

УДК 532.527.031

© 2002 г. М.М. АЛИМОВ, А.Б. МАЗО

## О СХЕМЕ М.А. ЛАВРЕНТЬЕВА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ВИХРЕВЫХ ЗОН

Представлены результаты численного анализа потенциально-вихревой схемы М.А. Лаврентьева как модели стационарных вихревых зон, возникающих в течениях несжимаемой жидкости при умеренных числах Рейнольдса за плохо обтекаемыми телами. Оцениваются различные способы ее замыкания.

**Ключевые слова:** несжимаемая жидкость, вихревое течение, модель Прандтля – Бэтчелора, схема Лаврентьева.

При отрывных течениях несжимаемой жидкости за плохо обтекаемыми телами наблюдается вихревой след [1–3]. В зависимости от числа Рейнольдса  $Re$  структура этого следа существенно меняется. Течение близко к стационарному в двух случаях: при умеренных числах  $Re$  (для кругового цилиндра  $5 < Re < 41$ ), когда за телом образуется устойчивая пара ламинарных вихревых зон, размер которых существенно зависит от числа Рейнольдса, и при высоких значениях  $Re \geq 10^6$ , когда течение в следе турбулентно и нестабильно, однако в среднем вихревые зоны за телом имеют длину порядка его диаметра и слабо зависят от скорости набегающего потока [3, 4].

В монографии [5] предложено моделировать стационарный режим обтекания как склейку двух течений идеальной несжимаемой жидкости: потенциального в основном потоке и с постоянной завихренностью в следе. Схема получила название потенциально-вихревой схемы М.А. Лаврентьева (не путать со схемой Лаврентьева, предполагающей две замкнутые струйные области [6]). По классификации отрывных течений ее можно отнести к моделям присоединенных вихрей. Другими схемами этого класса является модель Жуковского–Фепля [3, 6] и модель Прандтля–Бэтчелора [7]. В первой схеме распределение завихренности в следе задается дельта-функцией, и поток всюду остается потенциальным. Во второй модели завихренность в следе  $\omega_0$  постоянна, как и в схеме Лаврентьева, но в отличие от последней на границе раздела вихревого и потенциального течения константа Бернулли терпит скачок на константу  $h$ , которая наряду с величиной  $\omega_0$  является неопределенным параметром модели.

Вопрос о разрешимости модели Прандтля–Бэтчелора при  $h \neq 0$  для ряда классических гидродинамических задач остается открытым. Имеющиеся решения получены либо для случая  $h = 0$  [8], либо предполагают специальное устройство границ течения [9]. Тем не менее интерес к этой модели в последнее время растет в связи с выявленной множественностью возможных реализаций вязких течений Навье–Стокса в пределе  $Re \rightarrow \infty$ .

Формально схема Лаврентьева является частным случаем модели Прандтля–Бэтчелора при  $h = 0$ , однако представляется оправданным выделять и исследовать ее как самостоятельную ввиду качественного различия в конфигурации завихренной зоны. При  $h \neq 0$  ее хвостовая часть необходимо должна иметь форму острой кромки с точкой возврата, тогда как в схеме Лаврентьева завихренная зона всюду гладкая, что

согласуется с экспериментом при умеренно больших числах Рейнольдса  $5 < Re < 41$ . Кроме того, асимптотические исследования показывают [10, 11], что в пределе  $Re \rightarrow \infty$  течение в зоне отрыва имеет сложную структуру: на ее границе, на расстоянии порядка диаметра обтекаемого тела, константа Бернулли действительно терпит скачок на величину  $h \sim Re^{-1}$ , но в окрестности задней части вихревой зоны он необходимо должен равняться нулю.

Таким образом, потенциально-вихревая схема Лаврентьева представляет определенный теоретический интерес как модель стационарных вихревых зон при умеренных числах Рейнольдса. Отметим два явных ее недостатка. Первый – нулевое сопротивление вследствие потенциальности течения вне следа и ограниченности самого следа [3]. Второй – незамкнутость модели, поскольку величину завихренности в следе  $\omega_0$  надо задавать.

