмерных переменных будут

$$\tau = 0: \Theta = \Phi = 0, U = V = 0, 0 \leq Y \leq 1, 0 \leq X \leq 1/A$$

$$\Theta = \Phi = 0.5; U = V = 0, X = 0, 0 \leq Y \leq 1$$

$$\Theta = \Phi = -0.5; U = V = 0, X = 1/A, 0 \leq Y \leq 1$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0; U = V = 0, Y = 0, Y = 1, 0 \leq X \leq \frac{1}{A}, Y = 0, Y = 1$$

2. Численная процедура. Для получения стационарного решения используется метод установления на основе нестационарной системы (1.1)–(1.5). Этот метод позволяет также определить неустойчивость течения [2].

Дифференциальные уравнения дискретизируются по пространству методом контрольного объема [5]. Результирующая конечно-разностная схема имеет вид

$$A_P \Phi_P = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + b \quad (2.1)$$

Выражения для коэффициентов в (2.1) могут быть найдены в [5]. Адвекционно-диффузионная части коэффициентов A_N , A_S , A_E и A_W модифицированы для устойчивости в соответствии степенного закона схемы. Источниковый член b включает величины с предыдущих временных шагов. Техника дискретизации хорошо известна и детального описания не требует. Линейная система, полученная из консервативных уравнений, решается методом "линия на линию".

Таблица 1

Ra, Da	[6]	[1]	[7]	Настоящая работа
10	1.07	—	1.08	1.06
50	—	2.02	1.958	1.936
100	3.09	3.27	3.02	2.98
500	—	—	8.38	8.32
1000	13.41	18.38	12.514	12.49

Таблица 2

Ra, Da	Da	[6]	[7]	Настоящая работа
10	10^{-6}	1.07	1.08	1.06
100	10^{-6}	3.06	3.00	2.98
1000	10^{-6}	13.2	12.25	12.11
0	10^{-2}	1.02	1.02	0.99
100	10^{-2}	1.7	1.71	1.68
1000	10^{-2}	4.26	4.26	4.24

Поскольку уравнение количества движения сформулировано в терминах переменных (U, V, P), итерационная процедура включает метод коррекции давления для решения в переменных давление–скорость [5]. Вычисления проводились в основном на синусоидальной сетке 81×81 . Установлено, что эта сетка адекватна для выявления всех деталей структуры течения в полости. Выбор размера сетки должен рассматриваться только как компромисс между точностью и временем счета. Вычисления были проведены на ПС 700 MHz. Сходимость численного решения контролировалась локально. Была использована максимальная норма для компонент скорости U, V , температуры и концентрации. Критерием сходимости на каждом временном шаге было неравенство

$$\max \left| \frac{(U, V, \Theta, \Phi)^{i+1} - (U, V, \Theta, \Phi)^i}{(U, V, \Theta, \Phi)^i} \right| \leq 10^{-4}$$

где i и $i + 1$ обозначают две последовательные итерации в том же временном шаге. Средний поток массы и тепла на стенку давался в безразмерном виде числами Нуссельта и Шервуда

$$Nu_0 = \int_0^1 \left[\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right]_{X=0} dY = 0, \quad Sh_0 = \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right]_{X=0} dY = 0$$

Численная точность исследования была проверена на большом числе решений чисто термической конвекции в пористой среде. Результаты были сравнены с результатами ранних исследований. В табл. 1, 2 представлены значения Nu_0 для описания течения в пористой среде по моделям Дарси и Дарси–Брикмана соответственно. Из этих результатов следует, что в большинстве случаев согласование с работами [6, 7] хорошее. Действительно, настоящие результаты отличаются меньше чем на 2% от результатов работы [5].

3. Результаты и обсуждения. В представляемом исследовании могли бы быть варьируемыми Ra, Da, Le и N , в то время как вычисления могут быть выполнены для любого набора управляющих параметров. Объективно здесь представлен набор результатов для иллюстрации действия этих параметров на процессы образования ячеек и характеристик теплопереноса. Настоящее исследование ограничено прямоугольной полостью с удлинением $A = 2$, $Pr = 0.149$, что соответствует сплаву на титановой основе, так же как свойства пористой среды ($\lambda = 1, \epsilon = 0.7$ и $c_f = 0.25$).

