

УДК 533.697.4

© 2002 г. А.Н. КРАЙКО, Е.В. МЫШЕНКОВ, К.С. ПЬЯНКОВ,
Н.И. ТИЛЛЯЕВА**ВЛИЯНИЕ НЕИДЕАЛЬНОСТИ ГАЗА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ
СОПЕЛ ЛАВАЛЯ С ВНЕЗАПНЫМ СУЖЕНИЕМ**

В приближении уравнений Рейнольдса, дополненных дифференциальной моделью турбулентности, исследовано течение в соплах Лавалья с внезапно сужающейся дозвуковой частью нулевой длины и в соплах с плавными входными частями. Установлено, что влияние вязкости не ведет к отрывам в окрестности минимального сечения оптимальных сопел с внезапным сужением, а их тяга при увеличившемся по сравнению с идеальным (невязким) течением расходе во всех рассчитанных примерах превышала тягу сопел с плавным сужением и с также оптимально спроектированными сверхзвуковыми частями.

Ключевые слова: сопла Лавалья, турбулентность, дифференциальные модели, вязкие течения, профилирование.

В [1] в приближении идеального газа в качестве оптимальных (реализующих максимум тяги при заданной длине всего сопла, а не только его сверхзвуковой части) исследованы сопла, отличающиеся от сопел традиционной формы заменой плавно сужающейся входной части внезапным сужением. Благодаря этому длина сверхзвуковой части увеличивается до максимально возможной величины. При сохранении расхода за счет увеличения площади минимального сечения это вместе с положительным влиянием неравномерности потока в окрестности звуковой линии на критический удельный импульс [2] обеспечивает преимущество таких сопел над традиционно используемыми соплами с плавным сужением.

Внезапное сужение и следующий за ним излом могут при наличии вязкости приводить к отрыву сверхзвукового потока, изменяя его структуру и как следствие – тягу сопла. К тому же на примыкающем к излому участке оптимальной в идеальном приближении образующей сначала сужающейся, а затем расширяющейся сверхзвуковой части был обнаружен значительный рост давления – условие казалось бы неизбежного отрыва пограничного слоя. В [1] предложен нереализованный в полном объеме способ предотвращения отрыва введением запрета роста давления на примыкающей к излому сверхзвуковой части оптимального контура. В такой модифицированной постановке участок роста давления следовало заменить участком его постоянства. В примерах, построенных в [1], упомянутая выше "неполная реализация" состояла в том, что давление на таких участках было недостаточно велико, чтобы исключить его рост ниже по потоку. В случаях, когда исходная задача (без ограничения на рост давления) имеет решение, выполненная ниже полная реализация постановки с невозрастанием давления, как и ее частичная реализация в [1], показала пренебрежимо малое уменьшение тяги. Кроме того, оказалось, что в исходной задаче использованное в [1] "непрерывное решение" во многих случаях должно быть заменено "разрывным безударным" [3, 4] с фокусировкой S^- -характеристик, идущих от начального сверхзвукового участка оптимальной образующей, в начальной точке "экстремальной" S^+ -характеристики. Ниже во всех подобных случаях удалось построить оптимальные решения без возрастания давления.

Для выявления влияния вязких эффектов на тяговые характеристики сопел с внезапным сужением и тепловые потоки к стенкам было проведено численное моделирование течения вязкого газа в них, а также в сравниваемых с ними традиционных соплах с плавным сужением. Идеальное и вязкое течения в соплах с внезапным сужением рассчитывались при трех типах сверхзвуковых контуров: оптимальных, близких к оптимальным (с начальным участком постоянного давления) и оптимальных при равномерном звуковом потоке в начальном сечении. Оптимальные контуры расширяющихся частей сопел с плавным сужением строились с изломом и без излома в их начальных точках. Излом запрещался заданием минимально допустимого радиуса кривизны искомого контура.

Для сравниваемых сопел расчет всего поля течения велся в рамках полных уравнений Рейнольдса, дополненных дифференциальной моделью турбулентности [5]. Применявшиеся разностные сетки, сгущались вблизи стенок, излома и в зоне, примыкающей к точке торможения, позволяя достаточно аккуратно разрешать особенности потока, вязкого вблизи стенок и практически невязкого в "ядре". Во всех рассчитанных примерах отрыв за точкой излома отсутствовал. Для контуров с участками роста давления, построенных в рамках исходной постановки, такой результат, на первый взгляд, представляется неожиданным. Его, однако, можно объяснить, если учесть, что используемые в приближении пограничного слоя комбинации параметров, определяющие возникновение или отсутствие отрыва ("критерии отрыва") [6], пропорциональны его толщине вытеснения в турбулентном случае (или ее квадрату – в ламинарном). Из-за разгона потока при подходе к излому вдоль вертикальной стенки толщина пограничного слоя уменьшается практически до нуля так, что за изломом начинает расти новый пограничный слой [7–11]. Поэтому на примыкающем к излому участке роста давления толщина вытеснения настолько мала, что соответствующий критерий не достигает величины, необходимой для возникновения отрыва.

1. Математическая модель и стратегия решения. Для расчета сложных течений с пограничными слоями, отрывными зонами, пучками волн разрежения и ударными волнами применяются два способа адаптации сетки. Первый способ – использование автоматически подстраивающейся под особенности течения неструктурированной сетки – требует минимального контроля за ходом расчета, что и обеспечивает его популярность. Недостатки этого способа состоят в сложности алгоритма измельчения сетки, в больших накладных расходах на обработку связей между ячейками, в трудности векторизации вычислительного процесса и невозможности в рамках существующих алгоритмов сильного измельчения сетки только в одном направлении. Последнее порождает избыточное количество узлов и большую схемную вязкость в пограничных слоях в широком смысле этого термина.

Во втором способе расчетная область разбивается на блоки простой формы с регулярной сеткой в каждом из них. Адаптация, ручная или автоматическая, здесь возможна путем подстраивания сторон блоков к особенностям решения, однако в целом это более трудоемкая методика. Кроме того, ее недостатками являются сложность сопряжения блоков с целью обеспечения зачастую противоречивых требований адаптации сетки к особенностям течения и частое появление блоков с избыточной дискретизацией. К достоинствам такого подхода следует отнести относительную простоту программ и процедур распараллеливания вычислительного процесса по блокам и векторизации внутри них, обеспечение теоретического порядка аппроксимации разностной схемы и, что особенно важно, возможность применения сетки с ячейками, сильно сжатыми поперек пограничных и ударных слоев. Наряду с уменьшением требуемого числа узлов возможность выстраивания линий сетки вдоль этих слоев снижает схемную вязкость.

