

УДК 533.6.011.5

© 2002 г. А.Б. ГОРШКОВ, В.В. ЛУНЕВ

## ЛАМИНАРНОЕ ДОННОЕ ТЕЧЕНИЕ ЗА ТОНКИМИ КОНУСАМИ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Численно исследовано донное течение за тонкими конусами в совершенном газе при числах Маха 8, 10 и Рейнольдса  $10^4$ ,  $10^5$ . Расчетные тепловые потоки к донному срезу сопоставлены с экспериментальными данными. Показано, что при стремлении к угловой кромке как на боковой поверхности, так и на донном срезу коэффициенты трения и теплообмена неограниченно возрастают, причем знак последнего зависит от температурного фактора поверхности тела.

*Ключевые слова:* гиперзвуковой поток, теплообмен, конуса, донное течение, численный метод.

Изучению отрывных течений в донной области посвящено много теоретических и экспериментальных исследований (см., например, монографии [1–3]). Среди основных подходов, применяющихся для ее описания, – метод разделяющей линии тока [4, 5], асимптотические методы [6–8], а в последнее время также численное решение системы уравнений Навье – Стокса [9, 10].

По ламинарному ближнему следу имеется довольно много экспериментальных данных, полученных как в лабораторных, так и в натуральных условиях. Например, подробный обзор экспериментов по донному давлению и тепловому потоку для ламинарного и турбулентного течения около конусов и цилиндров приведен в [11]. Однако опубликованные результаты измерений касаются, как правило, донного давления или параметров течения в следе и значительно реже донного теплообмена. В частности, для рассматриваемой конфигурации (затупленный конус) удалось найти лишь два эксперимента [12, 13], где приведены распределения теплового потока вдоль дна.

По численному исследованию донного теплообмена можно отметить результаты расчетов [14, 15 и др.] на основе уравнений Навье – Стокса гиперзвукового обтекания различных моделей возвращаемых космических аппаратов, сопоставленные с экспериментами в аэродинамических трубах. В связи с отсутствием в литературе (насколько известно авторам) численных результатов по донному теплообмену для конусов в данной работе сравнения проводятся лишь с экспериментальными данными [12, 13].

Цель настоящего исследования 1) определение, насколько точно современные методы численного решения уравнений Навье – Стокса позволяют предсказывать результаты экспериментов по характеристикам ближнего следа и, в особенности, по донному теплообмену, 2) анализ параметров потока в окрестности особой точки течения – острой угловой кромки донного среза.

**1. Постановка задачи и метод решения.** Уравнения Навье – Стокса для совершенного газа с постоянным показателем адиабаты ( $\gamma = 1.4$ ) записываются в консервативном виде в произвольной осесимметричной системе координат  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\zeta = \zeta(x, y)$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} + \frac{H}{y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 - (\tau_{yy} - \tau_{\varphi\varphi}) \\ (e + P)v - (u\tau_{xy} + v\tau_{yy}) + q_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \zeta)}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{J}^{-1} \left( \mathbf{E}_c \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \xi}{\partial y} \right), \quad \mathbf{G} = \mathbf{J}^{-1} \left( \mathbf{E}_c \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)$$

$$\mathbf{E}_c = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (e + P)u - (u\tau_{xx} + v\tau_{xy}) + q_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_c = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + P - \tau_{yy} \\ (e + P)v - (u\tau_{xy} + v\tau_{yy}) + q_y \end{pmatrix}$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V}$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = 2\mu \frac{v}{y} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad q_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y}, \quad e = \rho \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{P}{\gamma - 1}$$

$$P = \rho RT$$

Здесь  $\mathbf{J}$  – якобиан координатного преобразования;  $u, v$  – компоненты вектора скорости  $\mathbf{V}$  в декартовой системе координат  $(x, y)$ ;  $x$  – координата вдоль оси симметрии;  $\mathbf{Q}$  – вектор консервативных переменных;  $\mathbf{E}, \mathbf{G}$  и  $\mathbf{E}_c, \mathbf{G}_c$  – векторы потоков массы, импульса и энергии в криволинейной и декартовой системах координат;  $e$  – полная энергия в единице объема.

Интегрирование системы уравнений (1.1) осуществляется численно с использованием неявной итерационной схемы [16]. При конечно-разностной аппроксимации как вязких, так и конвективных потоков используются центральные разности. Для обеспечения устойчивости счета в разностную схему вводилась искусственная диссипация [17]. Более полно численный метод решения системы (1.1) описан в [18]. Вязкость  $\mu$  определяется по формуле Сазерленда для воздуха. Число Прандтля  $\operatorname{Pr} = 0.72$ .

В расчетах ближнего следа входная граница на боковой поверхности конуса задается обычно на расстоянии порядка 0.5–1.0 радиуса дна, поскольку сдвиг этой границы дальше вверх по потоку от донного среза не приводит к изменению результатов. Выходная граница выбирается так, чтобы число Маха на выходе было  $M > 1$ , с целью исключить влияние возмущений от границы на область решения. В радиальном направлении (ось  $y$ ) расчетная область простирается от оси симметрии (ось  $x$ ) до ударной волны. Расчетная сетка строится алгебраическим способом. Координатные линии в радиальном направлении представляют собой прямые  $x = \text{const}$ , т.е. идут параллельно донному срезу. Точки сетки сгущаются к боковой и донной поверхностям конуса, а также в окрестности предполагаемого свободного слоя смешения. Причем основное количество точек при построении сетки стягивается к острой угловой кромке для лучшего разрешения больших градиентов параметров течения, которые там наблюдаются.