Рассмотрим влияние чисел Le, N и Ra . Выбранные решения для линий тока, изотермы и изолиний концентраций иллюстрируют эффекты двойной диффузии.

Направления течения могут быть легко определены из распределений линий тока (слева), изотерм (в центре) и изоконцентраций (справа) (фиг. 2, 3, табл. 3). Для случая $N = 1$ имеется первичная конвекционная ячейка с вторичной структурой, образующейся в угловой области. При $N = 1$ течение контролируется более температурным полем, так как число Le велико. При увеличении параметра N от 1 до 3 происходит изменение направления конвективного движения в первоначальной ячейке, что указывает на переход определяющего влияния на характер конвекции от температурного поля к концентрационному.

Фигуры 3 и 4 описывают решение при $Ra_r = 3 \cdot 10^6$ и $Ra_r = 3 \cdot 10^7$ соответственно при $Le = 100$. Хотя действие примесей усиливается с увеличением отношения плавучестей (N), влияние температуры становится даже сильнее, если оба критерия Gr_r и Gr_c увеличиваются в том же самом отношении. Например, при $N = 10$ конвекция развивается от одной ячейки, структура которой определяется в основном примесями при $Ra_r = 3 \cdot 10^6$ к многоячейстой конвекции, соответствующей двойной диффузии при $Ra_r = 3 \cdot 10^7$.

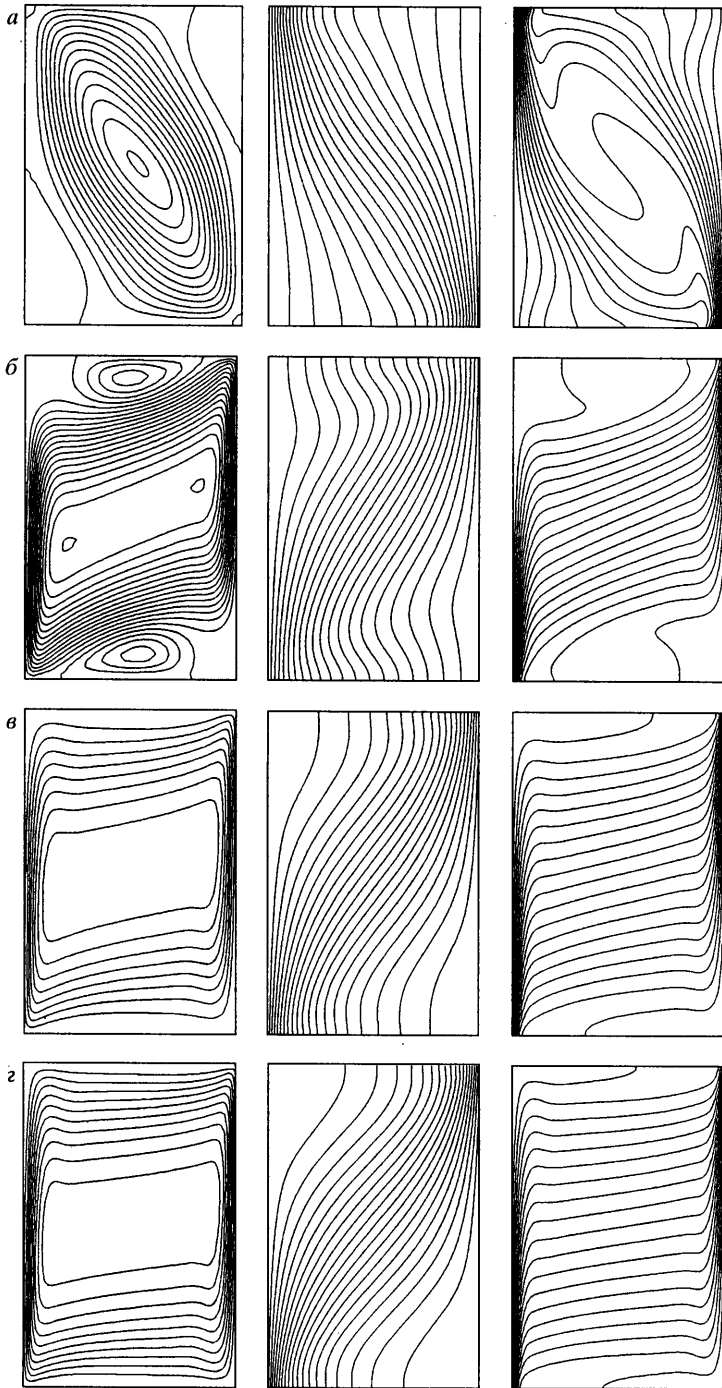
Общая тенденция, представленная на фиг. 2, остается неизменной на фиг. 3, 4. При фиксированном числе Ra_r характеристики конвекции изменяются с ростом N . Например, при $N = 1$ поле линий тока в основном контролируется температурой. При увеличении числа N до 3 действия температуры и концентрации становятся сравнимыми, что приводит к многоячейстой конвекции. Оказывается, что при малых P_r с увеличением Ra_r поле температур оказывает большее влияние на характеристики конвекции. Например, при $N = 10$ для $Ra_r = 3 \cdot 10^6$ конвекция определяется полем примесей, в то время как для $Ra_r = 10^7$ конвекция определяется в равной степени температурным и концентрационными полями.