Большое внимание, уделяемое в настоящее время алгоритмам с неструктурируемыми сетками, обусловлено стремлением сделать возможным расчет сложных газодинамических течений при минимальном (в идеале – нулевом) участии квалифицированного вычислителя-газодинамика. При всей заманчивости подобного стремления есть

серьезные основания усомниться в его своевременной осуществимости на широко распространенных персональных компьютерах. Действительно, практически любое сложное течение буквально напиговано пограничными и энтропийными слоями на обтекаемых поверхностях, зонами смешения и размазанными при сквозном счете (а при работе с неструктурированными сетками возможен только он) ударными волнами. Главная особенность таких слоев – резкое изменение параметров поперек слоя и медленное – вдоль. Любая же неструктурированная сетка, реагируя на поперечные градиенты, неизбежно практически также измельчает слой в продольном направлении. Результат – избыточность узлов и многократно завышенные требования к вычислительным мощностям, необходимым для решения задачи. С учетом этого, здесь используются структурированные сетки с разбиением расчетной области на блоки при ручном сгущении узлов в разных направлениях.

В цилиндрических координатах x, y, ϕ полная система уравнений Рейнольдса, замкнутая однопараметрической дифференциальной моделью турбулентности [5], для осесимметричного незакрученного потока имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} yU + \frac{\partial}{\partial x} y(A + A') + \frac{\partial}{\partial y} y(B + B') + G = 0$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho v^T \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho Hu \\ \rho v^T u \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho Hv \\ \rho v^T v \end{pmatrix}, \quad G = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p + 2\mu \frac{v}{y} + \lambda \Delta V \\ 0 \\ P - D \end{pmatrix}$$

$$A' = - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla V \\ \mu \sigma \\ 2\mu u \frac{\partial u}{\partial x} + \mu u \sigma + \lambda u \nabla V + k \frac{\partial T}{\partial x} \\ \rho(v + v^T) \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad B' = - \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \sigma \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \nabla V \\ 2\mu v \frac{\partial v}{\partial y} + \mu v \sigma + \lambda v \nabla V + k \frac{\partial T}{\partial y} \\ \rho(v + v^T) \frac{\partial v^T}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial yv}{\partial y}, \quad \sigma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$p = (\kappa - 1) \rho \left(E - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right) = (\kappa - 1) \rho c_v T$$

$$H = E + \frac{p}{\rho}, \quad \text{Pr} = 0.71, \quad \lambda = -\frac{2}{3} \mu$$

$$\mu = \rho(v + v_t), \quad k = c_p \rho \left(\frac{v}{\text{Pr}} + \frac{v_t}{\text{Pr}_t} \right), \quad v = v_0 \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{0.76}, \quad v_t = v^T f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}$$

$$\chi = \frac{v^T}{v}, \quad P = c_{b1} S^T v^T + \frac{c_{b2}}{\sigma_t} (\nabla v^T)^2, \quad D = c_{w1} f_w \left(\frac{v^T}{d} \right)^2, \quad S^T = S + \frac{v^T}{\kappa^2 d^2} f_{v2}$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r), \quad r = \frac{v^T}{S^T \kappa^2 d^2}$$

$$c_{b1} = 0.1355, \quad \sigma_t = 2/3, \quad c_{b2} = 0.622, \quad c_{w1} = c_{b1} \kappa^{-2} + (1 + c_{b2}) \sigma^{-1} \\ c_{w2} = 0.3, \quad c_{w3} = 2, \quad c_{v1} = 7.1, \quad \kappa = 0.41, \quad Pr_t = 0.9$$

Здесь ρ – плотность, u и v – x - и y -компоненты вектора скорости $\mathbf{V}$, E – удельная полная энергия, T – абсолютная температура, p – давление, H – полная энтальпия, κ – показатель адиабаты, c_p и c_v – удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме, ν – коэффициент ламинарной кинематической вязкости, ν^T – параметр модели турбулентности, функционально связанный с коэффициентом турбулентной кинематической вязкости ν_t , P и D – источниковые члены в уравнении для ν^T , задающие его генерацию и деструкцию, S – модуль завихренности и d – расстояние до стенки.

Уравнения интегрировались по времени конечно-разностным методом второго порядка типа ENO в варианте, близком к схеме [12]. Течение в сопле с внезапным сужением имеет довольно сложную структуру. Для адекватного разрешения его деталей, критичных в плане учета вязких эффектов, был развит достаточно общий подход [13], допускающий разбиение расчетной области на блоки четырех- или треугольной формы с криволинейными границами. Внутри блока сетка строилась посредством интерполяции. Вдоль каждой из границ блока возможно заданное сгущение сетки, что обеспечивало необходимую гибкость при описании областей сложной формы.

Другой положительный эффект используемого подхода – возможность адаптации сетки к решению, поскольку разница в масштабах улавливаемых явлений может достигать до 6 порядков (особенно в турбулентном пограничном слое). Простая адаптация вдоль поверхности тела бесполезна в случаях, как правило, треугольных отрывных областей. Цель адаптации – минимизировать искусственную вязкость по диагонали к линиям сетки и обеспечить необходимое разрешение в слоях с большими поперечными градиентами. Это достигалось размещением указанных слоев в группах блоков с сеткой, сгущенной поперек подобных слоев. Программа предоставляет широкие возможности ручной и автоматической адаптации сетки к решению для повышения точности расчета. С помощью стандартного графического оборудования можно, передвигая границы блоков, подстраивать их под решение.

Расчет состоял из циклического повторения трех этапов. На первом установлении по времени решались уравнения Рейнольдса, на втором сетка вручную подстраивалась к решению. Третий этап – интерполяция результатов со старой сетки на новую. Запуск второго этапа осуществлялся в необходимый момент параллельно с первым, не вызывая простоев процессора. Такая технология эффективна при расчете медленно сходящегося стационарного решения. Для ускорения счета применялись: 1) выбор шага по времени из критерия устойчивости посредством задания числа Куранта (для явной схемы не больше 1); 2) задание неявного алгоритма для всей области или ее отдельных блоков, что целесообразно при расчете блоков, содержащих тонкие пограничные слои, и 3) задание алгоритма глобальных итераций в блоках преимущественно сверхзвукового течения. Допускается счет с локальным шагом по времени, который выбирается согласно критерию устойчивости, и с блочными шагами, отличающимися для разных блоков.