Параметры течения во входном сечении на боковой поверхности конуса берутся из результатов расчета как по данной программе (для уравнений Навье – Стокса), так и по двум другим программам, решающим уравнения вязкого ударного слоя [19] и

Таблица 1

Вариант	$n$	$R_b$ , см	$\theta$ , гр.	$M_\infty$	$Re_\infty$	$T_{0\infty}$ , К	$T_w$ , К	Эксперимент
1	0	4	11	8.3	$10^4$	3000	500	12
2	0.25	4	11	8.3	$10^4$	3000	500	12
3	0.5	4	11	8.3	$10^4$	3000	500	12
4	0	4	11	9.8	$1.15 \cdot 10^5$	1000	350	12
5	0	25.4	5	8.0	$1.25 \cdot 10^5$	1100	352	13

Таблица 2

Вариант	$P_b/P_\infty$	$P_c/P_b$	$Q_b \cdot 10^4$	$q_c/q_b$	$M_a$	$Re_a$	$r_{sep}$	$L_w$	$\delta_s \cdot 10^2$	$St \cdot 10^4$
1	0.448	11.4	1.98	10.8	0.669	52.3	0.899	1.44	1.23	4.42
2	0.591	6.81	2.99	6.36	0.754	65.8	0.934	1.74	1.95	6.66
3	0.786	5.44	3.99	4.14	0.859	87.9	0.961	2.34	1.92	8.89
4	0.400	16.4	0.474	13.4	0.794	138	0.914	1.60	1.06	1.43
5	0.473	4.11	1.22	1.88	1.12	405	0.984	8.06	1.52	3.30

параболизированные уравнения Навье – Стокса [20] около носового затупления и на боковой поверхности соответственно. Острый конус рассчитывался либо как конус с очень малой степенью затупления (по программам [19, 20]), либо непосредственно (по данной программе) в предположении конического характера течения во входном сечении вблизи вершины конуса. Все расчеты проводились с выделением ударной волны.

Ударная волна рассматривается как поверхность разрыва, на которой выполняются обобщенные условия Ренкина – Гюгонио. Метод расчета положения ударной волны аналогичен приведенному в [21]. Параметры течения на выходной границе расчетной области находятся путем линейной экстраполяции. На поверхности задаются условия прилипания  $u = v = 0$  и температура стенки  $T_w$ . Тепловой поток на стенку вычисляется по формуле  $q_w = -(\kappa \partial T / \partial n)_w$  (нормаль  $n$  направлена внутрь тела). Для применяемой конечно-разностной схемы требуется дополнительное численное граничное условие на стенке, в качестве которого используется равенство нулю нормального градиента давления  $(\partial P / \partial n)_w = 0$ .

**2. Течение в донной области.** Поскольку одной из целей данного исследования является сравнение расчетов с результатами измерений, то выбранные расчетные варианты соответствовали условиям экспериментов [12, 13], выполненных в гиперзвуковых аэродинамических трубах. Модели – острые и затупленные конуса с плоским основанием – крепились на боковой державке [12] или подвешивались на проволочках [13]. В обоих случаях возможно искажение осесимметричного характера течения в донной области. Заметим, что указанное обстоятельство может быть причиной неравномерного совпадения приводимых ниже результатов расчетов с экспериментом, в том смысле, что результаты одной и той же теории хорошо согласуются с одними экспериментами и существенно хуже с другими.

Геометрические характеристики моделей и основные параметры течения приведены в табл. 1. Некоторые расчетные характеристики ближнего следа, полученные на самых мелких сетках, представлены в табл. 2. Здесь  $R_n$ ,  $R_b$  – радиусы носового затупления и дна;  $n = R_n/R_b$ ;  $\theta$  – угол полураствора конуса в градусах;  $M_\infty$ ,  $Re_\infty$  – числа Маха и Рейнольдса набегающего потока;  $T_{0\infty}$  – температура торможения набегающего потока,  $T_w$  – температура поверхности конуса;  $M_a$ ,  $Re_a$  – максимальные числа Маха и Рейнольдса на оси симметрии в отрывной зоне;  $Q = q / (\rho_\infty U_\infty^3)$  – безразмерный тепло-

вой поток;  $\delta_s$  – толщина дозвукового слоя на боковой поверхности перед донным срезом;  $s$  – расстояние от угловой кромки вдоль поверхности конуса;  $St = q_b / [\rho_\infty U_\infty C_p (T_{0\infty} - T_w)]$  – число Стантона; индексы  $c, b, \infty$  – обозначают величины на боковой поверхности перед донным срезом, в центре дна и в набегающем потоке соответственно. Все величины, имеющие размерность длины, а также числа Рейнольдса и Кнудсена отнесены к радиусу дна  $R_b$ .

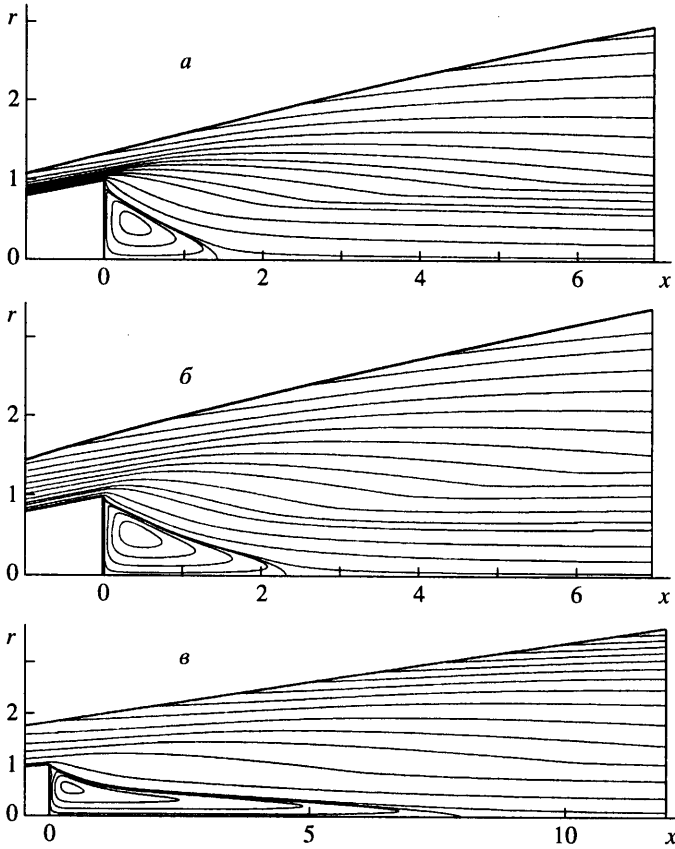
Расчеты проводились на сетках  $70 \times 70$ ,  $100 \times 100$ ,  $140 \times 140$  и  $200 \times 200$  (соответственно, сетки  $A, B, C$  и  $D$ ). Для вариантов 1–3 с меньшим числом  $Re$  использовались в основном сетки  $A$ – $C$ , а для вариантов 4, 5, для которых число  $Re$  на порядок больше, – сетки  $B$ – $D$ . Следует заметить, что шаг сетки у стенки (как на боку, так и на донном срезе) для сетки  $D$  был примерно на порядок меньше, чем для сетки  $C$ .