Подобно предыдущему случаю интенсивность конвекции при многоячейстой структуре много слабее, чем при одноячейстой. Действительно, при $Ra_r = 3 \cdot 10^6$ максимум линий тока изменяется от $7.5 \cdot 10^{-3}$ для $N = 1$ (одна ячейка) до $7.5 \cdot 10^{-4}$ при $N = 10$ (многоячейстая конвекция).

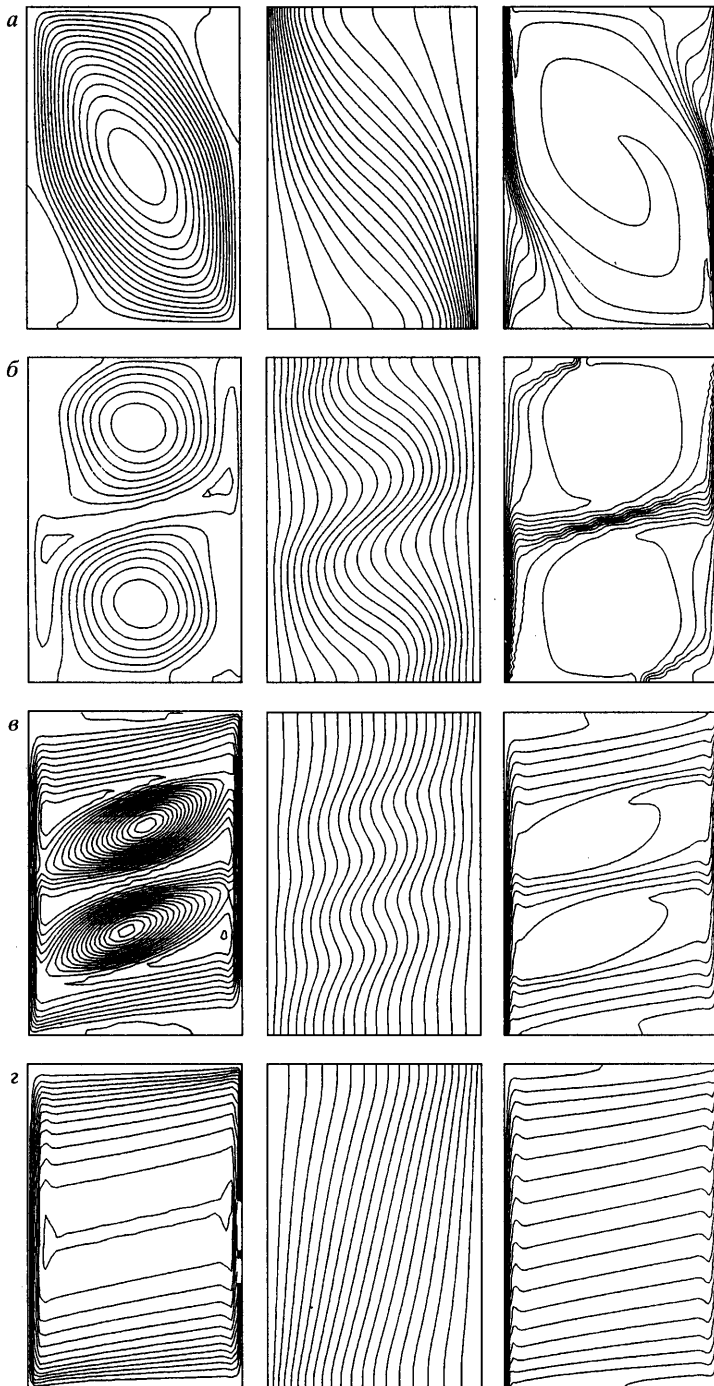
Рассмотрим роль проницаемости среды, которая характеризуется числом Дарси. Для высокой проницаемости ($Da = 1$) (фиг. 5, а) имеет место хорошее протекание жидкости и ее поведение подобно полученному для квадратной полости без пористой

