

УДК 532.526.2

© 2002 г. С.К. БЕТЯЕВ

## О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ПРОНИЦАЕМЫХ ГРАНИЦАХ

Дана классификация математических моделей отсоса ламинарного пограничного слоя. Рассмотрены условия возникновения сингулярного отрыва вблизи вершины пластины и определено потребное для его предотвращения оптимальное распределение скорости отсоса. Показано, что с помощью отсоса невязкой жидкости можно ликвидировать первопричину сингулярного отрыва – особенность в градиенте давления, и получено необходимое для этих целей оптимальное распределение скорости отсоса вблизи кромки. На примере точного решения уравнения Навье – Стокса продемонстрировано безотрывное обтекание окружности с отсосом, осуществляемым на "задней державке". Обсуждается схема течения при вдуве жидкости в пограничный слой.

*Ключевые слова:* ламинарный пограничный слой, проникаемая поверхность, отрыв, решения уравнений Навье – Стокса.

**1. Постановка задачи.** Предложенный еще Прандтлем [1] отсос пограничного слоя имеет два назначения: ламинаризация потока и предотвращение (устранение или затягивание) его отрыва. Рассмотрим второе назначение применительно к плоскому ламинарному течению несжимаемой жидкости. Если вихрегенераторы воспроизводят новые вихревые структуры, то отсос, наоборот, уменьшает их интенсивность и даже ликвидирует некоторые из них. Хотя теоретические оценки подтверждают эффективность отсоса, его практическое применение зависит от решения трудных инженерных задач [2–3].

При наличии отсоса на твердой поверхности  $y = 0$  вместо условия непротекания  $v = 0$ , где  $u(x, y, t)$  – нормальная к поверхности составляющая скорости, ставится условие отсоса:  $u(x, 0, t) = \tau \delta u_0(x, t)$ , с пока неопределенным безразмерным комплексом  $\tau \delta$  и произвольной функцией  $u_0$ , зависящей от продольной координаты  $x$  и времени  $t$ . В слабовязкой жидкости, когда  $Re = \delta^{-2} = u_\infty l / \nu \gg 1$  ( $u_\infty$  – скорость невозмущенного потока,  $l$  – характерный размер обтекаемого тела,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости), параметр  $\tau$  следует соотносить с толщиной пограничного слоя  $\delta$ . Если  $\tau \ll 1$  (слабый отсос), то воздействие его на пограничный слой ничтожно мало. Случай  $\tau = 1$  соответствует классической задаче об отсосе пограничного слоя [4–6], случай  $1 \ll \tau \ll \delta^{-1}$  – сильному отсосу пограничного слоя, а случай  $\tau \delta = 1$  – отсосу невязкого потока.

Произвольная функция  $u_0$  может выбираться из различных соображений, связанных с управлением вихревой системой крыла или течением в канале: минимум сопротивления тела, минимум энергетических затрат, повышение летучести (аэродинамического качества) самолета, уменьшение толщины пограничного слоя и прочее [1, 4–6]. Разумеется, отсос пограничного слоя не изменяет суммарную завихренность в поперечном сечении, ибо она определяется разницей скоростей на его обоих берегах. Он также не нарушает условие прилипания:  $u(x, 0, t) = 0$ , хотя на самом деле на поверхности тела образуется проскальзывание, скорость которого мала по

сравнению с  $u_\infty$  [2]. Поэтому полная завихренность в любом сечении  $x = \text{const}$

$$\int_0^\infty \omega dy = - \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial y} dy = -u_0(x, t)$$

где  $\omega$  – завихренность,  $u_0$  – скорость на внешней границе пограничного слоя, отлична от нуля и не зависит от интенсивного отсоса.

Отсос пограничного слоя – это  $\delta$ -малое воздействие на поток. С его помощью нельзя управлять отрывом с острой кромки тела, поскольку такой отрыв определяется в результате решения невязкой задачи по условию Кутты о конечности скорости на кромке. Однако с помощью того же отсоса пограничного слоя принципиально возможно предотвращение отрыва от гладкой поверхности. Считается [7], что ламинарный отрыв от гладкой поверхности без отсоса удовлетворяет условию Бриллюэна – Вилля о конечности градиента давления в точке отрыва. Отсос приводит к перемещению отрыва, а следовательно к нарушению условия Бриллюэна – Вилля: при приближении к точке отрыва (на фиг. 1, *a* точка отрыва  $O$  потока от гладкого тела связана с началом координат  $x, y$ ) вдоль тела направленный по скорости положительный градиент давления стремится к бесконечности. Для существования такого решения скорость отсоса должна иметь особенность в точке отрыва.