На фиг. 1 показаны линии тока в донной области для вариантов 1, 3 и 5. Обратим внимание, что точка схода разделяющей линии тока  $r_{ср}$  находится на донном срезе и тем ниже, чем меньше число Рейнольдса. Факт подобного смещения точки отрыва отмечался и ранее (см., например, [9, 10]). Он объясняется, по-видимому, тем, что в случае совпадения точки отрыва с угловой точкой в малой окрестности последней размера  $l$  расход газа, эжектируемого зоной смешения и имеющего порядок  $l^{1/2}$ , не может быть скомпенсирован расходом газа, поступающим из донной области. И динамическая совместность обоих потоков наступает лишь при смещении точки отрыва на донном срезе вниз.

*Точность численных результатов.* На фиг. 2, *a* представлены экспериментальные и расчетные распределения вдоль радиуса  $r = R/R_b$  безразмерных донных тепловых потоков  $Q_w = q_w / (\rho_\infty U_\infty^3)$  для острого (вариант 1) и двух затупленных конусов (варианты 2 и 3). Максимальное расхождение результатов на разных сетках для всех трех вариантов наблюдается около центра дна (исключая окрестность угловой кромки, которая рассматривается ниже), что связано, по-видимому, с относительно грубым шагом сетки возле оси симметрии. Для варианта 1 различие тепловых потоков около центра дна составляет примерно 5% между сетками  $A$  и  $B$ , и 2% между  $B$  и  $C$ . Для вариантов 2 и 3 различие меньше. Распределения экспериментальных и расчетных донных тепловых потоков для больших чисел  $Re$  (варианты 4 и 5) показаны на фиг. 2, *б*. Данные варианты (см. табл. 1) имеют почти одинаковые числа  $Re$  и близкие числа  $M$ , но отличаются углом раствора конуса (соответственно  $\theta_4 = 11^\circ$  и  $\theta_5 = 5^\circ$ ). Из представленных данных видно, что расчетные значения на сетках  $B$ – $D$  хорошо согласуются для варианта 4 (отличие 4.2 и 1.7% в центре дна) и несколько хуже для варианта 5 (12 и 4%).

Для правильного описания течения в отрывной зоне необходимо точно рассчитывать параметры потока в области присоединения потока (где свободный слой смешения достигает оси симметрии и замыкает отрывную зону). Точность численного решения в этой области контролировалась по изменению параметров течения при расчетах на разных сетках. Например, для варианта 3 (когда различие расчетных и экспериментальных данных по донному теплообмену наибольшее) при увеличении количества расчетных точек (сетки  $B$  и  $C$ ) давление и температура в области присоединения уменьшаются на 0.2 и 0.7%, длина отрывной зоны  $L_w$  – на 1%.

Используемая в расчетах модель искусственной диссипации [17] представляет собой сумму двух слагаемых – второй и четвертой разностей параметров течения. Для исследования влияния искусственной диссипации на решение было выполнено несколько методических расчетов с разными значениями коэффициентов при данных слагаемых. Так, увеличение коэффициентов в 2 раза при расчете на сетке  $B$  для варианта 2 дает уменьшение давления  $P_b$  и теплового потока  $Q_b$  в центре дна на 0.5 и 0.7% соответственно. Для варианта 3 значения  $P_b$  и  $Q_b$  уменьшаются примерно на 0.2%. В целом можно отметить, что варьирование коэффициентов при искусственной



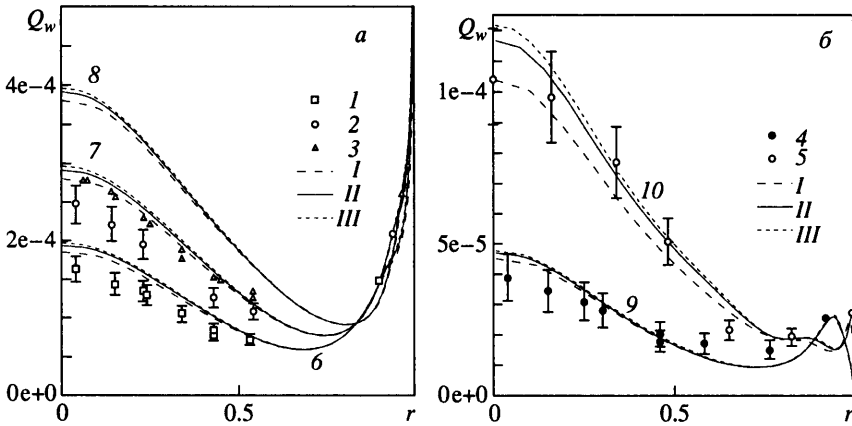
Фиг. 1. Линии тока в ближнем следе: а-в – варианты 1, 3 и 5 из табл. 1

диссипации до нескольких раз вызывает изменение расчетных параметров течения сравнимое или меньшее, чем при расчетах на разных сетках.