В [12] обсуждается принцип минимума максимального значения скорости на границе обтекаемого тела, как обобщение принципа Жуковского–Чаплыгина, позволяющее определить величину  $\omega_0$ . В частности, для задач обтекания тел с точкой излома на контуре он приводит к необходимости отрыва потока от острой кромки, чем и пользуется автор [12] в ряде примеров. Однако анализа пригодности этого принципа для замыкания модели Лаврентьева не проводится.

Ниже будут приведены аргументы против использования этого принципа в данном аспекте. Вместо него предлагается прием, который часто используется в теории идеальной жидкости для определения свободных параметров моделей [13]. Величину завихренности  $\omega_0$  в вихревых зонах можно связать с определяющим параметром реальных вязких течений – числом Рейнольдса  $Re$  – опосредованно, через какую-либо геометрическую характеристику следа, которая монотонно зависит от величины  $\omega_0$  в идеализированной схеме и от числа  $Re$  в реальных течениях. В качестве определяющей характеристики предлагается выбрать безразмерную длину следа. В свою очередь такие данные, как положение точки отрыва потока, ширина следа, интенсивность вращения жидкости в вихревой зоне, можно использовать для оценки адекватности модели реальным отрывным течениям.

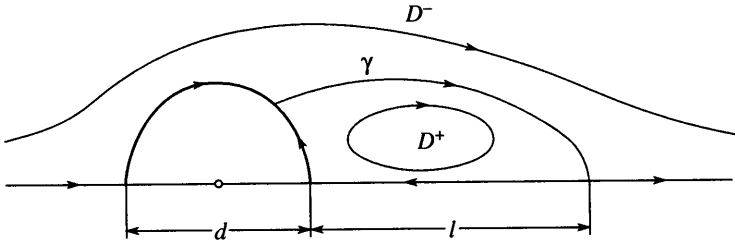
В указанном диапазоне чисел Рейнольдса известные численные методы [14, 15] обеспечивают достаточную точность решения задачи Навье–Стокса. Поэтому наряду с имеющимися экспериментальными данными будут использоваться и результаты численных экспериментов.

Имеется ряд работ, посвященных схеме Лаврентьева. В монографии [12] соответствующая краевая задача оригинальным методом сведена к интегральному уравнению, выявлены его качественные свойства, и приведены примеры численного решения для типовых задач гидродинамики отрывных течений. Вместе с тем подчеркивается сложность исследования вопросов существования и единственности решения, а также численной реализации. Последним, по-видимому, объясняется отсутствие подробного анализа найденных численных решений, а также ошибочность некоторых из них – по крайней мере, авторы не смогли подтвердить расчетами часть приведенных в цитируемой монографии результатов.

В [16, 17] предложено применить подход, апробированный в задачах равновесия тороидальной плазмы и использующий традиционные сеточные методы. Но при этом не учитывался фактор влияния удаленности границ. Поэтому немногочисленные приведенные примеры решения задач требуют корректировки.

В целом перечисленные работы посвящены главным образом вопросам математической корректности или численной реализации схемы Лаврентьева. Параметрического анализа построенных примеров и сравнения их с реальными вязкими течениями не проводилось.

**1. Математическая формулировка и метод решения задачи.** Постановка задачи о симметричном обтекании по схеме М.А. Лаврентьева предполагает, что область течения  $D$  – верхняя полуплоскость над телом – делится на две зоны: внешнюю  $D^+$ , где поток потенциален, и примыкающую к обтекаемому телу зону постоянной завихрен-



Фиг. 1. Потенциально-вихревая схема М.А. Лаврентьева симметричного плоского отрывного течения жидкости вокруг плохо обтекаемого тела

ности  $D^+$  (см. фиг. 1). Неизвестную границу, разделяющую две зоны, обозначим через  $\gamma$ . Сформулируем рассматриваемую задачу для функции тока  $\psi = \psi(x, y)$  во всей области  $D = D^- \cup D^+$ :

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -\omega_0 H(\psi), \quad z \in D \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= 1, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \psi = 0, \quad z \in \partial D \cup \gamma \\ H(\psi) &= 1, \quad \psi < 0, \quad H(\psi) = 0, \quad \psi \geq 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где завихренность  $\omega_0 < 0$  и  $\psi > 0$  в потенциальном потоке,  $\psi < 0$  в вихревом следе.