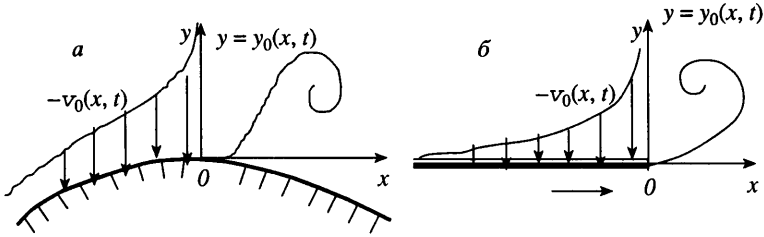
Кроме обычного отрыва, схема которого показана на фиг. 1, *a*, имеется еще сингулярный отрыв невязкого потока – виртуальный отрыв, возникающий вследствие того, что градиент давления направлен по потоку и стремится к бесконечности в точке отрыва. Такая ситуация возникает вблизи вершины пластины  $O$ , с которой сходит первичный отрыв, показанный на фиг. 1, *б* в виде спиральной вихревой пелены. Форма сингулярного отрыва неизвестна [8].

**2. Течение в предотрывной области.** В предотрывной области ( $x < 0$ ) задача о предотвращении отрыва потока от гладкой поверхности (фиг. 1, *a*) аналогична задаче о предотвращении отрыва вблизи вершины пластины (фиг. 1, *б*), поэтому остановимся на последней из них. Пусть (задняя) кромка пластины  $y = 0, x < 0$ , с которой сходит тангенциальный разрыв, обтекается потоком несжимаемой жидкости. Обтекание будем считать нестационарным, так как схема стационарного отрывного обтекания (по схеме Гельмгольца) с отходящей от кромки свободной границей приводит к тривиальному результату в заотрывной области – покою. В скобках заметим, что плоское нестационарное течение в приложениях обычно появляется как аналог трехмерного стационарного течения.

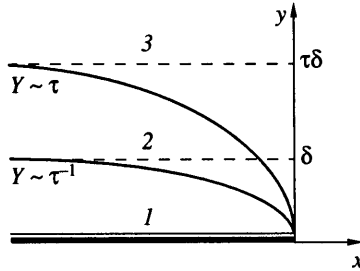
Координатное разложение по степеням  $r^2 = x^2 + y^2$  решения уравнения Лапласа, описывающего течение идеальной жидкости, в окрестности вершины пластины  $r = 0$  не аналитично. "Закон 3/2" для формы свободной границы известен давно (см., например, [9]), он легко получается из точного решения задачи об обтекании острой кромки по схеме Гельмгольца. В [8] он обобщен на случай нестационарного течения и сжимаемого газа. Этот закон справедлив и для контактного разрыва при отсутствии сил поверхностного натяжения. Имеется небезынтересная аналогия между этим законом и так называемым условием Мейкснера на ребре в теории дифракции электромагнитных волн на пластине [10]. Форма вихревой пелены  $y_0(x, t)$ , распределение скорости  $u_0(x, t)$  и давления  $p_0(x, t)$  на тыльной ( $x < 0, y = +0$ ) стороне пластины имеют вид

$$\begin{aligned} y_0(x, t) &= kx^{3/2} + O(x^{5/2}) \\ u_0(x, t) &= u_1 + \frac{3}{2}ku_1(-x)^{1/2} + O(x) \\ p_0(x, t) &= p_1 - \frac{3}{2}ku_1^2(-x)^{1/2} + O(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $k(t), u_1(t), p_1(t)$  – произвольные функции времени, плотность жидкости принята равной 1.



Фиг. 1. Схемы отсоса пограничного слоя на: *a* – гладкой поверхности, *б* – тыльной стороне пластины



Фиг. 2. Асимптотические зоны течения в предотрывной области при  $\tau \gg 1$ : 1 – вязкий подслой, 2 – зона отсоса, 3 – внешнее течение

В соответствии с (2.1) на тыльной стороне пластины вблизи ее кромки создается неблагоприятный бесконечный градиент давления, вызывающий сингулярный отрыв. Проблема заключена в том, можно ли с помощью отсоса пограничного слоя на тыльной стороне пластины предотвратить сингулярный отрыв. Для ответа на этот вопрос обратимся к уравнению пограничного слоя

$$\Psi_{YY} + \Psi_Y \Psi_{xY} - \Psi_x \Psi_{YY} + p_{0x} = \Psi_{YY} \quad (2.2)$$

где функция тока  $\psi(x, y, t) = \delta \Psi(x, Y, t) + O(\delta)$ ,  $y = \delta Y$ ,  $\psi_y = u$ .

Параметр  $\tau$  входит в граничные условия прилипания на теле

$$\Psi(x, 0, t) = \tau \psi_0(x, t), \quad \Psi_Y(x, 0, t) = 0 \quad (2.3)$$

$$\Psi_Y(x, \infty, t) = u_0 \quad (u_0 = -\psi_{0x} < 0) \quad (2.4)$$

При  $\tau = 1$  предельное состояние пограничного слоя автомодельно и находится таким же образом, как в задаче о пограничном слое с неблагоприятным для отрыва потока градиентом давления [7, 11]. Кстати, течение с неблагоприятным градиентом давления реализуется на нижней поверхности пластины  $x < 0$ ,  $y < 0$ . Из условия сохранения всех членов в уравнении (2.2), кроме нестационарного ( $\Psi_{YY}$ ), находим

$$f''' - ff'' + \frac{2}{5}(f'^2 - 1) = 0 \quad (2.5)$$

где штрихом обозначена производная по  $\xi$

$$\Psi = \frac{4}{5} \sqrt{5} \left( \frac{3}{4} k u_1^2 \right)^{1/4} (-x)^{5/8} f(\xi, t), \quad \xi = \frac{\sqrt{5}}{2} \left( \frac{3}{4} k u_1^2 \right)^{1/4} \frac{Y}{(-x)^{3/8}}$$

Уравнение, описывающее течение внизу пластины, отличается от (2.5) лишь знаком перед постоянным членом.