Расчеты проводились с использованием 17 блоков. В невязком ядре блоки содержали 64 поперечных ячейки. В направлении потока на дозвуковую часть сопла приходилось около 60 ячеек, а на его сверхзвуковые части – 128, 192, 256 и 256 ячеек для сопел с полной длиной $X = 10, 15, 20$ и 25 соответственно. За линейный масштаб взята размерная ордината y_a° точки излома a – ближайшей к оси симметрии точки торца, образующего внезапное сужение. Ордината точки излома и цилиндрическая дозвуковая часть одинаковы у всех сопел с внезапным сужением. Поэтому безразмерная ордината излома $y_a = 1$. Ордината цилиндрического, непрофилируемого и не входящего в длину X сравниваемых сопел дозвукового канала $Y = 1.5y_a = 1.5$. Величины с индексом "°" – размерные, а без него – безразмерные.

Пограничный слой на всем своем протяжении заключен в последовательность блоков с сильным сжатием сетки по направлению к стенке. Число ячеек в этих блоках в поперечном направлении равно 40. Поэтому поперечное сжатие приводит к тому, что центр первой ячейки находится на расстоянии d_1^0 от стенки, таком, что $y_1^+ = d_1^0 (\tau_w^0 / \rho_w^0)^{1/2} / v_w^0 = 5-100$, где τ_w^0 , ρ_w^0 и v_w^0 – напряжение касательного трения, ρ^0 и v^0 на стенке. Если перемасштабировать y_1^+ , взяв, как во всей задаче, за масштаб длины y_a^0 , то типичные значения этой переменной будут равны $10^{-5}-10^{-6}$. Для обеспечения адекватного расчета трения и теплового потока к стенке в широком диапазоне значений $y_1^+ = 0-10^3$ использовался усовершенствованный закон стенки в виде двух трехпараметрических таблиц зависимостей трения и теплового потока от безразмерных комплексов параметров в центре первой ячейки: $Re_1 = \rho_1^0 u_1^0 y_1^0 / \mu_1^0$, T_1/T_w и $(\kappa - 1)M_1^2$.

2. Результаты расчета. Расчеты течения в сопле с внезапным сужением проводились при следующем наборе определяющих параметров: показателях адиабаты $\kappa = 1.165$ и 1.4 ; начальной температуре торможения в ядре потока $T_0^0 = 3800$ К, температуре стенки $T_w^0 = 800$ К и числе Рейнольдса $Re = u_k^0 y_a^0 / v_0^0 = 1.733 \cdot 10^6$, где v_0^0 – кинематическая вязкость изэнтропически заторможенного потока, а u_k^0 – скорость одномерного потока в цилиндрическом канале. На входной расчетной границе, отодвинутой от сечения торца на расстояние Y , в окрестности цилиндрической стенки задавался турбулентный пограничный слой, профиль которого соответствовал линейному числу Рейнольдса $Re_x = 2.6 \cdot 10^6$.

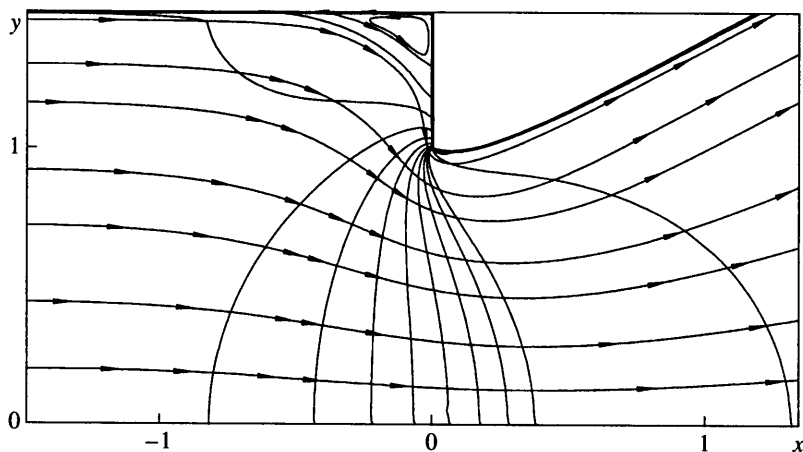
Картина течения в дозвуковой части сопла с внезапным сужением для каждого κ одинакова для всех вариантов параметров (фиг. 1). Перед сужением имеется небольшая относительно размеров цилиндрической части отрывная область. Для адекватного разрешения отрывной области в нее помещался треугольный блок с треугольными ячейками, а оторвавшийся пограничный слой помещался в четырехугольный блок с четырехугольными ячейками. Область присоединения покрывалась другим треугольным блоком, а окрестность точки отрыва – прямоугольным блоком. Его введение обеспечивало плавное сопряжение блоков с присоединенным и с оторвавшимся пограничными слоями, позволяя адекватно разрешать детали отрывного течения.

Для одного из примеров картина течения во всем сопле показана на фиг. 2, распределения давления p/p_* , коэффициента трения c_f и числа Стантона St вдоль боковой цилиндрической стенки его дозвуковой части – на фиг. 3, а вдоль торца – на фиг. 4. На фиг. 1 и 2 изомахи слева от легко узнаваемой звуковой линии нарисованы через $\Delta M = 0.1$, а справа – через $\Delta M = 1$. Звездочка метит критические величины в ядре потока на входе в сопло. Коэффициент c_f и число Стантона St определены равенствами

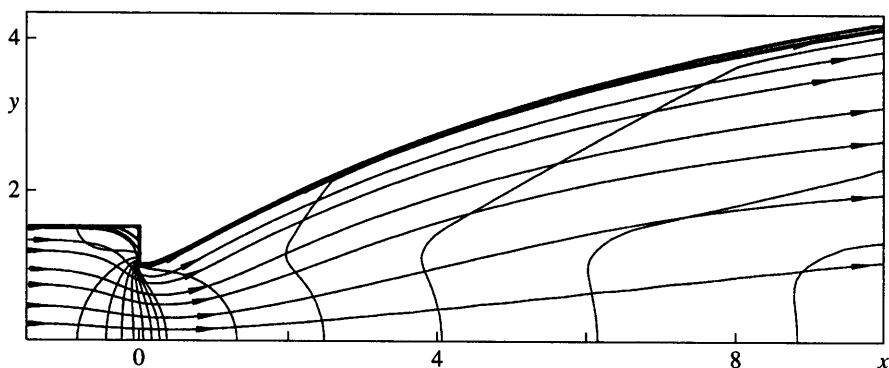
$$c_f = \frac{2\tau_w^0}{\rho_* a_*^3}, \quad St = \frac{q_w^0}{\rho_* a_*^3 (H_w^0 - H_0^0)}$$

где τ_w^0 и q_w^0 – касательное напряжение трения и тепловой поток к стенке, ρ_* и a_* – критические плотность и скорость, H_0^0 и H_w^0 – полные энтальпии газа в невязком ядре и при температуре стенки.

