

УДК 533.6.011.5:532.526

© 2002 г. Р.К. ТАГИРОВ

АПРОКСИМАЦИЯ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ВЫСОТЫ ТОРЦА КОРМОВОЙ ЧАСТИ ДВУМЕРНОГО ТЕЛА

На основе анализа имеющихся экспериментальных и расчетных данных получены аппроксимационные соотношения для определения донного давления за торцом двумерного тела при числах M набегающего потока 0–4 и относительных толщинах турбулентного пограничного слоя 0– ∞ . С использованием этих соотношений определены оптимальные контуры кормовой части плоского тела, дающие максимальную тягу. Высоты донного торца h этих контуров получены для производных длин кормовой части и толщин пограничного слоя при $M = 1-4$.

Ключевые слова: турбулентный пограничный слой, донный торец, донное давление, дозвуковые и сверхзвуковые потоки, оптимальная кормовая часть двумерного тела, оптимальная высота донного торца.

1. При решении ряда технических задач возникает необходимость оценки величины донного давления за торцом двумерного тела, обтекаемого дозвуковым или сверхзвуковым потоком газа. Для этой цели удобно использовать аппроксимационные соотношения.

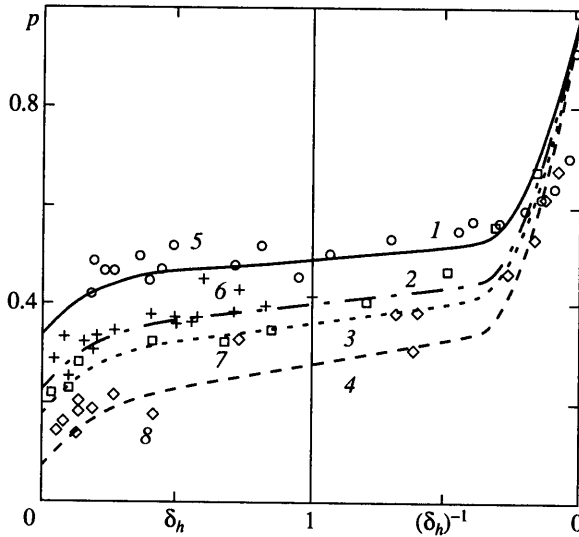
Анализ расчетных данных [1] показывает, что основными влияющими параметрами на донное давление p являются число M набегающего потока и относительная толщина пограничного слоя $\delta_h = \delta/h$, где h – высота донного торца. Здесь p считается отнесенным к статическому давлению набегающего потока p_∞ . Остальные факторы, такие, как число Рейнольдса, показатель степени профиля скорости начального пограничного слоя n , показатель адиабаты k , влияют слабо, и ими можно пренебречь.

Обтекание торца рассматривается при отсутствии тепловых потоков, химических реакций, вдува и отсоса газа в донной области.

Основные аппроксимационные соотношения определяются для угла наклона стенки перед торцом $\theta = 0$. Однако, как будет показано ниже, с их помощью можно найти величину донного давления при $M > 1$ и для $\theta \neq 0$.

На основе совместного анализа экспериментальных данных, опубликованных в 1956–1969 гг. (Sirieix M., Hastings R.S., Fuller L., Reid J., MacDonald H., Nash J.E., Vadninarayanan M.A., Beheim M.A., Тимошин А.И. и др.), принимается следующая схема изменения донного давления.

При заданном числе M кривая зависимости донного давления от толщины пограничного слоя δ_h имеет три характерные области (фиг. 1). В первой области наблюдается относительно быстрое увеличение донного давления p в зависимости от δ_h . Этот рост происходит от значения p_0 , соответствующего $\delta_h = 0$, до p_1 при $\delta_h = \delta_{h1}$. Во второй области наблюдается медленный, практически линейный рост p от p_1 до значения p_2 при $(\delta_h)^{-1} = (\delta_{h2})^{-1}$. В третьей области опять имеет место быстрый рост p от p_2 до значения 1 при $(\delta_h)^{-1} = 0$. В связи с этим для аппроксимации донного давления в областях 1 и 3 используются уравнения квадратной параболы, а в области 2 –