Чтобы отсос воздействовал на течение, функция тока  $\Psi_0$  должна быть равной  $O[(-x)^{5/8}]$ . Если она меньше этой величины, то влияние отсоса в рассматриваемом приближении несущественно. Если она больше этой величины, то схема течения разрушается, затраты на отсос становятся неоптимальными.

Полагая

$$\Psi_0 = -\frac{4\sqrt{5}}{5} \left( \frac{3}{4} ku_1^2 \right)^{1/4} (-x)^{5/8}$$

из (2.3) получаем граничные условия, справедливые на дне пограничного слоя

$$f(0) = -\tau, \quad f'(0) = 0 \quad (2.6)$$

Решение задачи (2.5)–(2.6) параметрически зависит от времени, если от него зависит параметр  $\tau$ . Скорость отсоса

$$v_0 = \frac{\sqrt{5}}{2} \left( \frac{3}{4} ku_1^2 \right)^{1/4} (-x)^{-3/8} \quad (2.7)$$

имеет степенную особенность в точке  $x = 0$ .

Вместо условия на бесконечности (2.4) выставляется условие отсутствия экспоненциально возрастающих при  $\xi \rightarrow \infty$  членов [11].

При  $\tau \gg 1$  задача (2.5)–(2.6) решается с помощью метода сращивания асимптотических разложений. В этом случае влияние вязкости сосредоточено в условно изображенном на фиг. 2 подслое 1, где  $\eta = \tau\xi = O(1)$ , и справедливо внутреннее разложение [12]

$$f(\xi; \tau) = -\tau + \tau^{-1}\varphi(\eta) + o(\tau^{-1})$$

Из уравнения (2.5) и граничных условий (2.6) находим

$$\varphi(\eta) = C[\exp(-\eta) + \eta - 1] \quad (2.8)$$

где  $C$  – пока неопределенная константа.

При принятых допущениях из потока отсасывается расход жидкости, заполняющий слой толщиной  $\xi = O(\tau)$  – слой 2 на фиг. 2. Здесь справедливо внешнее разложение

$$f(\xi; \tau) = \tau F(\beta) + o(\tau), \quad \xi = \tau\beta$$

В уравнении (2.5) исчезает вязкий член – старшая производная

$$FF'' - \frac{2}{5}(F'^2 - 1) = 0$$

Решение этого уравнения, содержащее две произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , тоже находится в замкнутой форме

$$\beta = \int_0^F (1 + C_1 F^{4/5})^{-1/2} dF + C_2 \quad (2.9)$$

Внешний предел внутреннего разложения равен

$$f = \tau(C\beta - 1) + O(\tau^{-1})$$

Из условия сращивания решений (2.8) и (2.9) и требования о положительности продольной скорости  $f'$  определяются неизвестные константы

$$C_1 = 0, \quad C_2 = C = 1$$

Во внешнем слое профиль продольной скорости не зависит от  $Y$ .

В случае сильного отсоса ( $\tau \gg 1$ ) не обязательно задаваться оптимальным законом (2.7), задача решается в общем виде при произвольных значениях функций  $u_0(x, t)$  и  $v_0(x, t)$ . В вязком подслое, где  $\alpha = \tau Y = O(1)$ , удается получить решение уравнения (2.2), удовлетворяющее как условиям на поверхности тела (2.3), так и условиям на внешней границе пограничного слоя (2.4)

$$\Psi = \tau \Psi_0 + \tau^{-1} \frac{u_0}{v_0} [1 - \exp(-\alpha v_0) + \alpha v_0] + o(\tau^{-1})$$

Это решение является обобщением решения задачи об асимптотическом отсосе на случай переменных значений  $u_0(x, t)$  и  $v_0(x, t)$ . Решение в невязком слое, где  $Z = Y/\tau = O(1)$ , тривиальное  $\Psi = \tau \delta \Psi_1(x, z, t) + o(\tau)$ ,  $\Psi_{1zt} + \Psi_{1z} \Psi_{1xz} - \Psi_{1x} \Psi_{1zz} + p_{0x} = 0$ ,  $\Psi_1 = \Psi_0 + \beta u_0$

$$u_{0t} + u_0 u_{0x} + p_{0x} = 0$$

Таким образом, сильный отсос ликвидирует сингулярный отрыв, что указывает на принципиальную возможность его предотвращения с помощью отсоса. Область взаимодействия, где давление нельзя считать заданным, занимает "квадратную" окрестность вершины пластины [11], при  $\tau = 1$  равную  $O(\delta^{8/9}) \times O(\delta^{8/9})$ .