Таблица 3

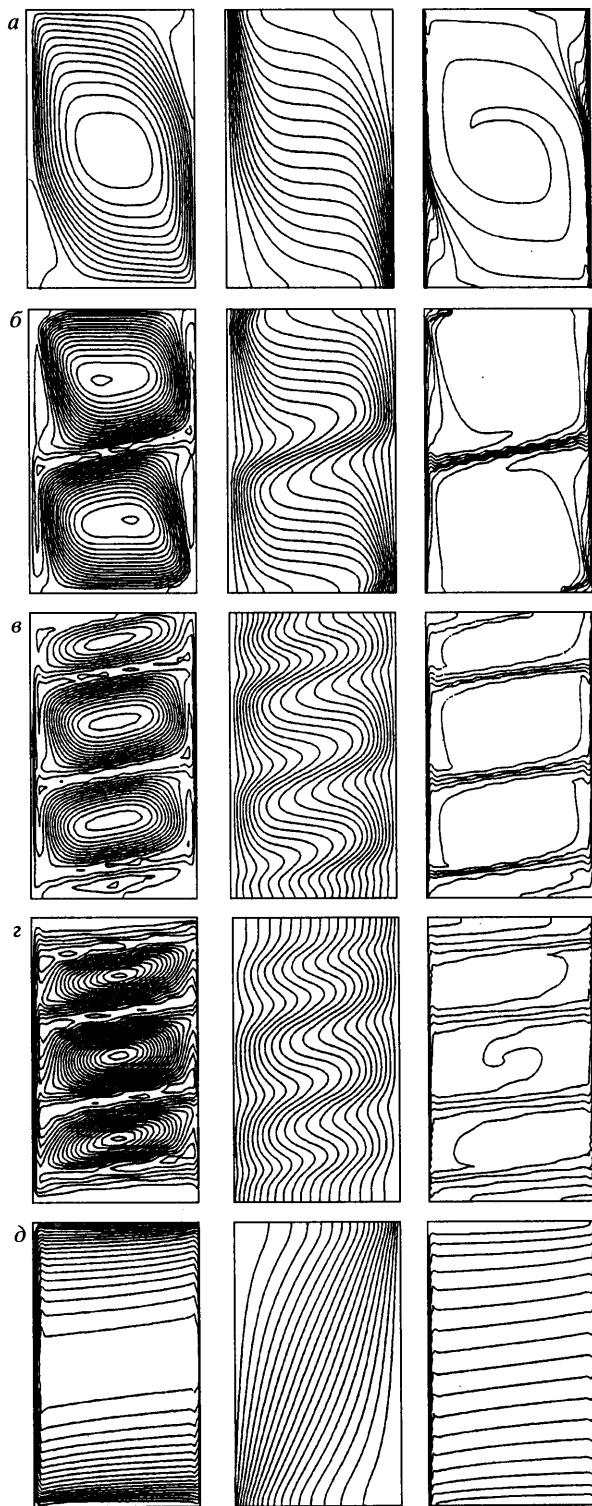
N	$\Psi_{\max} \cdot 10^3$	$\Psi_{\min} \cdot 10^3$	Nu_0	Sh_0	Фигура
$Ra_r = 3 \cdot 10^6, Le = 10$ (фиг. 2)					
1	6.5	-0.5	3.084	7.867	а
3	0.6	-3.4	2.651	14.82	б
6	$4.3 \cdot 10^{-16}$	-4.5	3.257	90.467	в
10	$4.3 \cdot 10^{-16}$	-5.5	3.838	24.547	г
$Ra_r = 3 \cdot 10^6, Le = 100$ (фиг. 3)					
1	7.5	-0.5	3.744	24.89	а
3	3	-1.5	2.52	28.87	б
6	0.7	-1.3	2.12	45.10	в
10	1.3	-0.1	2.157	54.57	г
$Ra_r = 3 \cdot 10^7, Le = 100$ (фиг. 4)					
1	6	-0.5	7.936	53.09	а
3	3.2	-0.8	5.068	51.12	б
6	2	-1.3	3.47	78.9	в
10	1	-1.1	2.958	97.34	г
20	0	-0.95	2.843	121.77	д