Задача (1.1) помимо ожидаемого решения с вихревой зоной имеет, по крайней мере, еще одно – безвихревое решение, в котором всюду  $\psi > 0$ . Кроме того, при  $\omega_0 < 0$  возникает “положительная обратная связь” между решением  $\psi$  и источником в правой части уравнения (1.1). Эти факты затрудняют построение надежных алгоритмов решения задачи в постановке (1.1) при произвольном заданном значении  $\omega_0$  [12, 17].

Ситуацию можно исправить, если ввести в рассмотрение циркуляцию скорости по границе вихревой зоны [16–18]

$$\Gamma = \int_D \omega_0 H(\psi) dx dy = \omega_0 S^+ \tag{1.2}$$

Здесь  $S^+$  – площадь вихревой зоны  $D^+$ . Фиксируем величину циркуляции  $\Gamma$  и переищем (1.1) в эквивалентном виде

$$\Delta\psi = F(\psi) \equiv -\Gamma \frac{H(\psi)}{S^+(\psi)} \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) решается методом последовательных приближений

$$\Delta\psi^{n+1} = F(\psi^n) \tag{1.4}$$

где  $n$  – номер итерации. На каждой итерации решение строилось с помощью численного метода конечных элементов. В качестве начального приближения задавалась область  $\psi < 0$ , заведомо целиком лежащая внутри вихревой зоны  $D^+$ . В этом случае невязка уравнения (1.3) быстро убывает, достигая величины порядка  $10^{-7}$  за 20–30 итераций независимо от размерности конечно-элементной сетки. После того, как получено решение задачи  $\psi$ , завихренность определяется по формуле  $\omega_0 = \Gamma/S^+(\psi)$ . Сходимость итераций по методу (1.4) и численные эксперименты с вариацией параметра  $\Gamma$  свидетельствуют об устойчивости найденных решений, хотя детального исследования этого вопроса не проводилось.

Использование метода конечных элементов предполагает ограниченность области течения и задание соответствующих условий на ее границе. Возникает вопрос о правомерности распространения результатов расчетов на безграничные течения. Вклад вихревых зон в функцию тока вдали от обтекаемого тела можно оценить, заменив их точечными вихрями интенсивности  $\pm\Gamma$ ,

отстоящими на расстояние порядка единицы (размера тела) [1], т.е. фактически диполем, функция тока которого имеет вид

$$\psi = \frac{\Gamma y}{2\pi r^2}, \quad r = |z|$$

В сравнении с вкладом порядка  $y$  в функцию тока невозмущенного безграничного течения относительный вклад вихревых зон составляет величину  $\sim \Gamma/2\pi r^2$ . Поэтому, например, найденное в [16] при  $\Gamma = -5$  и удалении границ на расстояние  $\sim 2$  численное решение задачи обтекания уступа нельзя трактовать как задачу о безграничном обтекании, поскольку вклад самих вихревых зон в граничные условия составляет около 25%. Пробные расчеты показали, что границы области течения следует выбирать на расстоянии 20 и более размеров обтекаемого тела.

**2. Обтекание кругового цилиндра.** Обтекание цилиндра безграничным потоком несжимаемой жидкости хорошо изучено как теоретически, так и экспериментально. Некоторые результаты этих исследований обобщены в монографиях [1, 4, 19], где, в частности, представлена зависимость нормированной на диаметр цилиндра  $d$  длины вихревого следа  $l$  от числа Рейнольдса. В диапазоне  $5 < Re < 41$ , в котором наблюдаются устойчивые стационарные вихри, эта зависимость с высокой точностью описывается линейной функцией [1]

$$l/d = 0.06 Re - 0.3 \tag{2.1}$$

На линейный характер зависимости длины следа от числа Рейнольдса указывалось и рядом исследователей, применявших асимптотические методы [10, 11]. Зависимость (2.1) была проверена и подтверждена многовариантными расчетами авторов [18, 20] по модели Навье–Стокса в переменных вихрь – функция тока [21].