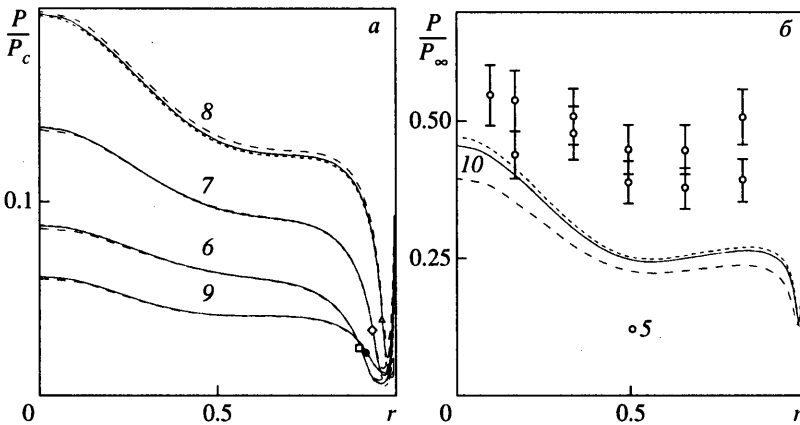
Таким образом, для всех рассмотренных вариантов результаты на разных сетках не сильно различаются между собой, и имеет место сходимость по сетке. Это позволяет надеяться на достоверность полученных результатов в рамках используемой модели ламинарных уравнений Навье – Стокса.

*Окрестность угловой кромки.* Интересной особенностью представленных на фиг. 2, а распределений донных тепловых потоков для вариантов 1–3 является их резкий рост вблизи угловой кромки, превышающий максимум у оси симметрии. Основное возрастание теплового потока происходит выше точки отрыва на донном срезе (на фиг. 2 и 3 она отмечена точками на соответствующих профилях  $q$  и  $P$ ), когда поток газа, обогнувший кромку, остается еще присоединенным. Минимум теплового потока, как видно из фиг. 2, а, наблюдается уже в отрывной зоне (и таким образом не совпадает с минимумом донного давления, который находится выше точки отрыва). В случае больших чисел  $Re$  (варианты 4, 5) донные тепловые потоки в окрестности угловой кромки, наоборот, уменьшаются и становятся отрицательными (фиг. 2, б).

Поскольку тепловой поток на поверхности тела при условии прилипания равен  $q_w = -\kappa \partial T / \partial n = -\kappa \partial T_0 / \partial n$ , то отрицательные величины  $q_w < 0$  обусловлены локальным снижением температуры торможения в потоке  $T_0 = T + (u^2 + v^2) / (2C_p)$  в пристеночной области по сравнению с температурой стенки  $T_w$ . Но в начальном сечении перед донным срезом в пристеночной области выполнено  $T_0 > T_w$ , как, собственно, и в обычном



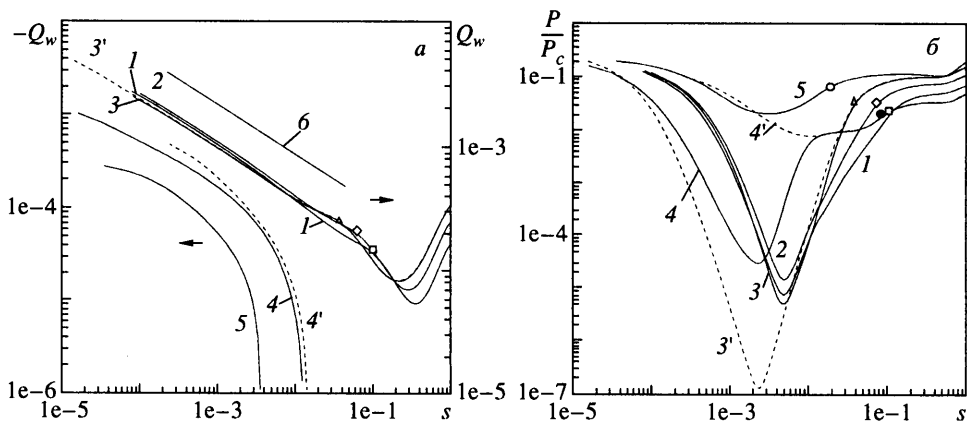
Фиг. 2. Распределения теплового потока  $Q_w$  по дну от  $r$ : 1–5 – эксперимент; символы без диапазона ошибок ( $r > 0.9$ ) указывают место отрыва; 6–10 – варианты 1–5 из табл. 1; I–III – расчеты на сетках A, B, C (варианты 1–3) (a) и B, C, D (варианты 4, 5) (б)



Фиг. 3. Распределения давления по дну от  $r$ ; обозначения, как на фиг. 2, с учетом того, что на (a) – варианты 1–4, на (б) – вариант 5

пограничном слое, скажем, на пластине. Так что ситуация  $T_0 < T_w$  в прилегающей к угловой кромке области донного течения обусловлена адиабатическим падением статической температуры вместе с давлением при развороте около угловой кромки, которое не компенсируется, из-за влияния вязкости, ростом скорости. Подобная ситуация возможна по тем же причинам и перед угловой кромкой в ближней ее окрестности (см. ниже), в которой давление падает почти вдвое. На эти эффекты, возможно, накладывается и другой эффект, чисто погранслойный, аналогичный эффекту снижения температуры равновесия газа на теплоизолированной стенке по сравнению с температурой торможения внешнего потока.