**3. Отсос в невязкой жидкости.** Поставим более кардинальный вопрос – вопрос не о ликвидации сингулярного отрыва, а о ликвидации его первопричины – бесконечного благоприятного для отрыва градиента давления. В этом случае задача сводится к отсосу идеальной жидкости ( $\tau \delta = 1$ ). Каково оптимальное распределение скорости отсоса?

Снова рассмотрим нестационарное плоское обтекание окрестности вершины пластины, ограничившись потенциальным течением (фиг. 1, б). Задача состоит в построении координатного разложения комплексной скорости течения  $u - iv$ , являющейся аналитической функцией комплексной переменной  $z = x + iy$ . Для восстановления этой функции заметим, что точка  $z = 0$  должна быть особой. Из теории аналитических функций известно, что имеются три вида особых точек: полюс, существенно особая точка и точка ветвления. Особая точка не может быть полюсом в силу условия Кутты об ограниченности скорости. Она не может быть существенно особой точкой, так как по теореме Сохоцкого в зависимости от пути устремления к такой точке ( $z \rightarrow 0$ ) достигается любое, в частности бесконечное значение скорости. Следовательно, особая точка  $z = 0$  есть точка ветвления, координатное разложение является степенным. Обозначая величины, относящиеся к области над пластиной и вихревой пеленой  $y = y_0(x, t)$ , верхним индексом "+", а величины, относящиеся к области под пластиной и вихревой пеленой, верхним индексом "-", получим

$$u^\pm - iv^\pm = u_0^\pm(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^\pm(t) + iB_k^\pm(t)] \xi^k \quad (3.1)$$

где  $u_0^\pm > 0$ ,  $A_k^\pm$  и  $B_k^\pm$  – действительные функции времени,  $\xi = z^{1/(2N)}$ ,  $z = r \exp(i\theta)$ .

Показатель  $N$  зависит от того, по какому (степенному) закону производится отсос жидкости на пластине ( $r = -x$ ), а именно

$$v_0^\pm(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{k/(2N)} b_k^\pm(t) \quad (3.2)$$

Оптимальная скорость отсоса сингулярна в случае отсоса пограничного слоя (2.7) и конечна при  $r \rightarrow 0$  в случае отсоса невязкого потока. При отсутствии отсоса [8] реализуется решение с собственным значением  $N = 1$ . В соответствии с (3.2) такое же течение можно реализовать и при наличии отсоса, однако, как будет показано ниже, в этом случае сингулярность не уничтожается. Поэтому рассмотрим решение при  $N = 2$

как отвечающее понятию оптимального отсоса, т.е. отсоса, соответствующего максимальному показателю степени в первом члене ряда (3.2).

На верхней стороне пластины ( $\theta = \pi$ ,  $r = -x$ ) из (3.1) имеем

$$v^+ = -\frac{\sqrt{2}}{2}(A_1^+ + B_1^+)r^{1/4} - A_2^+r^{1/2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(A_3^+ - B_3^+)r^{3/4} + O(r) \quad (3.3)$$

Коэффициенты отсоса  $b_k^+$  определяются в результате отождествления рядов (3.2) и (3.3). Таким же образом строится решение на нижней стороне пластины.

По своей структуре ряд для давления с точностью до произвольной функции времени аналогичен ряду (3.3). Особенность в градиенте давления дают три его первых члена. Условием отсутствия особенности является равенство нулю этих членов. Поскольку полное решение задачи прозрачно, но громоздко, ограничимся лишь первым приближением, считая пока показатель  $N$  произвольным. Тогда из (3.1) и (3.2) находим

$$b_1^+ = -A_1^+ \sin \frac{\pi}{2N} - B_1^+ \cos \frac{\pi}{2N}, \quad b_1^- = A_1^+ \sin \frac{\pi}{2N} - B_1^- \cos \frac{\pi}{2N}$$

В отличие от задачи об отсосе пограничного слоя здесь отсос на верхней стороне пластины взаимосвязан с отсосом на нижней ее стороне. Условие отсутствия сингулярности имеет вид:

$$A_1^+ \cos \frac{\pi}{2N} - B_1^+ \sin \frac{\pi}{2N} = 0 \quad (3.4)$$

На вихревой пелене  $y = y_0(x, t)$  выполняются условия непротекания на каждой ее стороне и условие равенства давления по обе ее стороны

$$u^\pm \frac{\partial y_0}{\partial x} = v^\pm - \frac{\partial y_0}{\partial t} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \Phi^+}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^+)^2 + \frac{1}{2}(v^+)^2 = \frac{\partial \Phi^-}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^-)^2 + \frac{1}{2}(v^-)^2 \quad (3.6)$$

где  $\Phi$  – потенциал скорости.