Была проведена серия расчетов обтекания цилиндра по схеме Лаврентьева по методу (1.4) при различных значениях циркуляции  $\Gamma$ . Этот вычислительный эксперимент позволил установить зависимость  $l/d$  от  $\Gamma$  (или от  $\omega_0$ ), которая оказалась близкой к линейной (фиг. 2):

$$l/d \approx 0.15 |\Gamma| \tag{2.2}$$

Сравнивая формулы (2.1) и (2.2), получим искомую зависимость циркуляции  $\Gamma$  от числа Рейнольдса  $|\Gamma| = 0.4Re - 2$ , которая замыкает схему М.А. Лаврентьева в случае обтекания цилиндра. Соответствующая картина течения для циркуляции  $|\Gamma| = 10.2$ , что отвечает  $Re = 26$ , показана на фиг. 3 (верхняя часть). Для сравнения там же внизу приведена картина течения, полученная по модели присоединенных вихрей Феппля. Отвечающий ей гидродинамический потенциал имеет вид [22]

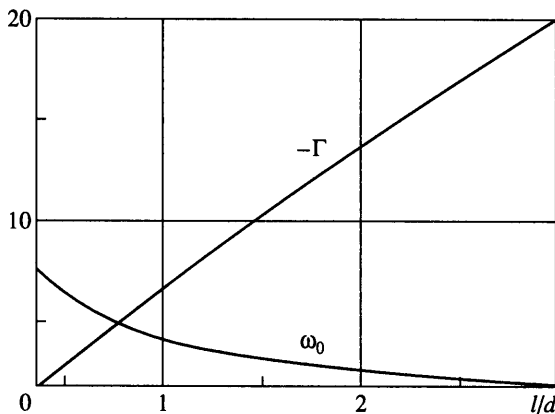
$$W(z) = z + \frac{1}{z} + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left[ \frac{(z - z_0)(z - z_0^{-1})}{(z - \bar{z}_0)(z - \bar{z}_0^{-1})} \right]$$

причем точечные вихри расположены в точках  $z_0 = r_0 e^{i\sigma_0}$  и  $\bar{z}_0 = r_0 e^{-i\sigma_0}$ , удовлетворяющих условиям стационарности

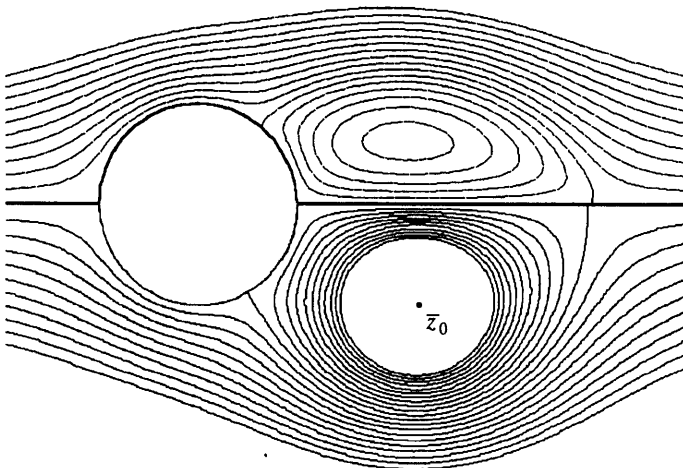
$$2r_0 y_0 = r_0^2 - 1, \quad \Gamma r_0^5 = 2\pi(r_0^2 - 1)^2(r_0^2 + 1)$$

При этом циркуляция скорости  $\Gamma$  по границе вихревой зоны считалась параметром модели и подбиралась с помощью того же приема, что и в схеме Лаврентьева. Для приведенной на фиг. 3 картины течения в схеме Феппля она составила  $|\Gamma| = 12.2$ .

В сравнении с реальной картиной течения [23] вихревой след, полученный по схеме Лаврентьева, более выпуклый (ширина зоны на  $\approx 30\%$  больше), а интенсивность движения жидкости в нем на порядок больше: минимальное значение функции тока в следе равно  $\psi_{\min} = -0.57$ , завихренность  $\omega_0 = -3.1$ , в то время как расчет по модели Навье–Стокса дает значения  $\psi_{\min} = -0.09$ , завихренность в центре вращения не превышает  $\omega_0 = -0.95$ .