Вдоль торца толщина пограничного слоя быстро уменьшается из-за ускорения потока до звуковой скорости. В эксперименте такое ускорение нередко сопровождается ламинаризацией пограничного слоя. Модель турбулентности [5] воспроизводит явление ламинаризации следующим образом – вследствие уменьшения поперечного разме-



Фиг. 1. Линии тока и изомахи на начальном участке сопла ($\alpha = 1.4, X = 10$)

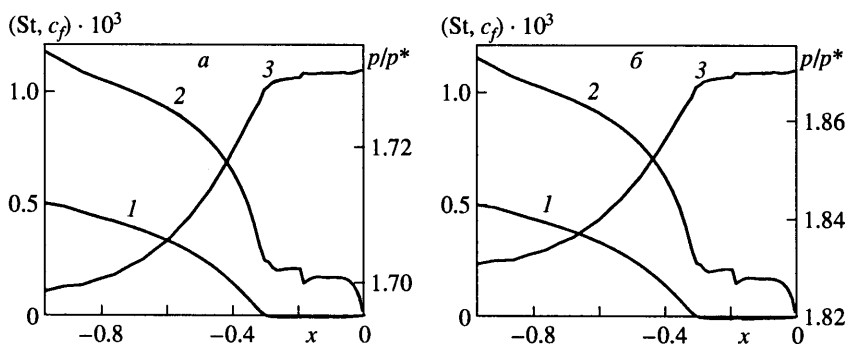


Фиг. 2. Линии тока и изомахи во всей расчетной области ($\alpha = 1.4, X = 10$)

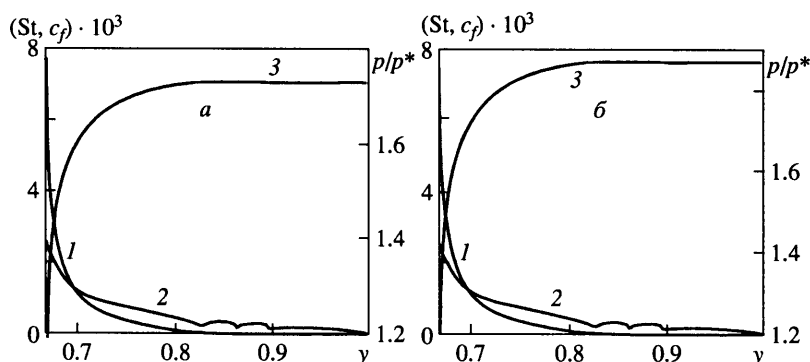
ра деструктивный член, обратно пропорциональный квадрату расстояния до стенки, становится преобладающим над порождающим членом. Из-за этого при приближении к излому величины турбулентной и ламинарной вязкостей становятся близкими. В области примыкания тепловой поток несколько больше в сравнении с областью отрыва, однако самый теплонапряженный участок примыкает к излому, где тепловой поток вчетверо больше, чем на боковой цилиндрической стенке.

В окрестности излома использовались два четырехугольных блока, каждый из которых имел вырожденную сторону, стянутую в излом. Применение такой сетки вызвано необходимостью разрешения центрированной волны разрежения. В пределах разрешения сетки звуковая линия замыкалась на излом, а пограничный слой, образовавшийся в дозвуковой части сопла, после обтекания излома следует рассматривать как сверхзвуковой слой с завихренностью. Новый пограничный слой формируется от излома, где его толщина практически равна нулю. Соответственно, если один блок с вырожденной стороной разрешает центрированную волну, в которой исчезает старый пограничный слой, то в другом блоке зарождается новый. Такая эволюция течения согласуется с теоретическими моделями, развитыми для обтекания тупого угла потоком, сверхзвуковым вне дозвукового подслоя [7–11, 14].

Типичные распределения коэффициента трения $c_f(1)$, числа Стантона $St(2)$ и давления (3) вдоль стенки сверхзвуковой части сопел приведены на фиг. 5 и 6. Первая из них отвечает оптимальному контуру, спрофилированному (в рамках идеального газа)



Фиг. 3. Распределения параметров вдоль цилиндрической боковой стенки дозвуковой части сопла: 1–3 – c_f , St и p/p^* ($a - \kappa = 1.165$, $b - \kappa = 1.4$)

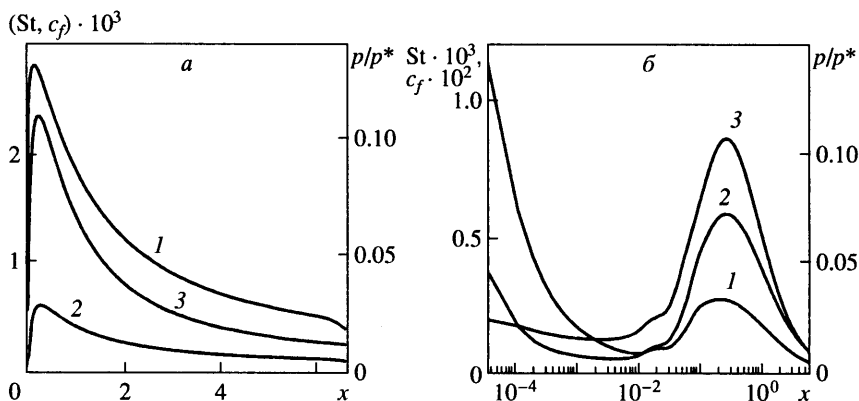


Фиг. 4. Распределения параметров вдоль торца: 1–3 – c_f , St и p/p^* ($a - \kappa = 1.165$, $b - \kappa = 1.4$)

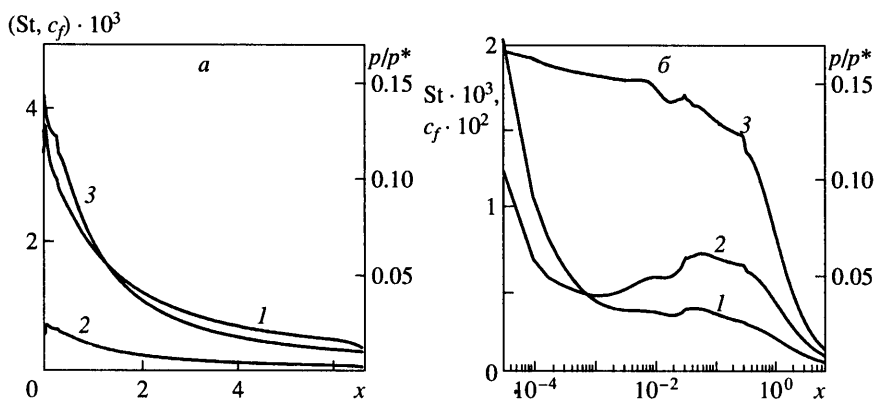
без запрета на рост давления за изломом, а вторая – соплу с запретом на его рост (с полкой давления). В первом случае за изломом на стенке реализуется упоминавшийся выше положительный градиент давления, который может приводить к отрыву пограничного слоя. Однако ни в примере, приведенном на фиг. 5, ни в других из рассчитанных примеров отрыв не наблюдался – коэффициент трения c_f при всех $x > 0$ оставался положительным. Тем более естественно отсутствие отрыва (фиг. 6) для сопел с полкой давления (в идеальном приближении).