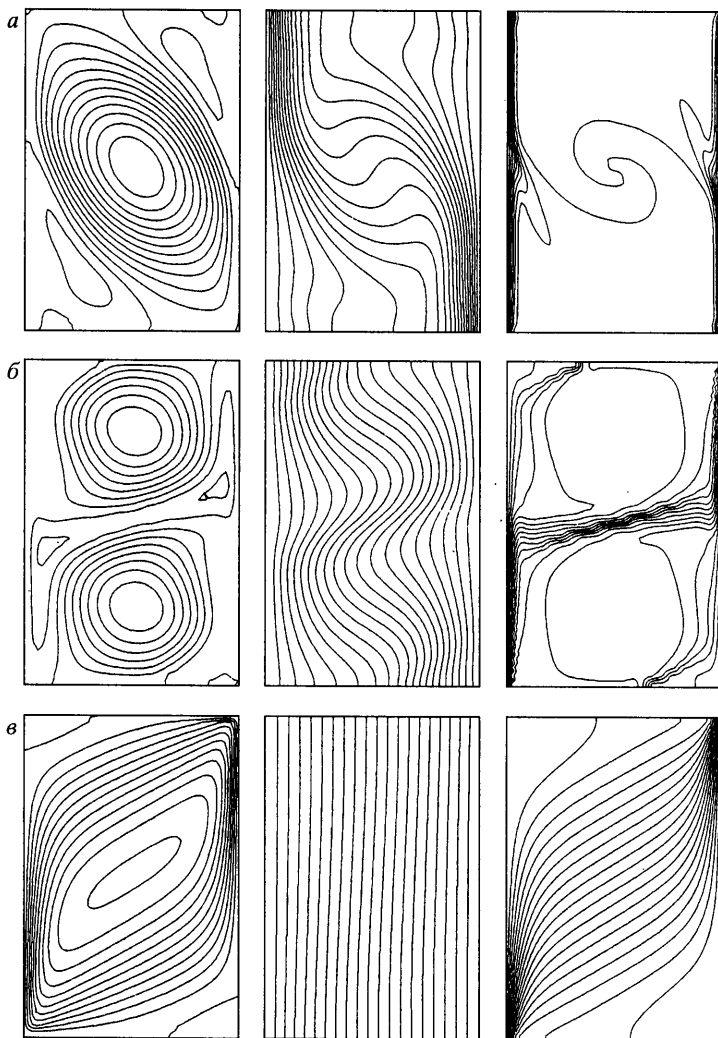
Фиг. 2. Линии тока, изотермы и линии постоянной концентрации (в случае встречного течения) для $Ra_T = 3 \cdot 10^6$, $Le = 10$, $N = 1, 3, 6, 10$ (а, б, в, г)