Фиг. 2. Связь циркуляции  $\Gamma$  и завихренности  $\omega_0$  с относительной длиной  $l/d$  вихревого следа за цилиндром



Фиг. 3. Картина течения при обтекании кругового цилиндра по схеме Лаврентьева для  $|\Gamma| = 10.2$  (вверху) и по модели Феппля для  $|\Gamma| = 12.2$  (внизу). Сгущающиеся к центру вихря  $\bar{z}_0$  почти круговые линии тока не нарисованы

В целом схема Феппля дает более значительное отличие от реального течения: ширина вихревой зоны в 2 раза больше реальной, а вращение жидкости в ней еще интенсивнее. Точка отрыва потока от обтекаемого тела определяется удовлетворительно в обеих схемах.

**3. Обтекание уступа и пластины.** Изложенный выше подход можно применить и к другим задачам, в частности к задачам симметричного обтекания уступа и пластины. В отличие от цилиндра эти тела имеют острые кромки, и наибольший интерес представляют решения задачи при значениях циркуляции  $\Gamma$ , обеспечивающих срыв потока с этих кромок. В рамках применяемого численного метода положение точек отрыва можно определить только приближенно. Как показали расчеты, это приводит к значительным погрешностям, поскольку именно в окрестности острых кромок положение точки отрыва слабо зависит от циркуляции. В такой ситуации можно провести параметризацию задачи: перейти от переменной  $z = x + iy$  к параметрической переменной  $\zeta = \xi + i\eta$  с помощью конформного отображения, переводящего плоскость  $z$  в каноническую плоскость  $\zeta$ , в которой границы течения не имеют острых

кромки. В отличие от [12] в качестве канонической выбирается не полуплоскость, а первый квадрант плоскости. Это удобнее, поскольку якобиан отображения  $|dz/d\zeta|^2$  всюду ограничен.

Для уступа отображение осуществляется с помощью формул [24]

$$\pi z(\zeta) = \zeta \sqrt{2 + \zeta^2} + \ln[1 + \zeta^2 + \zeta \sqrt{2 + \zeta^2}] \quad (3.1)$$

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 = \frac{4}{\pi^2} \sqrt{(2 + \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\xi^2 \eta^2} \quad (3.2)$$

Точке  $z = i$  физической плоскости будет соответствовать  $\zeta = i\sqrt{2}$ . Физическая плоскость  $z$  нормирована на высоту уступа  $h$ .

Для пластины отображение осуществляется с помощью формул [24]

$$z(\zeta) = \zeta \sqrt{2 + \zeta^2} \quad (3.3)$$

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 = 4 \frac{(1 + \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\xi^2 \eta^2}{\sqrt{(2 + \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\xi^2 \eta^2}} \quad (3.4)$$

Точке  $z = i$  физической плоскости будет соответствовать  $\zeta = i$ . Физическая плоскость  $z$  нормирована на полудлину пластины  $h$ .

Задача (1.1) при учете (1.2), (1.3) может быть переформулирована во вспомогательной плоскости:

$$\Delta \psi = -\Gamma \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 \frac{H(\psi)}{S^+}, \quad \zeta \in D \quad (3.5)$$

$$\psi = 0, \quad \zeta \in \partial D \cup \gamma, \quad \psi \approx b\xi\eta, \quad |\zeta| \rightarrow \infty$$

Площадь вихревой зоны вычисляется по формуле

$$S^+ = \iint_D H(\psi) \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 d\xi d\eta \quad (3.6)$$

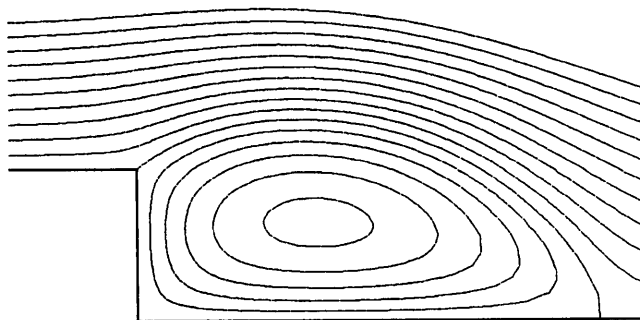
Якобиан отображения для уступа и для пластины имеет вид (3.2) и (3.4), а константа  $b$  равна соответственно  $2/\pi$  и 2.