На фиг. 4, a в логарифмическом масштабе в окрестности угловой кромки приведены расчетные распределения донных тепловых потоков  $Q_w$  для вариантов 1–3, полученные на сетке C, и  $-Q_w$  для вариантов 4, 5 на сетке D (правая и левая оси ординат соответственно). В отличие от центра дна (фиг. 2, a) значения  $Q_w$  для вариантов 1–3 в окрестности кромки различаются между собой незначительно и, кроме того, меняются немонотонно в зависимости от степени затупления  $n$ . Для иллюстрации

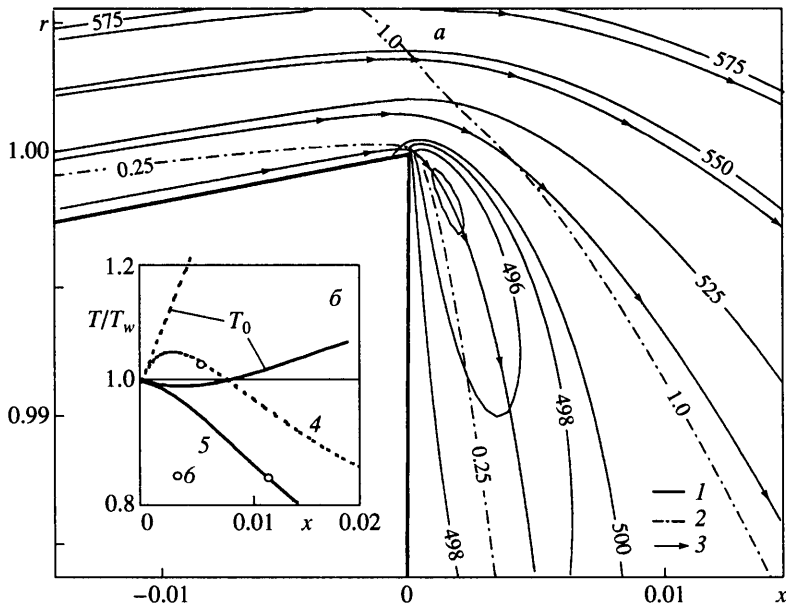


Фиг. 4. Распределения теплового потока (а) и давления (б) вдоль дна в окрестности угловой кромки для вариантов 1–5 из табл. 1: 1–5 – расчеты на сетках С (варианты 1–3) и D (4, 5); 3' – вариант 3 на сетке D, 4' – 4 на С; символы – место отрыва; 6 –  $Q_w \sim s^{-0.4}$

влияния сетки на расчетные значения теплового потока у кромки при  $Re_\infty = 10^4$  на фиг. 4, а показано также распределение  $Q_w$  (кривая 3') для варианта 3, полученное на более мелкой сетке D. Видно, что расхождение между расчетами на разных сетках в масштабе графика заметно лишь у самой угловой кромки, где достигает около 4%. С уменьшением степени затупления конуса (варианты 1 и 2) различие расчетных значений  $Q_w$  на разных сетках остается примерно таким же (на фигуре не показано). Влияние расчетной сетки на значения теплового потока для случая больших чисел Re показывает кривая 4', полученная для варианта 4 на более грубой сетке С. Видно, что область отрицательных тепловых потоков около кромки с увеличением количества точек сетки немного уменьшается, однако качественно форма профиля  $Q_w$  сохраняется. Отметим, что зависимость донного теплового потока от расстояния  $s$  до кромки для вариантов 1–3 приближенно можно представить в виде  $Q_w \sim s^{-0.4}$ .

Отрицательные донные тепловые потоки в окрестности угловой кромки для вариантов 4 и 5 вызваны относительно высокой температурой поверхности конуса. Температурный фактор  $t_w = T_w/T_{0\infty}$  для этих вариантов равен примерно  $1/3$ , тогда как для первых трех вариантов –  $1/6$ . Влияние температурного фактора на донный тепловой поток около кромки иллюстрирует фиг. 5, б, где показаны профили безразмерных температур  $T/T_w$  и  $T_0/T_w$  по нормали к донному срезу на расстоянии  $s = 0.01$  от угловой кромки для условий варианта 4 при двух температурах поверхности конуса –  $T_w = 100$  и  $500$  К. Видно, что с уменьшением температурного фактора ( $t_w = 0.1$ ) тепловой поток в окрестности угловой кромки меняет знак и становится положительным. Отрицательные тепловые потоки в окрестности угловой кромки при  $t_w = 0.5$  связаны (как уже отмечалось) с локальным минимумом  $T_0$  вблизи стенки, величина которого оказывается ниже температуры поверхности конуса.

Общий вид изолиний температуры торможения, числа Маха и линий тока для условий варианта 4 при  $T_w = 500$  К представлен на фиг. 5, а. Область, где  $T_0 < T_w$ , расположена в дозвуковом пристеночном слое вдоль донного среза сразу за угловой кромкой и имеет размеры  $0.01 \times 0.055$  в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно. Локальный минимум температуры торможения  $T_0$  равен  $494$  К, т.е. отличается от  $T_w$  всего примерно на 1%. Количество точек сетки от донного среза до минимума  $T_0$  равно 12 и 37 (сетки С и D). Значение минимума  $T_0$ , полученное на сетке D, на  $0.15$  К меньше, чем на сетке С. При увеличении  $T_w$  относительная величина локального



Фиг. 5. Вариант 4, табл. 1: *a* – изолинии температуры торможения (1), числа Маха (2) и линии тока (3) в окрестности угловой кромки,  $T_w = 500$  К; *б* – температуры  $T$  и  $T_0$  по нормали к стенке в донной области при  $r = 0.99$ ; 4, 5 соответствуют  $T_w = 100$  и  $500$  К; б – место, где  $M = 1$

минимума  $T_0/T_w$  уменьшается, а размеры области с  $T_0 < T_w$  увеличиваются. Поэтому на фиг. 5, *a* показаны параметры течения для условий варианта 4 с более высокой температурой поверхности  $T_w = 500$  К. При  $T_w = 350$  К минимум температуры торможения –  $T_0 \approx 349$  К, при  $T_w = 100$  К минимум  $T_0$  отсутствует.