Выражение (3.1) определяет по условию (3.5) форму вихревой пелены

$$y_0 = a(t)x^{1+1/(2N)} + b(t)x^{1+2/(2N)} + c(t)x^{1+3/(2N)} + O(x^{2/N}), \quad a > 0$$

Из (3.5), (3.6) в первом приближении находим

$$\left(1 + \frac{1}{2N}\right) a u_0^\pm = -B_1^\pm, \quad A_1^+ u_0^+ = A_1^- u_0^- \quad (3.7)$$

Сначала рассмотрим случай  $N = 1$ . Из (3.4) находим:  $B_1^+ = 0$ , что невозможно в силу (3.7) и положительной определенности  $a$  и  $u_0^\pm$ . Таким образом, как и утверждалось выше, решение с  $N = 1$  непригодно.

При  $N = 2$  решение (3.4), (3.7) существует и имеет вид:

$$A_1^+ = B_1^+, \quad A_1^- = \frac{u_0^+}{u_0^-} A_1^+, \quad B_1^\pm = -\frac{5}{4} a u_0^\pm$$

Оптимальная скорость отсоса равна

$$v_0^\pm = b_1^\pm r^{1/4} + O(r^{1/2}) \quad (3.8)$$

$$b_1^+ = \frac{5\sqrt{2}}{4} a u_0^+, \quad b_1^- = \frac{5\sqrt{2}}{8} a \frac{(u_0^+)^2 + (u_0^-)^2}{u_0^-}$$

Поскольку оказалось, что  $b_1^+ > 0$ , жидкость отсасывается только на нижней стороне пластины, а на верхней стороне она вдувается. Свойства поступающей в поток жидкости (плотность, полное давление, коэффициент поверхностного натяжения) такие же, как и свойства основной жидкости. В противном случае на границе их раздела – контактном разрыве – непрерывность потенциального течения нарушается.

Течения на верхней и нижней стороне пластины взаимозависимы, задачи об отсосе и о вдуве неразделимы. Коэффициент  $b_1^- / b_1^+ = (u_0^+ / u_0^- + u_0^- / u_0^+) / 2$ , показывающий, во сколько раз расход отсасываемой жидкости превосходит расход вдуваемой, при  $u_0^+ \neq u_0^-$ , то есть при наличии вихревой пелены всегда больше 1.

**4. Замечание о вдуве жидкости в пограничный слой.** Итак, если изменить знак в скорости отсоса, то вместо задачи об отсосе получится задача о вдуве жидкости. Однако различие этих задач не столь формальное, сколь принципиальное, ибо как уже отмечалось, в задаче о вдуве взаимодействуют две фазы жидкости: основная и вдуваемая. Рассмотренное в п. 2 асимптотическое решение здесь не проходит, так как содержит экспоненциально возрастающие члены, не сращиваемые с внешним пределом.

Впрыскиваемая жидкость, занимающая область 2 на фиг. 3, отрывает пограничный слой от поверхности тела, превращая его тем самым в слой смешения 3, примыкающий к области невязкого течения 4. Если обе фазы жидкости несмешивающиеся, то они разграничены линией раздела, обозначенной кривой / на фиг. 3 и представляющей собой контактный разрыв плотности, полного давления и тангенциальной составляющей скорости. При щелевом вдуве (или отсосе) вблизи стенки образуется слой 1, в котором существенно влияние геометрии щелей и вязкости [2]. Следовательно, пограничный слой, превратившись в слой смешения, оказывается расположенным на “воздушной подушке”, и условие его отрыва – нулевое трение – в принципе, не может реализоваться.

При  $1 \ll \tau \ll 1/\delta$  (сильный вдув) течение в области 2 невязкое. Здесь справедливо уравнение невязкого пограничного слоя, которое в стационарном случае для функции тока  $\psi$  запишется таким образом

$$\psi_z \psi_{xz} - \psi_x \psi_{zz} + \frac{1}{\rho} p'_0(x) = 0$$

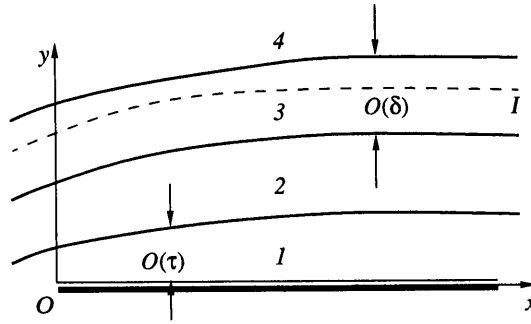
где  $p_0$  – давление на внешней границе слоя,  $\rho$  – плотность вдуваемой жидкости, плотность основной жидкости принята равной 1.

Решение этого уравнения:  $p_0 + \rho u^2/2 = g(\psi)$  содержит произвольную функцию  $g(\psi)$ , которая находится из граничных условий на стенке ( $y = 0$ ), где задана функция тока  $\psi_0(x) = -\int v_0(x) dx$ , определяющая расход впрыскиваемой жидкости.