Численные решения задачи (3.5), (3.6) в плоскости  $\zeta$  были получены итерационным методом (1.4) и после подбора значений  $\Gamma$  переведены в плоскость  $z$  с помощью формул (3.1) и (3.3). Затем они были проверены и подтверждены с помощью решения задачи непосредственно в физической плоскости в постановке (1.3) при найденных значениях циркуляции  $\Gamma$ .

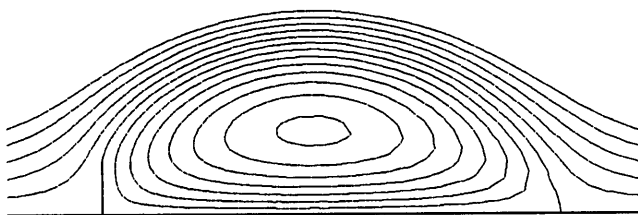
На фиг. 4 показаны результаты расчетов для уступа в плоскости  $z$  при  $|\Gamma| = 9.4$  ( $\omega_0 = -2.82$ ), что обеспечивает отрыв потока в точке  $\eta = \sqrt{2}$  плоскости  $\zeta$  и в угловой точке уступа в физической плоскости.

На фиг. 5 показаны результаты расчетов для пластинки, ортогональной потоку, в плоскости  $z$  при  $|\Gamma| = 28.5$  ( $\omega_0 = -1.32$ ), что обеспечивает отрыв потока в точке  $\eta = 1$  плоскости  $\zeta$  и с края пластины в плоскости  $z$ . При этом относительная длина следа составила 8.7, а полуширина 3.1.

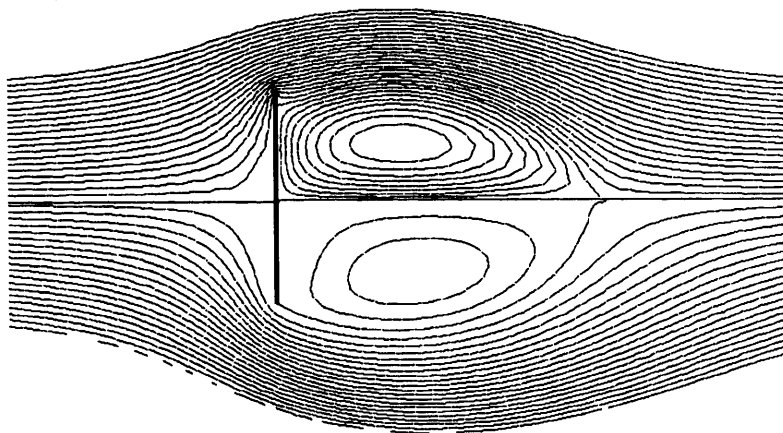
Локальное поведение линий тока в окрестности точки отрыва (например, сход потока с края пластины под нулевым углом) не соответствует реальным вязким течениям. Кроме того, задание точки схода потока однозначно определяет параметр  $\omega_0$  и конфигурацию вихревого следа независимо от числа Рейнольдса, что не согласуется с экспериментом. Таким образом, требование схода потока с острых кромок в



Фиг. 4. Картина течения при обтекании уступа по схеме Лаврентьева с отрывом потока от острой кромки



Фиг. 5. Картина течения при обтекании пластины, ортогональной потоку, по схеме Лаврентьева с отрывом потока от острой кромки



Фиг. 6. Отрывное обтекание пластины, ортогональной потоку, по схеме Лаврентьева при  $|\Gamma| = 9$  (вверху) и по модели Навье–Стокса при  $Re = 10$  (внизу)

схеме Лаврентьева не оправдывает себя. В то же время, подбирая параметр модели по длине вихревой зоны реального течения, удастся добиться неплохого согласования картин течения, рассчитанных по схеме Лаврентьева (верхняя часть фиг. 6,  $|\Gamma| = 9$ ) и по модели Навье–Стокса (нижняя часть фиг. 6,  $Re = 10$ ). При этом получается, что  $|\Gamma| \approx Re$ .