Расчет, выполненный для условий варианта 4 при  $Pr = 1$  и температурном факторе  $t_w = 1$ , показал, что и в этом случае вблизи угловой кромки имеют место отрицательные тепловые потоки и область с местной температурой торможения  $T_0 < T_w$ , положение которой аналогично картине изолиний  $T_0$ , показанной на фиг. 5, *a* (только минимум  $T_0 = 0.954T_w$  находится дальше от донного среза – при  $x \approx 0.12$ ). Тем самым такое течение качественно отличается от классического течения в автомодельном пограничном слое, для которого коэффициент восстановления  $r = \sqrt{Pr}$  и тепловой поток при  $Pr = 1$ ,  $t_w = 1$  равен нулю.

Следует отметить, что отрицательные и положительные тепловые потоки, увеличивающиеся по абсолютной величине при приближении к угловой кромке, для случая обтекания прямоугольного угла равномерным потоком совершенного газа при  $M_\infty = 3$ ,  $t_w \approx 0.5$ ,  $\gamma = 1.4$  были получены в рамках асимптотической теории соответственно для  $Pr = 0.71$  [6] и  $Pr = 1$  [7].

На фиг. 4, *б* в логарифмическом масштабе представлены профили относительного донного давления  $P/P_c$  для вариантов 1–5 (кривые 1–5 соответственно). Влияние расчетной сетки на результаты, как и в случае донных тепловых потоков (фиг. 4, *a*), иллюстрируют кривые 3' и 4'. Вдоль всего донного среза имеет место хорошая сходимость по сетке, исключая непосредственную окрестность угловой кромки ( $s < 10^{-2}$ ), где наблюдается сильное разрежение потока. Величина давления (и плотности) в этой малой области может измениться на два–три порядка в зависимости от сетки (кривые 3, 3' и 4, 4'), причем уменьшение шага сетки приводит к снижению давления. Для температуры такого эффекта не наблюдается, что видно, например, по



аналогичным кривым (3, 3' и 4, 4') для донного теплового потока на фиг. 4, а. Минимальное давление  $P/P_c$  на донном срезе для варианта 3 на сетке  $D$  (кривая 3') равно  $1.7 \cdot 10^{-7}$  на расстоянии  $s \approx 2 \cdot 10^{-3}$  от угловой кромки, соответствующее число Кнудсена –  $Kn = 6000$ , т.е. течение у донного среза сразу за угловой кромкой является свободномолекулярным.

Похожий эффект очень низкого давления в донной области, также зависящего от сетки, получен в [22] при расчете сверхзвукового обтекания сферы и цилиндра на основе уравнений Навье–Стокса с условиями прилипания на поверхности тела, но для значительно меньших чисел Рейнольдса  $Re_\infty < 300$ . Последнее объясняется, видимо, более гладкой формой тел в [22]. Интересно отметить, что для всех рассмотренных вариантов при приближении к угловой кромке относительное донное давление  $P/P_c$  стремится к значениям 0.2–0.3 независимо от сетки.

**3. Сравнение результатов расчета с экспериментом.** Расчеты показывают практически линейный рост донных тепловых потоков на оси симметрии с увеличением степени затупления конуса  $n$  в рассмотренном диапазоне 0–0.5 (см. фиг. 2, а). В эксперименте такой линейной зависимости не наблюдается, и тепловые потоки растут заметно медленнее, чем в расчете, с увеличением  $n$ . Так, для варианта 1 (острый конус) расчетные тепловые потоки превышают экспериментальные на 10% (с учетом ошибки эксперимента). Для варианта 2 ( $n = 0.25$ ) согласование расчета и эксперимента примерно такое же, а для варианта 3 ( $n = 0.5$ ) в эксперименте почти не происходит роста тепловых потоков по сравнению с вариантом 2, в то время как расчетные значения увеличиваются примерно на одну треть. Увеличение расхождения расчетных и измеренных донных тепловых потоков при возрастании  $n$ , возможно, вызвано увеличением влияния боковой державки, использовавшейся в [12], на течение в ближнем следе, так как при росте затупления конуса длина его уменьшается.

Из представленных на фиг. 2, б распределений экспериментальных и расчетных донных тепловых потоков для больших чисел  $Re$  (варианты 4, 5) видно, что теоретические значения в целом неплохо согласуются с измеренными. Как в расчетах, так и в экспериментах наблюдаются большие градиенты донного теплового потока. Например, отношение максимума теплового потока ( $r = 0$ ) к его локальному минимуму при  $r = 0.75$ – $0.9$  равно 5.3 и 6.5 для вариантов 4 и 5. Однако следует отметить, что перепады  $q_w$  вдоль дна, получаемые в расчетах, несколько больше экспериментальных – выше в окрестности точки торможения и ниже (вариант 4) в области локального минимума  $q_w$ . Причем это различие становится более выраженным с увеличением количества точек сетки. Аналогичная тенденция наблюдается и для  $Re_\infty = 10^4$  (варианты 1–3, фиг. 2, а).

Расчетные распределения донного давления по дну модели для вариантов 1–4 представлены на фиг. 3, а. Давление в центре дна почти линейно возрастает с увеличением степени затупления  $n$  аналогично тому, как это имеет место для величины теплового потока. С ростом числа  $Re$  донное давление уменьшается (варианты 1 и 4). Отметим, что формы профилей давления и теплового потока вдоль дна качественно похожи: выделяются локальный максимум на оси симметрии, минимум около угловой кромки и затем резкий рост в ее непосредственной окрестности.