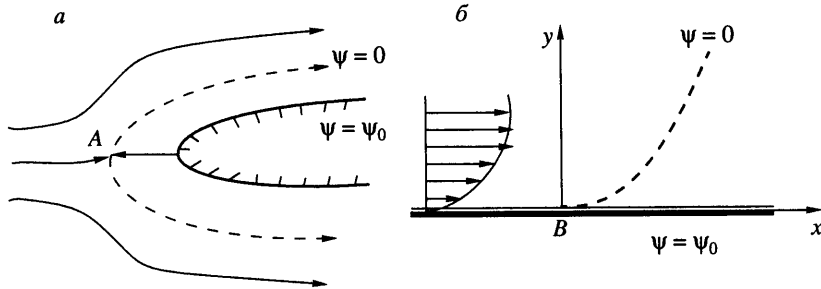
Линия раздела между впрыскиваемой и основной жидкостью  $\psi = 0$  начинается либо в расположенной над поверхностью тела точке А (фиг. 4,а), либо в расположенной на теле точке отрыва В (фиг. 4,б). В окрестности точки торможения и точки отрыва приближение пограничного слоя несправедливо.

При  $\tau \ll 1$  (слабый вдув) струя инородной жидкости расположена в зоне 2 ползущего течения (фиг. 3). Ее толщина  $\epsilon$  уже не равна  $O(\tau\delta)$ . Так как  $u = O(\epsilon\delta)$ ,  $v = O(\tau\delta)$ , из уравнения неразрывности находим  $\epsilon = \delta\tau^{1/2}$ . Профиль скорости в струе линейный, поэтому функция тока равна

$$\psi = \tau\delta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\epsilon} \right)^2 \lambda(x) - \int v_0 dx \right]$$



Фиг. 3. Асимптотические зоны течения при вдуве: 1 – вязкий подслой, 2 – зона отсоса, 3 – слой смешения, 4 – зона невязкого течения, I – граница вдуваемой жидкости



Фиг. 4. Схемы течения вблизи точки возникновения контактного разрыва. Жидкость впрыскивается: а – по всей поверхности, б – лишь при  $x > 0$

где величина  $\lambda$  пропорциональна напряжению трения на стенке. Из условия  $\psi = 0$  определяется граница струи

$$y_0(x) = \varepsilon \left( \frac{2}{\lambda} \int v_0 dx \right)^{1/2}$$

Как и слабый отсос, слабый вдув мало влияет на течение в целом. В рамках предложенной модели более перспективным представляется наклонный вдув, когда скорость вдува, равная  $O(\tau^{1/2})$ , направлена под углом  $O(\varepsilon)$  к поверхности тела. Такой вдув создает проскальзывание на дне пограничного слоя, способствующее предотвращению отрыва.

**5. Об одном точном решении уравнения Навье–Стокса.** В случае  $\tau\delta \ll 1$  воз2 действие отсоса на безотрывное течение локально – оно ощущается только в расположенной по направлению потока части пограничного слоя. Воздействие отсоса на отрывное течение глобально и заключается в структурном изменении отрыва от гладкой поверхности. В случае  $\tau\delta = 1$  влияние отсоса всегда глобально: и при конечных, и при бесконечных значениях числа Re. Такой отсос настолько изменяет поле давления, что частицы жидкости приобретают способность безотрывно обогнуть поверхность плохообтекаемого тела. Для иллюстрации этого положения рассмотрим уравнения Навье–Стокса, записанные в переменных функция тока–давление

$$\Psi_{\theta r} + \frac{1}{r} \Psi_{\theta} \Psi_{r\theta} - \frac{1}{r} \Psi_{r\theta\theta} - \Psi_r^2 - \frac{1}{r^2} \Psi_{\theta}^2 + r p_r = \nu \left( \Psi_{rr\theta} + \frac{1}{r^2} \Psi_{\theta\theta\theta} + \frac{1}{r^2} \Psi_{r\theta} \right)$$

$$\Psi_{rr} + \frac{1}{r} \Psi_{\theta} \Psi_{rr} - \frac{1}{r} \Psi_r \Psi_{r\theta} + \frac{1}{r^2} \Psi_r \Psi_{\theta} - \frac{1}{r} p_{\theta} = \nu \left( \Psi_{rrr} + \frac{1}{r^2} \Psi_{r\theta\theta} + \frac{1}{r} \Psi_{rr} - \frac{2}{r^3} \Psi_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} \Psi_r \right)$$



Решение представим в виде координатного ряда по степеням  $\theta$

$$\psi(r, \theta, t) = \sum_{k=0}^N \theta^k F_k(r, t), \quad p(r, \theta, t) = \sum_{k=0}^{N+1} \theta^k p_k(r, t) \quad (5.1)$$

При  $N = 1$  ряды обрываются, решение оказывается точным. Подставляя его в уравнения Навье–Стокса, получим три автономных системы уравнений, одна из которых служит для определения  $F_1$  и  $p_2$ , вторая – для определения  $F_0$  и  $p_1$ , третья – для определения  $p_0$ . Первая система такова

$$r^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial t \partial r} + r F_1 \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} - r \left( \frac{\partial F_1}{\partial r} \right)^2 + F_1 \frac{\partial F_1}{\partial r} = 2rp_2 + v \left( r \frac{\partial^3 F_1}{\partial r^3} + r \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} - \frac{\partial F_1}{\partial r} \right) \quad (5.2)$$

$$r \frac{\partial p_2}{\partial r} = \left( \frac{\partial F_1}{\partial r} \right)^2$$