Профилирование примыкающих к торцу в точке излома оптимальных сверхзвуковых контуров начиналось с расчета невязкого течения в его до-, транс- и сверхзвуковых частях, образованных цилиндром $y = 1.5$ при $x \leq 0$, торцом $x = 0$ при $1.0 \leq y \leq 1.5$ и выходящим из излома достаточно произвольным участком образующей (например, расширяющимся прямолинейным) при $x \geq 0$. Расчет велся установлением по времени (со своим шагом для разных ячеек) с использованием численного алгоритма и программ [15, 16]. Разностная сетка адаптировалась к интенсивному пучку волн разрежения, возникающему при обтекании излома в точке a . С этой целью сеточные линии одного семейства сходились в указанную точку. Для контроля точности во всем поле течения по результатам установления вычислялись полная энтальпия $H_0 = \kappa p / [(\kappa - 1)\rho] + (u^2 + v^2)/2$ и энтропийная функция $S_0 = p/\rho^\kappa$, точные значения которых при принятом способе обезразмеривания равны $(\kappa + 1)/[2(\kappa - 1)]$ и $1/\kappa$ соответственно. В до- и трансзвуковых областях максимальные отличия H_0 и S_0 от их точных значений не превышали 0.1%.

По найденным установлением полям параметров строилась предельная (приходящая на ось сопла в ту же точку, что и звуковая линия) C^* -характеристика. Дальнейшее



Фиг. 5. Распределения параметров вдоль стенки сопла (а) для $\kappa = 1.165$, $X = 10$, б – то же в полулогарифмическом масштабе: 1–3 – c_f , St и p/p^*



Фиг. 6. Распределения параметров вдоль стенки сопла с полкой давления (а) для $\kappa = 1.165$, $X = 10$, б – то же в полулогарифмическом масштабе: 1–3 – c_f , St и p/p^*

профилирование оптимального контура проводилось методом характеристик с применением условий оптимальности и алгоритмов, развитых в [1, 16, 17]. Сопла с полкой давления строились итерациями. В них получаемая методом характеристик граница участка "струи" $p = \text{const}$, определяющая часть звуковой линии, использовалась при счете установлением, а от найденной установлением замыкающей пучок волн разрежения C^- -характеристики методом характеристик находился начальный участок границы струи. В пределах точности расчетов влияние формы этой границы не сказывалось на расходе газа через построенные сопла.

Найденные в результате расчета геометрические характеристики: расход, тяга, вязкие потери (интеграл вязких сил по поверхности сопла) и другие характеристики сопел, оптимальных при работе в пустоте, приведены в табл. 1 и 2 для $\kappa = 1.165$ и 1.4 соответственно. Расход G и тяга R^G вычислялись по формулам (b – конечная точка профилируемого участка контура ab)

$$G = 2 \int_0^{y_b} y \rho u dy, \quad R^G = 2 \int_0^{y_b} y (\rho u^2 + p) dy$$

где интегралы берутся по сечению $x = X$ выхода из сопла. Удельная тяга $R = R^G/G$. Для сопел с внезапным сужением G совпадает с коэффициентом расхода.

Таблица 1

Сопло	G	y_b	F_b/F_a	$\operatorname{tg} \vartheta_b$	R^G	R	$\Delta R(\%)$	$\Delta R_f(\%)$	R/R_{id}
i10	0.8630	5.49	30.14	0.241	2.4138	2.7972	1.04	0	0.9823
i10p	0.8630	5.45	29.70	0.241	2.4136	2.7970	1.03	0	0.9831
i10u	0.8630	5.64	31.81	0.245	2.4068	2.7889	0.74	0	0.9765
i10s0	0.8630	5.04	28.79	0.248	2.3890	2.7684	0	0	0.9747
i10s0.5	0.8630	4.91	27.40	0.250	2.3816	2.7598	-0.31	0	0.9716
v10	0.8696	5.49	30.14	0.241	2.3968	2.7560	1.21	1.30	0.9679
v10p	0.8692	5.45	29.70	0.241	2.3946	2.7546	1.16	1.31	0.9682
v10u	0.8690	5.64	31.81	0.245	2.3890	2.7491	0.96	1.25	0.9626
v10s0	0.8666	5.04	28.79	0.248	2.3598	2.7230	0	1.32	0.9587
v10s0.5	0.8665	4.91	27.40	0.250	2.3523	2.7146	-0.31	1.35	0.9583
i15p	0.8630	7.50	56.25	0.218	2.5004	2.8976	0.58	0	0.9867
i15u	0.8630	7.63	58.22	0.216	2.4934	2.8892	0.30	0	0.9823
i15s0	0.8630	7.05	56.26	0.216	2.4860	2.8809	0	0	0.9810
i15s0.5	0.8630	6.99	55.43	0.222	2.4806	2.8747	-0.22	0	0.9795
v15p	0.8694	7.50	56.25	0.218	2.4792	2.8513	0.84	1.35	0.9709
v15u	0.8690	7.63	58.22	0.216	2.4692	2.8412	0.48	1.52	0.9660
v15s0	0.8666	7.05	56.26	0.216	2.4504	2.8275	0	1.55	0.9628
v15s0.5	0.8666	6.85	53.32	0.222	2.4450	2.8215	-0.21	1.59	0.9614
i20p	0.8630	9.43	88.92	0.204	2.5530	2.9586	0.32	0	0.9880
i20u	0.8630	9.47	89.68	0.197	2.5479	2.9524	0.11	0.	0.9856
i20s0	0.8630	8.88	89.26	0.196	2.5448	2.9491	0	0	0.9847
i20s0.5	0.8630	8.81	88.10	0.202	2.5406	2.9443	-0.16	0	0.9833
v20p	0.8694	9.43	88.92	0.204	2.5280	2.9081	0.59	1.50	0.9712
v20u	0.8690	9.47	89.68	0.197	2.5198	2.8995	0.30	1.72	0.9680
v20s0	0.8666	8.88	89.26	0.196	2.5052	2.8909	0	1.70	0.9652
v20s0.5	0.8665	8.81	88.10	0.202	2.5010	2.8863	-0.16	1.74	0.9639
i25p	0.8630	11.2	125.4	0.194	2.5902	3.0017	0.17	0	0.9894
i25u	0.8630	11.2	125.4	0.184	2.5868	2.9975	0.03	0	0.9878
i25s0	0.8630	10.6	128.0	0.182	2.5858	2.9966	0	0	0.9869
i25s0.5	0.8630	10.6	126.6	0.186	2.5824	2.9927	-0.13	0	0.9860
v25p	0.8696	11.2	125.4	0.194	2.5614	2.9452	0.32	1.60	0.9707
v25u	0.8692	11.2	125.4	0.184	2.5552	2.9396	0.13	1.86	0.9688
v25s0	0.8666	10.6	128.0	0.182	2.5443	2.9359	0	1.75	0.9669
v25s0.5	0.8665	10.6	126.6	0.186	2.5407	2.9320	-0.13	1.79	0.9660