Фиг. 3. Линии тока, изотермы и линии постоянной концентрации (в случае встречного течения) для $Ra_1 = 3 \cdot 10^6$, $Le = 100$



Фиг. 4. Линии тока, изотермы и линии постоянной концентрации (в случае встречного течения) для $Ra_7 = 3 \cdot 10^7$, $Le = 100$



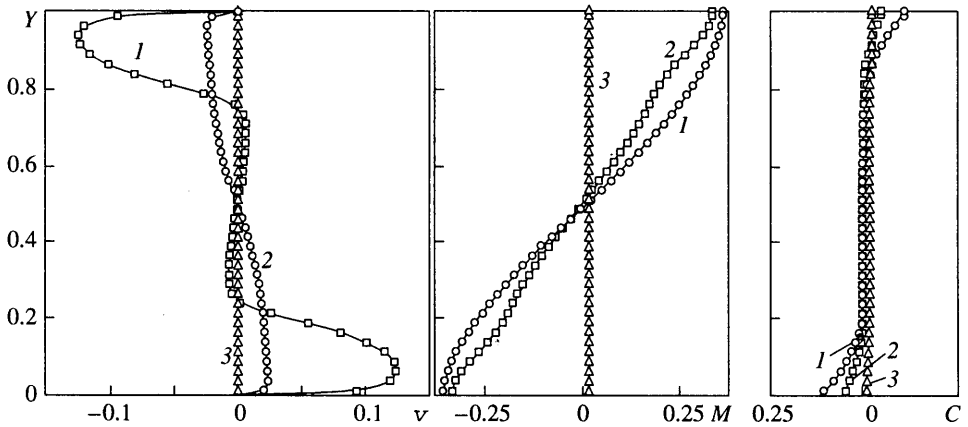
Фиг. 5. Линии тока, изотермы и линии постоянной концентрации (в случае встречного течения) для $Ra_r = 3 \cdot 10^6$, $Le = 100$, $N = 3$ при $Da = 1$ (а), 10^{-4} (б), 10^{-6} (в)

среды [9]. С уменьшением числа Дарси структура течения становится одноячейстой ($Da = 10^{-6}$). Очень слабое течение характеризуется диффузионным переносом тепла и массы, а пористая среда действует почти как твердая стенка ($\psi_{\max} = 0$).

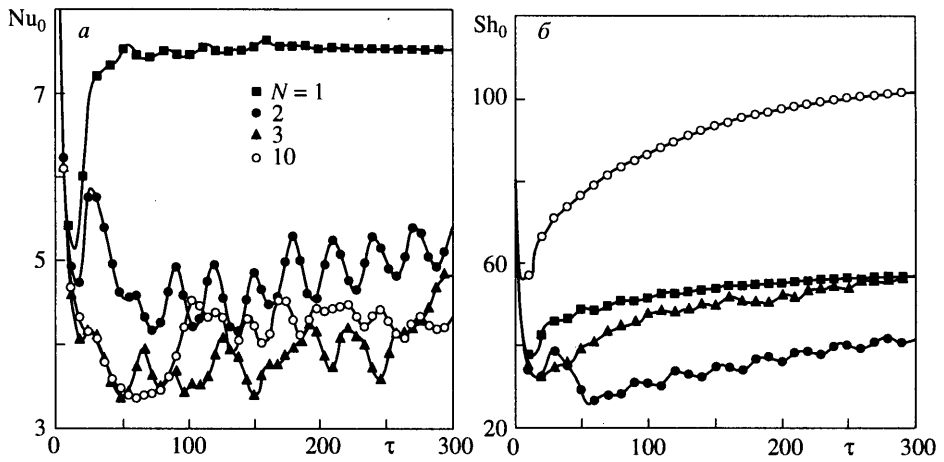
Более качественное сравнение представлено в виде профилей U-компоненты скорости, температуры и концентрации (фиг. 6). Все профили построены вдоль средней вертикальной линии ($x = 0.5$). Влияние числа Дарси на поле конвекции хорошо демонстрируется последовательным выполаживанием при уменьшении числа Da как профиля скорости, так и температуры, при малом изменении профиля концентрации.