Вторая система уравнений линейна относительно  $\Phi = -\partial F_0 / \partial r$  и  $p_1$

$$r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + r F_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - r \Phi \frac{\partial F_1}{\partial r} + \Phi F_1 = -rp_1 + v \left( r^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Phi \right) \quad (5.3)$$

$$r \frac{\partial p_1}{\partial r} + 2\Phi \frac{\partial F_1}{\partial r} = 0$$

Третья система состоит из одного уравнения

$$r \frac{\partial p_0}{\partial r} = v \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_1}{\partial r} \right) - \frac{\partial F_0}{\partial r} - \frac{1}{2} F_1 \frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} F_1^2 + \Phi^2 \quad (5.4)$$

Завихренность потока равна

$$\Omega = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_0}{\partial r} - r \theta \omega$$

$$r \omega = r \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} + \frac{\partial F_1}{\partial r}$$

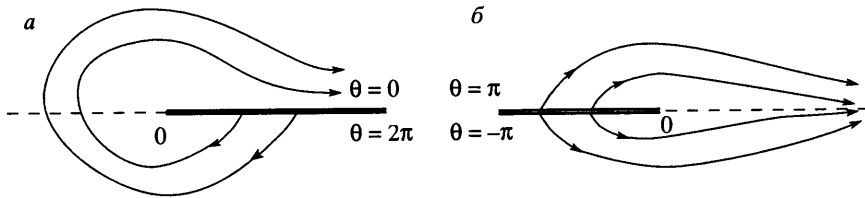
Интересно отметить, что нестационарное решение системы (5.3) возможно и в том случае, когда решение системы (5.2) стационарно. Сосредоточим усилия на анализе системы (5.2) ввиду ее независимости от систем (5.3) и (5.4). В стационарном случае после некоторых преобразований получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для определения функций  $F_1(r)$  и  $\omega(r)$

$$rF_1' + F_1 - r\omega = 0, \quad \omega F_1' - F_1 \omega' + v(r\omega'' + \omega') = 0 \quad (5.5)$$

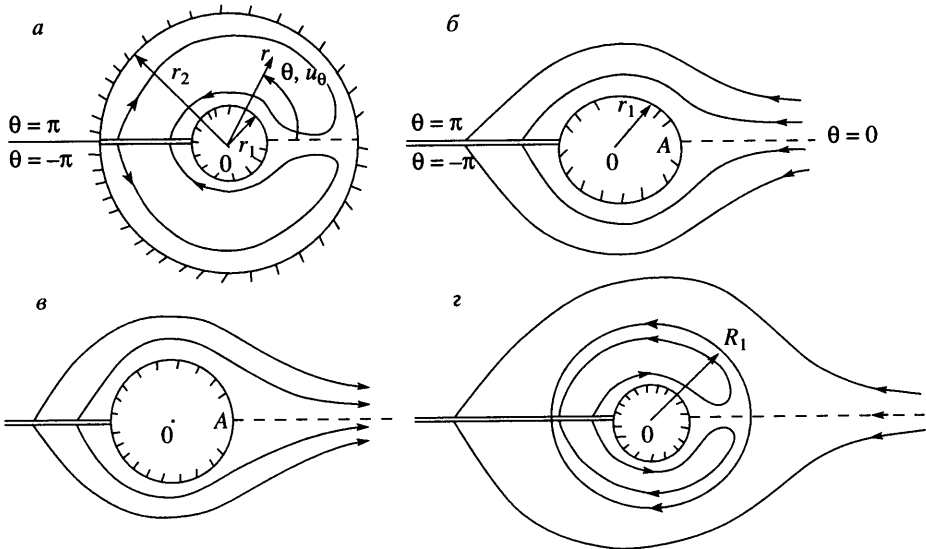
Система (5.5) описывает режим с обострением

$$F_1 = \frac{6vr_0}{r_0 - r} + o[(r_0 - r)^{-1}], \quad \omega = \frac{12vr_0}{(r_0 - r)^3} + o[(r_0 - r)^{-3}]$$

В силу периодичности решения по переменной  $\theta$  разложение (5.1) многослойно, что нефизично. Следовательно, на некоторой линии  $\theta = \text{const}$  решение разрывно, здесь расположены источники или стоки. Топологически различимы две схемы: одностороннее расположение источников или стоков (линии тока представлены на фиг. 5,а) и двустороннее (фиг. 5,б). В первом случае источники расположены на одной стороне пластины, например,  $\theta = \text{const} - 0$ , во втором – источники расположены на обеих сторонах пластины:  $\theta = \text{const} - 0$  и  $\theta = \text{const} + 0$ .