Первый столбец табл. 1 и 2 дает информацию о модели течения: i – идеальный, v – вязкий газ; о полной длине сопла X : цифры 10, 15, 20 и 25 и о типе сопла. Оптимальные сопла с внезапным сужением и с полкой давления за изломом метит буква "p". Оптимальные сопла без полки давления не имеют дополнительных букв. Сопло с внезапным сужением, но с расширяющейся частью, оптимальной для равномерного звукового потока, метит буква "u". Напомним, что у всех сопел с внезапным сужением $y_a = 1$. У всех сравниваемых сопел ордината цилиндрического, не входящего в полную длину сопла X дозвукового канала $Y = 1.5$.

Сопла с плавным сужением метятся буквой "s". Их сужающиеся участки образованы двумя окружностями радиусов $r_1 = 1$ и $r_2 = 0.5$ и касающимися их отрезком прямой, наклоненной к оси x под углом $\vartheta = -\pi/4$. Окружность радиуса $r_1 = 1$ касается прямой $y = Y = 1.5$. Положение центра второй окружности определялось условием равенства расходов через сопла с плавным и с внезапным сужениями (в приближении идеального газа). Сопла с плавным сужением были двух типов. Оптимальные расширяющиеся участки сопел первого типа присоединялись с изломом образующей к их сужающимся участкам в точке a выхода с них предельной (приходящей в ту же точку оси сопла, что и звуковая линия) S -характеристики. В таблицах у таких сопел

Таблица 2

Сопло	G	y_b	F_b/F_a	$\operatorname{tg}\vartheta_b$	R^G	R	$\Delta R(\%)$	$\Delta R_f(\%)$	R/R_{id}
i10	0.8554	4.19	17.56	0.170	1.9334	2.2600	0.57	0	0.9931
i10p	0.8554	4.17	17.39	0.170	1.9320	2.2584	0.50	0	0.9920
i10u	0.8554	4.34	18.84	0.174	1.9286	2.2541	0.31	0	0.9884
i10s0	0.8554	3.89	17.27	0.177	1.9224	2.2471	0	0	0.9881
i10s0.5	0.8554	3.82	16.73	0.180	1.9198	2.2441	-0.13	0	0.9878
v10	0.8622	4.19	17.56	0.170	1.9280	2.2360	0.83	1.04	0.9826
v10p	0.8612	4.17	17.39	0.170	1.9244	2.2346	0.76	1.07	0.9816
v10u	0.8618	4.34	18.84	0.174	1.9232	2.2316	0.63	0.97	0.9785
v10s0	0.8584	3.89	17.27	0.177	1.9036	2.2177	0	1.25	0.9752
v10s0.5	0.8584	3.82	16.74	0.180	1.8996	2.2129	-0.22	1.27	0.9741
i15	0.8554	5.56	30.91	0.148	1.9684	2.3010	0.28	0	0.9948
i15u	0.8554	5.74	32.95	0.151	1.9648	2.2969	0.10	0	0.9915
i15s0	0.8554	5.30	32.00	0.151	0.9630	2.2946	0	0	0.9913
i15s0.5	0.8554	5.22	31.15	0.152	1.9614	2.2927	-0.08	0	0.9911
v15	0.8622	5.56	30.91	0.148	1.9612	2.2745	0.58	1.19	0.9834
v15u	0.8616	5.74	32.95	0.151	1.9572	2.2714	0.45	1.14	0.9805
v15s0	0.8584	5.30	32.00	0.151	1.9414	2.2613	0	1.43	0.9769
v15s0.5	0.8584	5.22	31.16	0.152	1.9386	2.2585	-0.12	1.46	0.9763
i20	0.8554	6.82	46.51	0.134	1.9888	2.3247	0.17	0	0.9958
i20u	0.8554	7.03	49.42	0.137	1.9856	2.3213	0.02	0	0.9931
i20s0	0.8554	6.58	49.40	0.136	1.9854	2.3208	0	0	0.9929
i20s0.5	0.8554	6.49	48.25	0.137	1.9842	2.3194	-0.06	0	0.9928
v20	0.8622	6.82	46.51	0.134	1.9796	2.2960	0.44	1.31	0.9835
v20u	0.8616	7.03	49.42	0.137	1.9764	2.2935	0.33	1.25	0.9812
v20s0	0.8585	6.58	49.40	0.136	1.9625	2.2860	0	1.53	0.9780
v20s0.5	0.8582	6.49	48.27	0.137	1.9603	2.2843	-0.07	1.57	0.9778
i25	0.8554	8.01	64.16	0.125	2.0022	2.3404	0.11	0	0.9963
i25u	0.8554	8.24	67.90	0.127	1.9994	2.3368	-0.04	0	0.9938
i25s0	0.8554	7.78	69.07	0.126	2.0000	2.3378	0	0	0.9940
i25s0.5	0.8554	7.69	67.61	0.127	1.9990	2.3367	-0.05	0	0.9938
v25	0.8622	8.01	64.16	0.125	1.9918	2.3102	0.34	1.40	0.9835
v25u	0.8616	8.24	67.90	0.127	1.9866	2.3056	0.14	1.65	0.9805
v25s0	0.8585	7.78	69.07	0.126	1.9766	2.3023	0	1.57	0.9789
v25s0.5	0.8583	7.69	67.64	0.127	1.9747	2.3007	-0.07	1.61	0.9785

после "s" стоит цифра "0". У сопел второго типа к сужающейся части в той же точке a плавно примыкал начальный участок их оптимальных сверхзвуковых контуров, образуемый окружностью радиуса $r_2 = 0.5$. Эти сопла, которые метит стоящая после "s" цифра "0.5", отвечают решению вариационной задачи с дополнительным ограничением на минимально допустимый радиус кривизны искомой образующей. По этой причине, по крайней мере в невязком приближении, тяга сопел второго типа меньше тяги сопел первого типа (с меткой "s0").