Зависимости средних значений чисел Нуссельта и Шервуда на горячей стенке от времени, характеризующих тепломассоперенос, представлены на фиг. 7.

Заключение. Проведено численное исследование структуры и характеристик (встречной) конвекции, обусловленной двойной диффузией в прямоугольной пористой полости. Продемонстрирована важность влияния физических параметров, включая



Фиг. 6. Влияние числа Дарси на профили в средней плоскости при $Ra_r = 3 \cdot 10^6$, $Le = 100$, $N = 1, Da = 1, 10^{-4}, 10^{-6}$ (линии 1–3)



Фиг. 7. Зависимость средних значений чисел Нуссельта (а) и Шервуда (б) от времени на горячей стенке для $Ra = 10$, $Le = 100$

число плавучести, Льюиса, Дарси и Рэлея для (встречного) течения. Результат, полученный в рамках рассмотренной модели, хорошо согласуется с результатами по теплопереносу, известными в литературе.

Главные выводы настоящего исследования состоят в следующем.

Численно продемонстрировано существование сложной (многоячейстой) структуры конвекции в режимах, когда термические и концентрационные силы плавучести примерно равны и противоположны по направлению. Смена определяющего влияния температурного и концентрационного полей на структуру конвекции происходит при некоторой величине отношения плавучестей N , при которой скачкообразно меняется направление конвективного движения.

Влияние пористой среды сводится к существующему уменьшению вертикальной составляющей скорости в пограничном слое. На тепло- и массоперенос так же, как и на поле течений, оказывает сильное влияние соотношение величин термической и концентрационной сил плавучести.

Общий поток тепла и массы и поле течения уменьшаются с уменьшением проницаемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Trevisan O.V., Bejan A.* Natural convection with combined heat and mass transfer effects in a porous medium // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1985. V. 28. № 8. P. 1597–1611.
2. *Le Breton P., Caltagirone J.P., Arquis E.* Natural convection in a square cavity with thin porous layers on its vertical walls // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1991. V. 113. № 4. P. 892–898.
3. *Lage J.L.* Effect of the convective inertia term on Benard convection in a porous medium // Numerical Heat Transfer. Pt A. 1992. V. 22. № 4. P. 469–485.
4. *Bian W., Vasseur P., Bilgen E., Meng F.* Effect of an electromagnetic field on natural convection in an inclined porous layer // Intern. J. Heat Fluid Flow. 1996. V. 17. № 1. P. 36–44.
5. *Patankar S.V.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. N.Y.: Hemisphere; Mc GrawHill, 1980. 197 p.
6. *Lauriat G., Prasad V.* Natural convection in a vertical porous cavity: a numerical study of Brinkman-extended Darcy formulation // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1987. V. 109. № 3. P. 688–696.
7. *Nithiarasu P., Seetharamu K.N., Sundararajan T.* Double-diffusive natural convection in an enclosure filled with fluid-saturated porous medium: a generalized non-Darcy approach // Numerical Heat Transfer. Pt A. 1996. V. 30. № 4. P. 413–426.
8. *Kimura S., Bejan A.* The boundary layer natural convection regime in a rectangular cavity with uniform heat flux from the side // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1984. V. 106. № 1. P. 98–103.
9. *Gobin D., Bennacer R.* Cooperating thermosolutal convection in enclosures II // Intern. J. Heat and Mass transfer. 1996. V. 39. № 13. P. 2683–2697.

Алжир

Поступила в редакцию
13.XI.2001