Возрастание донного давления  $P_b$  с ростом степени затупления конуса можно объяснить следующим образом. Из эксперимента известно (см., например, [11]), что величина  $P_b$  для конусов монотонно убывает с увеличением чисел Маха  $M_e$  и Рейнольдса  $Re_e$  (при  $Re_e > 10^4$ ), определенных по параметрам на внешней границе пограничного слоя на боковой поверхности конуса перед донным срезом. Уменьшение  $P_b$  с возрастанием  $M_e$  следует также из соотношений Прандтля–Майера для волны расширения (которые указывают порядок величины и в осесимметричном случае): с увеличением  $M$  они дают более резкое падение давления при отклонении потока на один и тот же угол. С ростом затупления конуса  $n$  числа  $M_e$  и  $Re_e$  умень-

шаются, следовательно,  $P_b$  должно увеличиваться. Более высокие значения давления в отрывной зоне сопровождаются соответственно увеличением размеров отрывной зоны, длина которой вдоль оси симметрии  $L_w$  возрастает более чем в 1.5 раза (см. фиг. 1 и табл. 2, варианты 1, 3).

Влияние степени затупления  $n$  на донное давление при обтекании конусов с  $\theta = 5^\circ$  и  $10^\circ$  гелием экспериментально исследовано в [23]. При числе  $M_\infty = 11.5$  и  $0 \leq n \leq 0.5$  получено, что  $P_b$  почти линейно возрастает с  $n$ . Аналогичный эксперимент для давления при  $0 \leq n \leq 0.4$  и теплового потока при  $0 \leq n \leq 0.5$  в центре дна при гиперзвуковом обтекании конусов с  $\theta = 10$  и  $15^\circ$  воздухом выполнен в [24]. В пределах точности измерений также была получена линейная зависимость от  $n$  для обоих параметров.

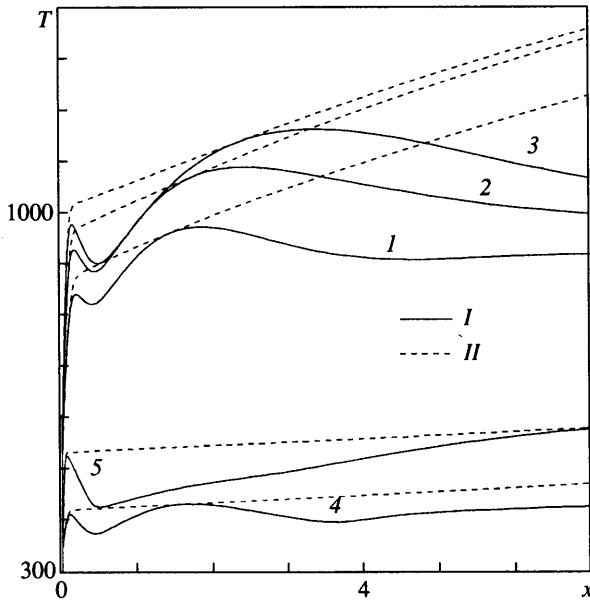
Сопоставление экспериментальных и расчетных распределений давления вдоль дна для варианта 5 показано на фиг. 3,б. В отличие от эксперимента, где донное давление почти постоянно в пределах точности измерений, в расчете имеют место большие градиенты  $P$  вдоль дна, вызванные сверхзвуковыми скоростями потока в зоне отрыва для этого случая (см. табл. 2). Так, хотя в окрестности оси симметрии расчет удовлетворительно согласуется с экспериментом, при увеличении  $r$  численные значения  $P$  резко уменьшаются (почти в 2 раза) и находятся ниже экспериментальных. Возможная причина такого расхождения – в неточной адаптации расчетной сетки к свободному слою смешения, сходящему с угловой кромки (напомним, что использовалась алгебраическая сетка). Кроме того, низкие значения донного давления довольно трудно измерить в эксперименте (об этом свидетельствует значительный разброс экспериментальных данных [13]).

Рост  $q_b$  с увеличением  $n$  в расчетах объясняется возрастанием донного давления, а также температуры торможения и скорости потока в отрывной зоне. Согласно формуле Фэйя–Ридделла [25], отношение тепловых потоков в центре дна для разных затуплений можно приближенно записать в виде

$$\frac{q_{b2}}{q_{b1}} = \left( \frac{P_{b2}}{P_{b1}} \right)^{0.4} \frac{(T_{0\delta} - T_w)_2}{(T_{0\delta} - T_w)_1} \sqrt{\left( \frac{dv_\delta}{dy} \right)_2 \left( \frac{dv_\delta}{dy} \right)_1^{-1}} \quad (3.1)$$

где индекс  $\delta$  определяет величины на внешней стороне пограничного слоя. Значение  $T_{0\delta}$  берется из расчетных данных в точке локального максимума статической температуры на оси симметрии около донного среза. Вместо производной  $dv_\delta/dy$  используется пропорциональная ей величина градиента скорости вдоль оси симметрии  $dv_\delta/dx$ . Вычисленные таким образом по формуле (3.1) отношения тепловых потоков в центре дна для вариантов 1–3 равны  $q_{b2}/q_{b1} = 1.53$  и  $q_{b3}/q_{b2} = 1.34$ , причем вклад в увеличение  $q_b$  всех трех множителей в (3.1) значителен. Соответствующие отношения, рассчитанные по значениям  $q_b$  из табл. 2, равны 1.51 и 1.33.