Наклон контуров сопел в сечении выхода (при $x = x_b = X$) к их оси характеризует величина $\operatorname{tg}\vartheta_b$. Степень расширения F_b/F_a определена как отношение площади выхода к площади начального сечения профилируемого сверхзвукового участка ab . Указанные начальные сечения для всех сопел совпадают с сечением $x = x_a$, которые только для сопел с метками "u" и "s0" одновременно являются сечениями минимальной площади ($F_a = F_m$). Для других сопел $F_a > F_m$, а сечения минимальной площади располагаются справа от точки a .

Приращения удельной тяги ΔR соответственно в идеальном и в вязком приближениях определяются по отношению к удельной тяге R сопел "s0" с плавным сужением и с изломом в точке a . Для идеального газа из сопел с плавным сужением они

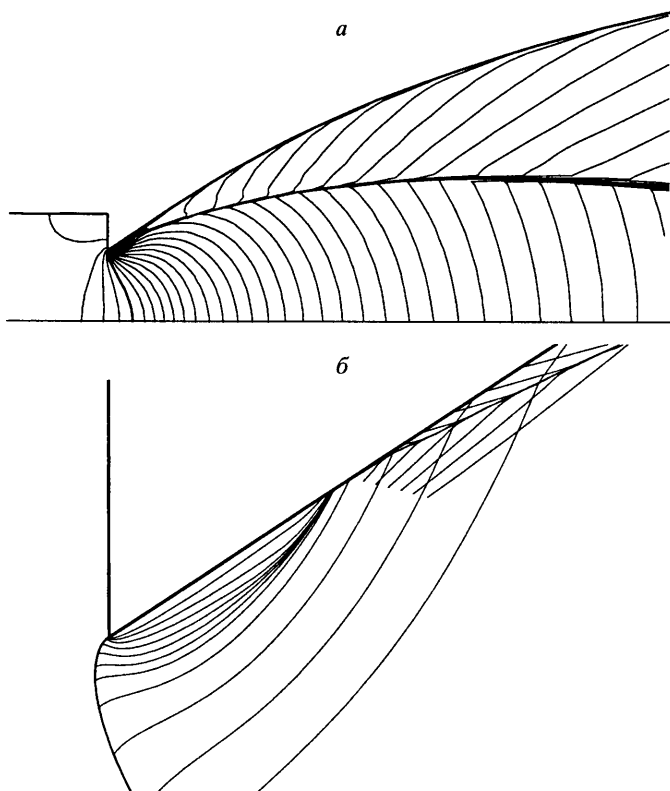
реализуют максимум R . Согласно табл. 1 и 2, такое же преимущество сопел с изломом сохраняется и для вязкого газа. Отрицательный вклад (ΔR_f^G) в тягу осевой компоненты интеграла сил трения по стенкам дают в процентах (отнесенные к R^G) – предпоследние столбцы таблиц. Наряду с этим вязкость оказывает влияние на интегральные характеристики сопел через вытесняющий и "сглаживающий" (см. ниже) эффекты. Принятый способ определения тяги и расхода через соответствующие интегралы в сечении выхода из сопла учитывает суммарное воздействие всех этих эффектов. Информацию о всех потерях удельной тяги R дает приведенное в последнем столбце таблиц ее отношение к соответствующей идеальной величине R_{id} . Здесь R_{id} – удельная тяга сопла Лаваля, реализующего на выходе при тех же F_b/F_a равномерный поток идеального газа.

Во всех рассчитанных примерах уменьшение удельной тяги из-за неидеальности газа для сопел с плавным сужением оказалось большим, чем для сопел с внезапным сужением. Последнее в основном связано со сглаживающим влиянием вязкости, более сильным для сопел с внезапным сужением. Указанное влияние вносит положительный вклад и в расход G , и в тягу R^G . Хотя суммарное изменение R^G из-за трения для всех сопел, естественно, оказалось отрицательным, преимущество по удельной тяге R сопел с внезапным сужением при учете вязкости получается большим, чем в приближении идеального газа. Благодаря этому заметно увеличиваются тяга R^G и в несколько меньшей степени расход G . В результате преимущество сопел с внезапным сужением по удельной тяге у всех сопел увеличивается. Так, при работе в пустоте для $\kappa = 1.4$ при полных длинах сопла (отнесенных к радиусу отверстия в торце) $X = 10, 15, 20$ и 25 превышения ΔR тяги лучшего (без участка $p = \text{const}$) сопла с внезапным сужением над тягой традиционного сопла с плавным входом и точкой излома в минимальном сечении в приближении идеального газа получились равными $0.57, 0.28, 0.17$ и 0.11% . Для вязкого турбулентного течения соответствующие ΔR возросли до $0.83, 0.58, 0.44$ и 0.34% . Для тех же длин и условий при $\kappa = 1.165$ в приближении идеального газа $\Delta R = 1.04, 0.58, 0.32$ и 0.17% , а при течении в тех же соплах вязкого газа $\Delta R = 1.21, 0.84, 0.59$ и 0.32% . При $\kappa = 1.165$ для $X = 15, 20$ и 25 это – выигрыши сопел с полкой давления.

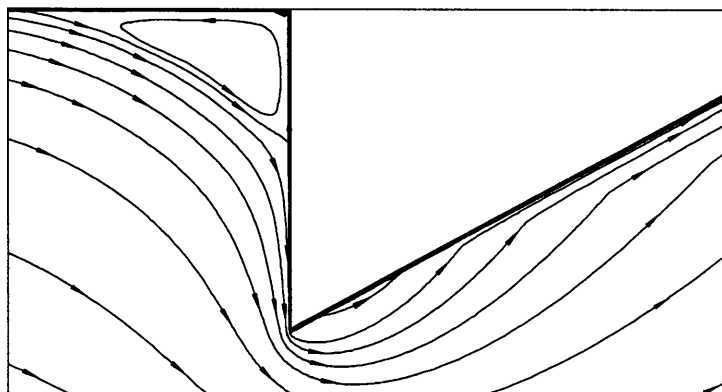
По-видимому, впервые влияние сглаживающего воздействие вязкости на расход сужающихся сопел, в частности сопла с внезапным сужением установлено в [18]. Там увеличение расхода такого сопла было получено без численного интегрирования уравнений Рейнольдса с помощью физически оправданных предположений, позволивших найти изменение толщины вытеснения пограничного слоя при ускоряющемся внешнем потоке и размер отрывной зоны в окрестности точки торможения.