Фиг. 1. Сравнение рассчитанных значений донного давления p (1–4) с экспериментальными данными (5–8) для $M = 1.5, 2, 2.25, 3$ и относительных толщин начального турбулентного пограничного слоя $\delta_h = 0 - \infty$

уравнение прямой. Вначале, на основе расчетов [1], вводятся две базовые зависимости p от $1 \leq M \leq 4$ для $\delta_h = 0$ и 1 соответственно

$$p_0 = a_0(M-1)^2 + b_0(M-1) + c_0, \quad p_b = a_2(M-1)^2 + b_2(M-1) + c_2$$

Для определения коэффициентов используются рассчитанные по методу [1] значения донного давления: $p_{01} = 0.485, p_{03} = 0.07, p_{04} = 0.01, p_{b1} = 0.6, p_{b3} = 0.28, p_{b4} = 0.23$ соответственно для $M = 1, 3, 4$. С их помощью находятся

$$a_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} p_{04} - p_{03} + \frac{1}{3} p_{01} \right), \quad b_0 = \frac{1}{2} (p_{03} - p_{01} - 4a_0), \quad c_0 = p_{01}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} p_{b4} - p_{b3} + \frac{1}{3} p_{b1} \right), \quad b_2 = \frac{1}{2} (p_{b3} - p_{b1} - 4a_2), \quad c_2 = p_{b1}$$

Далее принимается, что угол наклона φ прямой p_2 относительно δ_h (область 2), т.е. значение производной $b_m = dp_2/d\delta_h$, линейно зависит от числа Маха: $b_m = a_m M$. Из условия, что при $M = 3$ угол $\varphi = 6^\circ$, определяется значение $a_m = 0.035$.

Аппроксимационная формула для области 2 ($\delta_{h1} \leq \delta_h \leq \delta_{h2}$) записывается в виде

$$p_2 = p_b - a_m M(1-z) \tag{1.1}$$

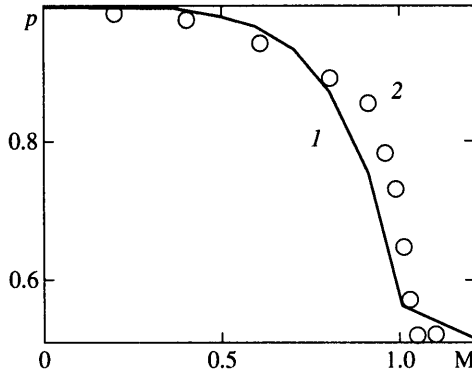
где $z = \delta_h$ при $\delta_h \leq 1$ и $z = 2 - (\delta_h)^{-1}, \delta_h \geq 1$

Формула для области 1 ($0 \leq \delta_h \leq \delta_{h1}$) задана как

$$p_1 = a_1(\delta_h)^2 + b_1\delta_h + c_1 \tag{1.2}$$

Для определения коэффициентов используются граничные условия: при $\delta_h = 0$ принимается $p_1 = p_0$, при $\delta_h = \delta_{h1} - p_1 = p_{h1} = p_2(\delta_{h1}), dp_1/d\delta_h = dp_2/d\delta_h$. В результате находятся

$$a_1 = (\delta_{h1})^{-2} (\delta_{h1} a_m M + p_0 - p_{h1}), \quad b_1 = a_m M - 2a_1 \delta_{h1}, \quad c_1 = p_0$$



Фиг. 2. Сравнение рассчитанных значений донного давления $p(1)$ с экспериментальными данными [2] (2) для $M \leq 1$ и $\delta_h = 0.27$

Аппроксимационная формула для области 3 ($\delta_{h2} \leq \delta_h \leq \infty$) записывается в виде

$$p_3 = a_3(\delta_h)^{-2} + b_3(\delta_h)^{-1} + c_3 \quad (1.3)$$

Коэффициенты определяются с помощью граничных условий: при $\delta_h = \delta_{h2}$ принимаются $p_3 = p_{h2} = p_2(\delta_{h2})$, $dp_3/dz = dp_2/dz$, при $(\delta_h)^{-1} = 0 - p_3 = 1$. В результате получаются

$$a_3 = (\delta_{h2})^2 [1 - p_{h2} - a_m M (\delta_{h2})^{-1}], \quad b_3 = a_m M + 2\delta_{h2}(p_{h2} - 1), \quad c_3 = 1$$

Таким образом, уравнения (1.1)–(1.3) позволяют определить величину донного давления для заданных значений $M = 1-4$, $\delta_h = 0-\infty$.