Фиг. 5. Две схемы расположения источников: *a* – на линии  $\theta = 2\pi$ , если  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , *б* – на линиях  $\theta = \pi$  и  $\theta = -\pi$ , если  $-\pi \leq \theta \leq \pi$



Фиг. 6. Картина линий тока: *a* –  $r_1 \leq r \leq r_2$ , *б* –  $r_2 = \infty$ , *A* – "точка входа" потока, *в* –  $r_2 = \infty$ , *A* – "точка схода" потока, *г* –  $N = 1$

Область течения может быть не только безграничной ( $0 < r < \infty$ ), но и конечной. На фиг. 6,*a* схематично изображены линии тока между двумя окружностями  $r = r_1$  и  $r = r_2$  с двусторонним распределением источников ( $-\pi < \theta < +\pi$ ). На окружностях выполняются условия прилипания

$$F(r_1) = F'(r_1) = 0, \quad F(r_2) = F'(r_2) = 0$$

Если  $r_1 = 0$ , то получается течение внутри окружности  $r = r_2$ . Если  $r_2 = \infty$ , то получается обтекание окружности  $r = r_1$ . На фиг. 6,*б* показана схема, когда точка торможения *A* является "точкой входа" потока. При обычном обтекании за телом образуется след неизвестной структуры, здесь же вместо него имеется линейный источник. На фиг. 6,*в* представлена схема, когда точка торможения *A* является "точкой схода" потока, обтекание безотрывно.

При  $v \rightarrow 0$  справедлива концепция пограничного слоя, образующегося на твердых границах. В случае ползущего течения ( $v = \infty$ ) решение находится в замкнутой форме:  $F_1 = c_1 \ln r + c_2 r + c_3 + c_4 r^3 (\ln r - 5/2)$ . В случае течения идеальной жидкости ( $v = 0$ ) из (5.5) имеем

$$\omega = F_1' + \frac{1}{r} F_1'' = \pm k^2 F_1 \quad (5.6)$$

В безвихревом ( $k = 0$ ) потоке  $F_1 = a_0 + a_1 \ln r$  скорость на бесконечности стремится к нулю. В завихренном потоке нижнему знаку в (5.6) соответствует затухающая квази-периодическая асимптотика решения при  $r \rightarrow \infty$ :  $F_1 \approx c_0 r^{-1/2} \exp(ikr)$ ; верхнему знаку – асимптотика:  $F_1 \approx c_0 r^{-1/2} \exp(|k|r)$ .

Число образующихся замкнутых зон, ограниченных окружностями  $r = R_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ), где  $u_r(R_j) = 0$ , равна числу нулей  $N$  функции  $F_1(r)$ . На фиг. 6,2 показано поле линий тока, задаваемых уравнением  $\theta F_1 = \text{const}$ , в случае  $N = 1$ . Слоистость решения при больших значениях числа  $Re$  наблюдается в различных задачах гидродинамики и является, по-видимому, фундаментальным свойством уравнения Навье–Стокса.

**Заключение.** Отсос является эффективным средством устранения “вредных” отрывов. С помощью отсоса можно затянуть обычный отрыв от гладкой поверхности и даже организовать безотрывное обтекание толстого тела, как показано на примере точного решения в п. 5. Патологическая ситуация возникает при сингулярном распределении давления в предотрывной области. В этом случае можно либо ликвидировать сингулярный отрыв с помощью оптимального (тоже сингулярного) распределения скорости отсоса  $v_0 \sim (-x)^{-3/8}$ , либо ликвидировать первопричину – сингулярность в распределении давления с помощью отсоса невязкой жидкости с конечной скоростью  $v_0 \sim (-x)^{1/4}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Verh. d. III Intern. Math. Kongr. Heidelberg, 1904. Leipzig: Teubner, 1905. S. 484–491.
2. Бетяев С.К. Структура ламинарного пограничного слоя с распределенным отсосом // ПМТФ. 1984. № 5. С. 97–104.
3. Бетяев С.К. Математические модели в задачах истечения // Мат. моделирование. 1992. Т. 4. № 3. С. 28–39.
4. Schlichting H. Boundary layer theory. N.Y.: McCraw–Hill, 1979. 817 p.
5. Laminar boundary layers. Ed. L. Rosenhead. Oxford: Clarenton Press, 1963. 687 p.
6. Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит, 1997. 512 с.
7. Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик.В., Королев Г.Л. Асимптотическая теория отрывных течений. М.: Наука, 1987. 255 с.
8. Бетяев С.К. Топология двумерных автомодельных движений // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 7. С. 1081–1095.
9. Imai I. Discontinuous potential flow as the limiting form of the viscous flow for vanishing viscosity // J. Phys. Soc. Japan. 1953. V. 8. № 3. P. 399–402.
10. Hönl H., Maue A.W., Westpfahl K. Theorie der Beugung. Berlin: Springer, 1961. 218 p.
11. Рубан А.И. Численный метод решения задачи о свободном взаимодействии // Учен. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 2. С. 45–51.
12. Watson E.J. The asymptotic theory of boundary-layer flow with suction // Aeronaut. Res. Council. Reports and Memoranda, 1947. № 2619. P 1–45.

Москва  
zharov@tsagi.rssi.ru

Поступила в редакцию  
15.V.2001