Из трех рассмотренных типов задач лишь решение для обтекания уступа с отрывом от острой кромки удовлетворительно согласуется с решением, приведенным в [12]: длина вихревой зоны равна соответственно 3.15 и 3.3, ширина 1.32 и 1.5, значение завихренности 2.82 и 2.68. Решения же для пластины и цилиндра (точка отрыва

расположена под углом  $60^\circ$ ) отличаются существенно. Так, длина следа за пластиной равна соответственно 8.7 и 4.8, а за цилиндром 2.8 и 1.

**Закключение.** Для замыкания потенциально-вихревой схемы Лаврентьева нельзя использовать обобщенный принцип Жуковского–Чаплыгина, как, по-видимому, и любой другой феноменологический принцип, оперирующий положением точки отрыва. Так, согласно расчетам, ее положение меняется очень слабо даже при значительном изменении длины вихревой зоны. При подборе неопределенного параметра модели – завихренности  $\omega_0$  – непосредственно по длине вихревого следа реальных отрывных течений в диапазоне  $5 < Re < 41$  схема Лаврентьева дает удовлетворительные результаты для структуры и размеров (ширины) вихревого следа, но значительно (в разы) более высокую интенсивность рециркуляционного движения в вихревом следе по сравнению с реальными течениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 01-01-00068).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambrige: Univ. Press, 1967. = *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
2. Сэффмен Ф. Динамика завихренности // Современная гидродинамика. М.: Мир, 1984. С. 77–90.
3. Степанов Г.Ю. Модели невязкой жидкости в теории отрывных течений // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1989. Т. 186. С. 31–39.
4. Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1989. 253 с.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
6. Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. Отрывные и кавитационные течения. М.: Наука, 1990. 382 с.
7. Batchelor G.K. A proposal concerning laminar wakes behind bluff bodies at large Reynolds number // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. Pt 4. P. 388–398.
8. Turfus C., Castro I.P. Prandtl–Batchelor model of flow in the wake of a cascade of normal flat plates // Fluid Dynamics Research. 2000. V. 26. № 3. P. 181–202.
9. Vunyakın A.V., Chernyshenko S.I., Stepanov G.Yu. High–Reynolds number Batchelor-model asymptotics of a flow past an aerofoil with a vortex trapped in a cavity // J. Fluid Mech. 1998. V. 358. P. 283–297.
10. Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик.В. Асимптотическая теория отрывных течений. М.: Наука, 1987. 255 с.
11. Чернышенко С.И. Асимптотика стационарного отрывного обтекания тела при больших числах Рейнольдса // ПММ. Т. 52. Вып. 6. 1988. С. 958–966.
12. Гольдштик М.А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
13. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
14. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
15. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Везуб П.А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнения Навье–Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
16. Вабищевич П.Н., Гассиев Р.В. Численное решение задачи о склейке потенциальных и вихревых течений // Численные методы механики сплошных сред. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986. Т. 17. № 3. С. 10–18.
17. Афанасьев К.Е., Боженкова С.В. Потенциально-вихревая схема для расчета отрывных течений // Проблемы гидродинамики больших скоростей. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1993. С. 26–32.
18. Мазо А.Б., Алимов М.М. Моделирование стационарного отрывного обтекания тел и решеток несжимаемой жидкостью // Тр. 8-й Междунар. конф. “Современные проблемы математического моделирования” Ростов-н/Д; Изд-во РГУ, 2001. С. 35–47.
19. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И. и др. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука, 1988. 231 с.



20. *Mazo A.B.* External problems of incompressible bluff-body flow at moderate Reynolds number // Numerical Methods for Continuum Casting and Related Problems: Proc. Lobachevskii Center. V. 9. Kazan: "DAS" Publ., 2001. P. 81–92.
21. *Napolitano M., Pascazio G., Quatrapelle L.* A review of vorticity conditions in the numerical solution of the  $\zeta$ - $\psi$  equations // Computers and Fluids. 1999. V. 28. № 2. P. 139–185.
22. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655.
23. *Van Dyke M.* An Album of Fluid Motion. California, Stanford: Stanford Univ., 1982. = *Ван-Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 181 с.
24. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Казань  
E-mail: Mars.Alimov@ksu.ru

Поступила в редакцию  
13.II.2001