С их использованием были проведены контрольные расчеты для $M = 1.5, 2, 2.25, 2.4, 3$ с координатами границ областей: $\delta_{h1} = 0.4$ и $\delta_{h2} = 2.5$. Результаты расчета сравниваются на фиг. 1 с экспериментальными данными. На графике значения p приведены в зависимости от δ_h при $\delta_h \leq 1$ и от $(\delta_h)^{-1}$ при $\delta_h > 1$.

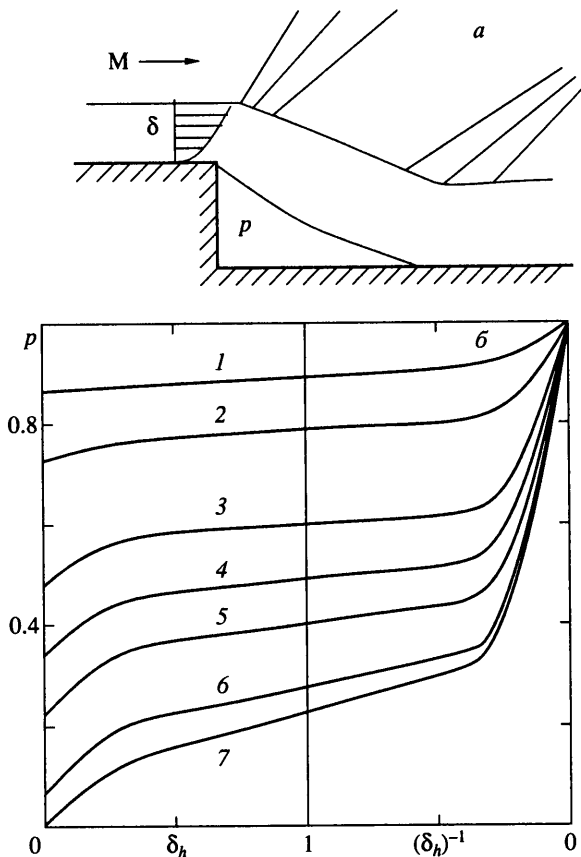
Для оценок донного давления при дозвуковых скоростях потока можно применять аппроксимационные соотношения для p_0 и p_b

$$p_0 = 1 - (1 - p_{01})M^6, \quad p_b = 1 - (1 - p_{b1})M^6$$

С использованием этих соотношений и уравнений (1.1)–(1.3) были проведены контрольные расчеты p для $\delta_h = 0.27$. Они хорошо согласуются с экспериментальными данными [2] (фиг. 2). Схема течения и результаты расчетов для всего исследованного диапазона чисел $0 \leq M \leq 4$ и $0 \leq \delta_h \leq \infty$ даны на фиг. 3 и 4.

Найденные выше соотношения для p соответствуют углу наклона стенки перед торцом $\theta = 0$. Однако при $M > 1$ они позволяют определить величины донного давления и для $\theta \neq 0$. Для этого следует использовать метод перехода к эквивалентному потоку с углом $\theta_q = 0$. Метод основан на использовании модели течения в веере волн разрежения, возникающего у верхней кромки донного торца.