Сравнение сопел с плавным сужением с изломом ("s0") и без излома ("s0.5") в точке a обнаруживает заметное преимущество сопел с изломом. В приближении идеального газа для $\kappa = 1.165$ и полных длинах $X = 10, 15, 20$ и 25 соответствующие отрицательные приращения удельной тяги $\Delta R = -0.31, -0.22, -0.16$ и -0.13% . Для $\kappa = 1.4$ и тех же длинах $\Delta R = -0.13, -0.08, -0.06$ и -0.05% . Учет вязкости не меняет приведенные величины для $\kappa = 1.165$ и слегка увеличивает для $\kappa = 1.4$.

Для нескольких длин контуры сопел с внезапным сужением строились как с участком $p = \text{const}$ в начале сверхзвуковой образующей, так и без такого участка. В этих примерах различие тяг при $\Delta R \approx 0.5\text{--}1\%$ не превышает 0.07% . Отмеченные буквой "u" сопла с внезапным сужением, но с расширяющейся частью, оптимальной для равномерного звукового потока, в обоих приближениях оказались на $0.11\text{--}0.36\%$ хуже сопел, спроектированных с учетом реальной неравномерности. Однако с учетом вязкости они во всех рассчитанных примерах обеспечивали заметное увеличение тяги. Как видно из таблиц, учет начальной неравномерности важнее для $\kappa = 1.165$. Здесь удельные тяги R сопел с неправильно (без учета реальной неравномерности трансзвукового потока) спроектированными сверхзвуковыми контурами получились



Фиг. 7. Изомахи (а) и C^+ - и C^- -характеристики в окрестности точки излома (б) для контура, построенного от прямой звуковой линии



Фиг. 8. Линии тока вязкого течения в окрестности излома для контура, построенного от прямой звуковой линии

на 0.20–0.36% меньше R сопел с участками $p = \text{const}$. При этом κ и $X \geq 15$ оптимальные сопла без участков $p = \text{const}$ не строились из-за отсутствия алгоритма нахождения так называемого "безударного разрывного" решения с фокусировкой C^- -характеристик [6, 7]. Для $\kappa = 1.4$ аналогичные величины составили 0.11–0.20%, причем в отличие от $\kappa = 1.165$ – по отношению к наилучшим соплам (оптимальным без введения участка $p = \text{const}$).

То, что сопла с внезапным сужением при неправильно спрофилированных сверхзвуковых участках оказались лучше плавно сужающихся, удивительно, особенно в свете отличия структуры потока в них от получающейся при прямой звуковой линии. Пример такой рассчитанной установлением структуры для течения идеального газа ($\kappa = 1.4$, $X = 10$) приведен на фиг. 7. По сгущениям изомах (фиг. 7, а, $\Delta M = 0.2$) виден интенсивный скачок, который зарождается из-за пересечения C^+ -характеристик (фиг. 7, б с C^+ - и C^- -характеристиками, скачками и с участками стенки и звуковой линии) и после отражения от стенки распространяется вниз по потоку. При учете вязкости в этих соплах появляются зоны отрыва (фиг. 8). При равномерном звуковом потоке слева от приходящей в точку b замыкающей C^+ -характеристики скачки в оптимально спрофилированных соплах отсутствуют.

Заключение. С учетом вязкости преимущество по удельной тяге R сопел с внезапным сужением получается большим, чем по результатам идеальных расчетов. Сопла с внезапным сужением, но с расширяющейся частью, оптимальной для равномерного звукового потока, как в идеальном, так и в вязком приближениях хуже сопел, спрофилированных с учетом реальной неравномерности транзвукового потока. Однако при учете вязкости во всех рассчитанных примерах они обеспечивали заметное превышение удельной тяги по сравнению с соплами с плавным входом. То, что сопла с внезапным сужением при неправильно спрофилированных сверхзвуковых участках оказались лучше плавно сужающихся, удивительно в свете отличия структуры потока в них (наличия интенсивных скачков и отрывов) от получающейся при прямой звуковой линии. Эффекты разных способов профилирования больше для $\kappa = 1.165$, чем для $\kappa = 1.4$. Учет вязкости увеличивает и преимущества правильно спрофилированных сопел, и недостатки неправильно спрофилированных.

Авторы признательны Л.Е. Стернину за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 96-15-96158, 99-01-01211 и 00-15-99039).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Щербаков С.А. Сравнение интегральных характеристик и формы профилированных контуров сопел Лаваля с "плавным" и с "внезапным" сужениями // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 129–137.
2. Крайко А.Н., Соколов В.Е. Об удельном импульсе потока в минимальном сечении сопла Лаваля и в выходном сечении сужающегося сопла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 1. С. 186–188.
3. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
4. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 231 с.
5. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // La Recherche Aerospatiale. 1994. № 1. P. 5–21.
6. Бам-Зеликович Г.М. Расчет отрыва пограничного слоя // Изв. АН СССР. ОН. 1954. № 12. С. 68–85.
7. Нейланд В.Я., Сычев В.В. Асимптотические решения уравнений Навье-Стокса в областях с большими локальными возмущениями // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 4. С. 43–49.
8. Нейланд В.Я. К асимптотической теории расчета тепловых потоков около угловой точки тела // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 5. С. 53–60.
9. Нейланд В.Я. К асимптотической теории взаимодействия сверхзвукового потока с пограничным слоем // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 4. С. 41–47.
10. Нейланд В.Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 125 с.
11. Нейланд В.Я. Асимптотическая теория отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // Успехи механики. 1981. Т. 4. Вып. 2. С. 3–62.

12. *Копченков В.И., Крайко А.Н.* Монотонная разностная схема второго порядка для гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1983. Т. 23. № 4. С. 848–859.
13. *Мышенков Е.В., Мышенкова Е.В.* Расчет донных и боковых отрывных течений с применением адаптированной к решению сетки // Тезисы XI Международной конф. по вычислительной механике и современным прикладным средствам. Истра. М.: Изд. МАИ, 2001. С. 265–267.
14. *Ашратов Э.А., Соркин Л.И.* Обтекание внешнего угла вязким сверхзвуковым потоком // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 4. С. 165–168.
15. *Крайко А.Н., Пьянков К.С.* Построение профилей и мотогондол, суперкритических в околосзвуковом потоке идеального газа // Журн. вычис. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. № 12. С. 1890–1904.
16. *Крайко А.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Построение сверхзвуковой части тарельчатого сопла при неравномерном трансзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 4. С. 145–157.
17. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Оптимальное профилирование контура сверхзвуковой части тарельчатого сопла // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 6. С. 172–184.
18. *Тагиров Р.К.* Влияние пограничного слоя на расход и удельный импульс сужающегося сопла // Изв. вузов. Авиац. техника. 1988. № 1. С. 77–81.

Москва
E-mail:akraiko@ciam.ru

Поступила в редакцию
18.XII.2001