Пусть заданы исходные параметры M , δ_h , θ . Вначале с помощью соотношения Прандтля – Майера определяется угол наклона характеристики эквивалентного потока $v(M_q) = v(M) + \theta$, а затем находится число M_q . Толщина пограничного слоя эквивалентного потока δ_q определяется с помощью метода [3]. В этом методе используется упрощенная схема перехода пограничного слоя через веер волн разрежения. Предполагается, что вдоль каждой характеристики веера профиль скорости пограничного слоя описывается степенным законом, а вдоль каждой струйки тока внутри веера сохраняется постоянным расход. На этой основе выводятся два со-



Фиг. 3. Схема донного течения (а) и рассчитанные зависимости давления p от δ_h (б): 1-7 – $M = 0.8, 0.9, 1, 1.5, 2, 3, 4$

отношения, связывающие толщину δ и показатель n на начальной характеристике веера с соответствующими значениями на рассматриваемой характеристике. Применительно к данному исследованию эти соотношения можно записать в виде

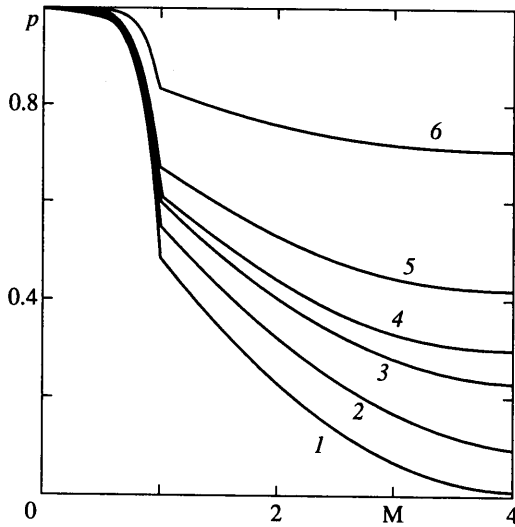
$$c^2 \int_0^1 \frac{\phi^n}{1 - \phi^2 c^2} d\phi = (c_q)^2 \int_0^1 \frac{\phi^{n_q}}{1 - \phi^2 (c_q)^2} d\phi$$

$$\delta_q = \delta \frac{n}{n_q} \frac{c_q}{c} \frac{p_\infty}{p_q}, \quad c = \left[1 + \frac{2}{(k-1)M^2} \right]^{-0.5}$$

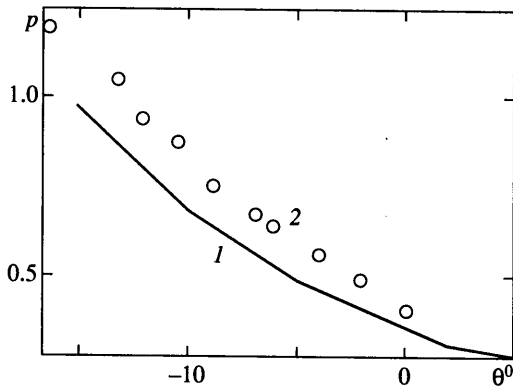
где c_q определяется аналогично c в зависимости от M_q .

Для заданных параметров исходного потока M , δ , n , θ из первого уравнения определяется показатель n_q , из второго – величина δ_q . Давления p_∞ и p_q являются известными функциями M и M_q соответственно. Для пристеночного турбулентного пограничного слоя принимается $n = 7$. С использованием найденных значений M_q и δ_q и соответствующих аппроксимационных соотношений определяется относительная величина донного давления p/p_q . Искомое значение донного давления для заданного угла θ находится по формуле $p = (p/p_q)(p_q/p_\infty)$.

С использованием предложенного метода проведены контрольные расчеты донного давления для $M = 1.86$, $\delta_h = 0.23$ при изменении угла θ от $+5^\circ$ до -15° . Результа-



Фиг. 4. Рассчитанные зависимости донного давления p от чисел M набегающего потока: 1–6 – $\delta_h = 0, 0.2, 1, 2, 4, 10$



Фиг. 5. Сравнение рассчитанных значений донного давления p (1) с экспериментальными данными [4, 5] (2) для $M = 1.86$, $\delta_h = 0.23$ при изменении угла наклона стенки θ от -15 до $+5^\circ$

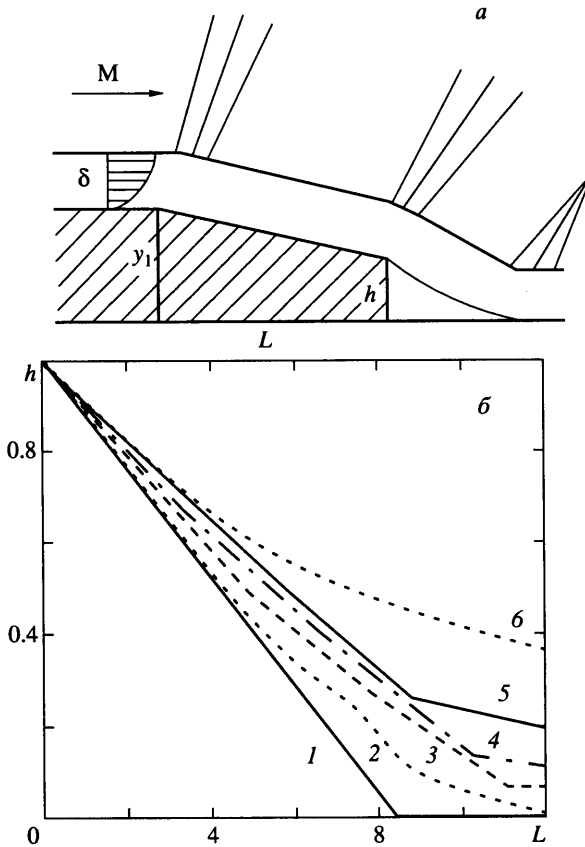
ты расчета удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [4, 5] (фиг. 5).

В заключение следует подчеркнуть, что указанный выше метод перехода к эквивалентному потоку накладывает определенное ограничение на начальные данные. Для расчета могут использоваться только такие сочетания M и θ , которые обеспечивают получение M_q в диапазоне 1–4.

Таким образом, найденные соотношения позволяют определять величины донного давления при $M = 0-4$, $\delta_h = 0-\infty$, $\theta = 0$, а также при $1 < M \leq 4$, $\delta_h = 0-\infty$, $\theta \neq 0$.

2. Полученные выше аппроксимационные уравнения используются в задаче определения оптимальной формы кормовой части плоского тела, рассмотренной в [6], для учета влияния числа M . В качестве допустимой конфигурации для исследований принимается на основе [7, 8] форма, состоящая из прямолинейной стенки кормы и донного торца (фиг. 6).

Рассматривается обтекание сверхзвуковым потоком кормовой части плоского тела в прямоугольной системе координат x, y . При этом ось x направлена параллельно по-



Фиг. 6. Схема обтекания кормовой части плоского тела (а) и рассчитанные зависимости оптимальной высоты донного торца h от длины L (б) при $M = 2$: 1-6 - $\delta = 0, 0,1, 0,5, 1, 2, 5$

верхности тела, начало координат помещается в конце тела перед кормовой частью. Заданы высота тела y_1 и длина кормовой части L . Для набегающего потока заданы число M , толщина пограничного слоя δ , показатель адиабаты k .

Таким образом, оптимизационная задача формулируется следующим образом. Для заданных величин M, k, δ, y_1, L необходимо найти оптимальную форму кормовой части, дающую максимальную тягу. Эта задача сводится к поиску оптимальной высоты донного торца h , являющейся функцией трех аргументов $h = h(M, L, \delta)$.

Предполагается, что вдоль линии вытеснения пограничного слоя кормы действует постоянное давление p_k , возникающее при повороте набегающего потока на угол, равный углу наклона стенки кормы θ . Это давление приближенно можно определить с помощью соответствующего уравнения характеристики

$$p_k = p_\infty - \frac{p_\infty}{\beta} \tan(\theta), \quad \beta = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{kM^2}$$

Статическое давление набегающего потока p_∞ полностью определяется заданными параметрами M и k . Предполагается, что при больших числах Рейнольдса можно пренебречь приращением толщины пограничного слоя вдоль поверхности кормы. Поэтому $\tan(\theta) = (y_1 - h)/L$.

Суммарная сила, действующая на кормовую часть, может быть записана в виде

$$R_k = p_k(y_1 - h) + ph$$

После подстановок это уравнение преобразуется

$$R_k = p_\infty[1 - (y_1 - h)(L\beta)^{-1}](y_1 - h) + ph$$

Искомая оптимальная высота донного торца находится из решения уравнения $dR_k/dh = 0$. Это уравнение, представляющее необходимое условие экстремума, есть

$$p_\infty \left(1 - \frac{y_1 - h}{L\beta} \right) - \frac{d}{dh}(ph) = 0$$

Удобно все давления отнести к статическому давлению набегающего потока, а линейные размеры – к высоте тела, т.е. принять $p_\infty = 1$, $y_1 = 1$. Тогда уравнение приобретает окончательный вид

$$\frac{1-h}{L\beta} - 1 + \frac{d}{dh}(ph) = 0 \quad (2.1)$$

В принципе донное давление p является функцией местных параметров потока на поверхности кормы M_k , δ_k/h . Однако с учетом метода перехода к эквивалентному потоку, описанному в предыдущем разделе, величину p можно рассматривать как функцию параметров набегающего потока M , δ_h . В силу этого для определения p могут использоваться полученные выше аппроксимационные формулы. Поскольку зависимость p от δ_h имеет три характерные области, то и решение основного уравнения (2.1) ищется отдельно для каждой из этих областей.

В области 1 донное давление описывается уравнением (1.2). Определяется выражение производной $d(ph)/dh$. Подстановка его в уравнение (2.1) дает

$$h^3 - (1 + 0.5(p_0 - 1)\beta L)h^2 + 0.5\beta La_1\delta^2 = 0 \quad (2.2)$$

Это кубическое уравнение имеет один действительный и два мнимых корня. Решение $h_1 = h(M, L, \delta)$ находится по стандартному методу.

В области 2 донное давление описывается уравнением (1.1). Подстановка выражения соответствующей производной в (2.1) дает линейное относительно h уравнение. Поскольку в (1.1) входит функция z , которая изменяет свой вид при переходе δ_h через границу, то полученное линейное уравнение имеет два вида решения

$$h_{2L} = 1 - 0.5\beta L(1 - p_b + a_m M), \quad \frac{\delta}{h} \leq 1$$

$$h_{2R} = \frac{\delta + 0.5\beta L\delta(p_b - 1 + a_m M)}{\delta + \beta La_m M}, \quad \frac{\delta}{h} \geq 1$$

В области 3 донное давление описывается уравнением (1.3). Подстановка выражения соответствующей производной дает квадратное уравнение

$$\frac{2}{\beta L} - \left(\frac{2}{\beta L} - \frac{2}{\delta} b_3 \right) h + \frac{3a_3}{\delta^2} h^2 = 0$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$h_3 = \frac{\delta}{3a_3} \left[\left(\frac{1}{\beta L} - b_3 \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{\beta L} - b_3 \right)^2 - \frac{6}{\beta L} a_3} \right]$$

Таким образом, определяются искомые оптимальные значения h_1 , h_2 , h_3 для указанных трех областей. Поскольку h является искомой величиной, то заранее отношение δ/h и, следовательно, область поиска решения неизвестны. Для преодоления этой трудности принята следующая схема расчета. Вначале для параметров M , δ , L , k , δ_{h1} , δ_{h2} определяются величины h_{2L} и δ/h_{2L} . Если условие $\delta_{h1} \leq \delta/h_{2L} \leq 1$ выполняется, то $h = h_{2L}$ является решением. При невыполнении этого условия определяются h_{2R} и δ/h_{2R} . Если условие $1 \leq \delta/h_{2R} \leq \delta_{h2}$ выполняется, то $h = h_{2R}$ является решением. При невыполнении этого условия определяются h_1 и δ/h_1 . Решением является $h = h_1$, если выполняется условие $0 \leq \delta/h_1 \leq \delta_{h1}$, или $h = h_3$ в противном случае.

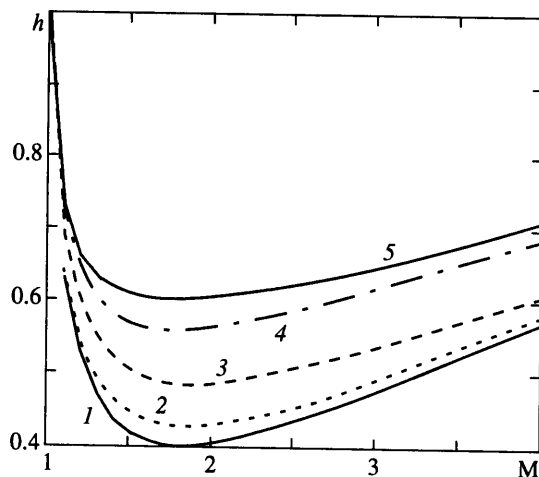
С использованием полученных соотношений проведены расчеты оптимальной высоты донного торца кормовой части плоского тела в диапазоне $M = 1-4$, $L \geq 0$, $\delta \geq 0$. Результаты расчетов приведены на фиг. 6-8. Зависимости h от L на фиг. 6 при $M = 2$ для значений $\delta = 0, 0.1, 0.5, 1, 2, 5$ показывают, что при $\delta = 0$ величина h уменьшается с ростом длины L по линейному закону и при $L \geq L_m$ $h = 0$. Такое поведение решения непосредственно следует из (2.2). Если в этом уравнении принять $\delta = 0$, то видно, что полученное соотношение имеет два корня: $h = 1 - L/L_m$ и $h = 0$, где $L_m = 2/(\beta(1 - p_0))$. Отсюда следует, что при увеличении L от 0 до L_m оптимальная высота h линейно уменьшается от 1 до 0, а при $L > L_m$ величина $h = 0$. Этот результат, а также анализ уравнения для h_3 показывает, что h может достигать нуля только в двух случаях: при $\delta = 0$, когда $L \geq L_m$, и при $L = \infty$. На практике эти предельные условия никогда не достигаются. Отсюда следует, что при наличии пограничного слоя ($\delta > 0$) оптимальная кормовая часть всегда должна содержать донный торец.

На фиг. 7 показаны зависимости $h(M)$ при $L = 5$ для значений $\delta = 0, 0.1, 0.5, 2, 5$. Следует отметить, что высота h с ростом числа M вначале уменьшается, а затем растет. Зависимости $h(\delta)$ при $L = 5$ для чисел $M = 1.1, 4, 3, 1.5, 2$ даются на фиг. 8.

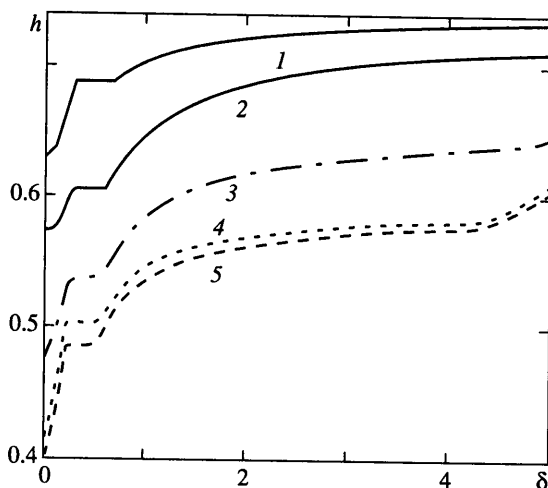
Анализ результатов показывает, что кривые зависимости h от L и δ имеют немонотонности. Они возникают в местах перехода решения из одной области в другую. Это связано с тем, что использованные аппроксимационные формулы для донного давления не обеспечивают неразрывного изменения его второй производной. Особенно заметно немонотонность может проявиться в начале области 3, поскольку здесь в уравнение (2.1) входит производная от произведения ph , сомножители которого меняются в противоположные стороны. Для устранения этой немонотонности необходима более точная аппроксимация донного давления, что пока невозможно сделать из-за отсутствия достаточных исходных данных. Поэтому здесь была использована простая схема сглаживания. Суть его состоит в том, что в области 3 определяются значения h_3 и h_{2R} и большее из них считается решением.

Заключение. На основе обобщения имеющихся экспериментальных и расчетных данных найдены аппроксимационные соотношения для определения донного давления за торцом двумерного тела в зависимости от двух основных влияющих факторов: числа M набегающего потока и относительной толщины турбулентного пограничного слоя δ/h . Остальные факторы, такие, как число Рейнольдса, показатель степени профиля скорости начального пограничного слоя, показатель адиабаты, влияют слабо, и они не учитывались. Полученные простые аппроксимационные соотношения позволили определять величины донного давления для широкого диапазона начальных данных: $M = 0-4$, $\delta/h = 0-\infty$. При этом предлагалось, что угол наклона стенки перед торцом $\theta = 0$. Однако для сверхзвуковых скоростей обтекания ($M = 1-4$) по аппроксимационным соотношениям находится донное давление и для $\theta \neq 0$ с помощью метода перехода к эквивалентному потоку.

Для задачи определения оптимального контура кормовой части плоского тела с максимальной тягой (минимальное сопротивление) при обтекании сверхзвуковым потоком в качестве допустимой конфигурации для исследований принята форма, состоящая из прямолинейной стенки кормы и донного торца. Использование алгеб-



Фиг. 7. Рассчитанные зависимости оптимальной высоты донного торца h кормовой части плоского тела от числа M набегающего потока при $L = 5$: 1–5 – $\delta = 0, 0.1, 0.5, 2, 5$



Фиг. 8. Рассчитанные зависимости оптимальной высоты донного торца h кормовой части плоского тела от толщины пограничного слоя δ при $L = 5$: 1–5 – $M = 1.1, 4, 3, 1.5, 2$

раических аппроксимирующих соотношений для определения донного давления позволило получить аналитическое решение рассматриваемой оптимизационной задачи. В примерах расчета высоты донного торца h оптимальной кормовой части получены для чисел $M = 1-4$, произвольных длин кормовой части и толщины пограничного слоя. Показано, что с увеличением δ оптимальная высота донного торца h возрастает, с увеличением L – уменьшается, а в зависимости от M величина h вначале уменьшается, затем возрастает, т.е. изменяется по кривой с минимумом. Установлено, что значение $h = 0$, соответствующее оптимальной корме без донного торца, может быть получено лишь при $\delta = 0$ и $L = \infty$. На практике эти предельные условия никогда не достигаются. Отсюда следует, что при наличии пограничного слоя ($\delta > 0$) оптимальная кормовая часть всегда должна содержать донный торец.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аукин М.К., Тагиров Р.К. Расчет донного давления и энтальпии за плоским или осесимметричным уступом, обтекаемым сверхзвуковым потоком, с учетом влияния начального пограничного слоя // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 2. С. 110–119.
2. Nash J.F. An analysis of two-dimensional turbulent base flow, including the effect of the approaching boundary layer // Aeronaut. Res. Council. Rept. and Mem. 1963. № 3344. 39 p.
3. Тагиров Р.К. Влияние начального пограничного слоя на донное давление // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 2. С. 145–148.
4. Экинг Х. Улучшение восстановления давления в сверхзвуковых аэродинамических трубах // Механика. Сб. пер. и обзоров иностр. период. лит. 1955. № 5. С. 33–53.
5. Veheim M.A. Flow in the base region of axisymmetric and two-dimensional configurations. // NASA. Techn. Rep. 1961. № 77. 32 p.
6. Тагиров Р.К. Необходимость донного торца у оптимальной кормовой части при наличии пограничного слоя // Газовая динамика / Под ред. А.Н. Крайко. М.: Физматлит., 2000. Т. 1. С. 488–492.
7. Крайко А.Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. М.: ВЦ АН СССР, 1963. 84 с.
8. Крайко А.Н., Тагиров Р.К. К построению оптимальной кормовой части плоского тела при сверхзвуковой скорости обтекания // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 56–62.

Москва

Поступила в редакцию
15.III.2001