Распределения вдоль оси симметрии статической температуры  $T$  (кривые I) и температуры торможения  $T_0$  (кривые II) для вариантов 1–5 представлены на фиг. 6. Видно, что уровень  $T_0$  тем выше, чем больше затуплен конус. Действительно, с возрастанием  $n$  длина отрывной области увеличивается, а длина образующей конуса уменьшается, поэтому растет степень поглощаемости пограничного слоя. Следовательно, увеличивается и температура торможения в донной области. Можно также отметить почти линейное изменение  $T_0$  вдоль оси симметрии в расчетах, за исключением небольшой области теплового пограничного слоя около дна. Статическая температура в отрывной зоне меняется немонотонно, достигая здесь локальных минимума и максимума, вызванных разгоном потока в возвратной струе и последующим торможением около стенки. Градиенты  $T$  в ближнем следе растут с увеличением  $n$ , что соответствует тенденции уменьшения влияния вязкости в отрывной зоне для конусов с большим затуплением. Измеренные значения температуры  $T_b$  в отрывной



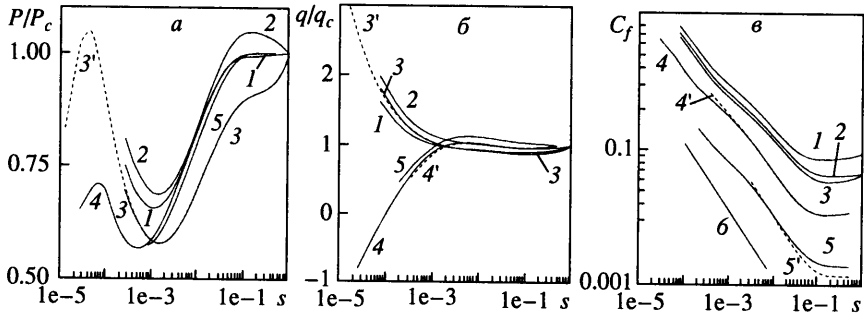
Фиг. 6. Расчетные распределения  $T$  (I) и  $T_0$  (II) на оси симметрии: 1–5 – варианты 1–5 из табл. 1

зоне возле оси симметрии на расстоянии  $x \approx R_b/2$  от донного среза в виде параметра  $\theta_T = (T_b - T_w)/(T_{0\infty} - T_w)$ , равного 0.125, 1.75, 0.2 для вариантов 1–3 соответственно, приведены в [12]. В расчете величина  $\theta_T$ , определенная по локальному максимуму температуры в отрывной зоне, имеет значения 0.137, 0.172, 0.192.

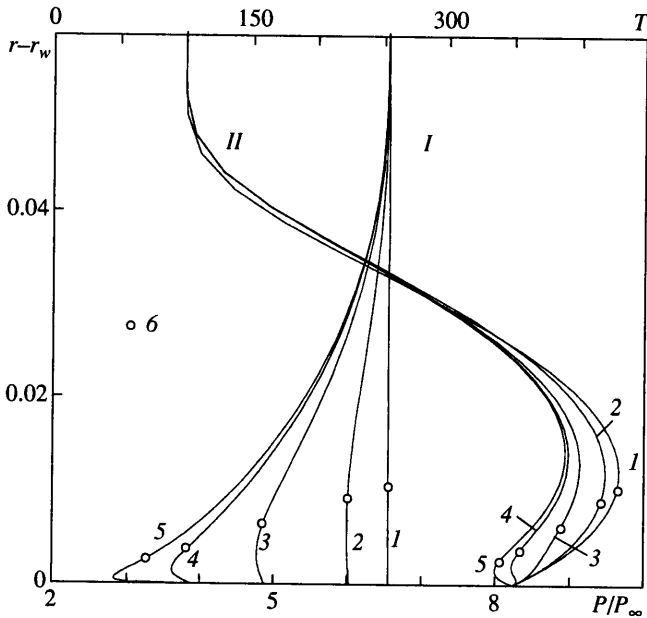
**4. Течение на боковой поверхности.** На фиг. 7 представлены расчетные зависимости давления  $P/P_c$ , теплового потока  $q/q_c$  и коэффициента трения  $C_f = 2\tau_w / (\rho_\infty U_\infty^2)$  на боковой поверхности конуса от расстояния  $s$  до угловой кромки для вариантов 1–3 (сетка C) и 4, 5 (D). Так же, как и на донном срезе, при приближении к угловой кромке тепловые потоки для вариантов 1–3 возрастают, а для 4, 5 уменьшаются, становясь (вариант 4) отрицательными.

Наиболее неожиданным эффектом, полученным в расчетах, является рост давления на боковой поверхности конуса в непосредственной окрестности угловой кромки ( $s < 2 \cdot 10^{-3}$ ). Как видно из картины линий тока на фиг. 5, под действием донного разрежения поток газа около угловой кромки резко поворачивает вниз и за счет вязкости как бы “задевает” за кромку, вызывая рост  $P$ , который распространяется вверх по потоку в очень малой области вблизи стенки на фоне относительно большой зоны разрежения в пограничном слое на конусе. Это хорошо видно по профилям  $P$  поперек ударного слоя в различных сечениях на боковой поверхности для варианта 4, представленных на фиг. 8. Поперечные профили температуры  $T$  в тех же сечениях (фиг. 8) иллюстрируют, каким образом в результате падения  $T$  в ускоряющемся потоке газа происходит уменьшение тепловых потоков при приближении к угловой кромке. Отметим, что в сечении 5, находящемся непосредственно перед угловой кромкой, от стенки до локальных минимумов  $P$  и  $T$  расположено 22 и 34 точки расчетной сетки соответственно.

Вблизи кромки для коэффициента трения (фиг. 7,в) справедлива асимптотическая зависимость  $C_f \sim s^{-1/2}$  [7]. Отклонение коэффициента трения от этой асимптотики на малых расстояниях от угловой кромки вызвано, по-видимому, тем, что градиент



Фиг. 7. Давление (а), тепловой поток (б) и коэффициент трения (в) на боковой поверхности конуса вблизи кромки: 1-5 – варианты 1-5 из табл. 1; 3' – вариант 3 на сетке D; 4', 5' – варианты 4, 5 на C; 6 –  $C_f \sim s^{-0.5}$



Фиг. 8. Профили поперек ударного слоя давления  $P/P_\infty$  (I) и температуры  $T$  (II) на боковой поверхности на разных расстояниях  $s$  перед угловой кромкой для варианта 4, табл. 1: 1-5 – сечения  $s = -0.25; -2.3 \cdot 10^{-2}; -4.9 \cdot 10^{-3}; -10^{-3}; -2.6 \cdot 10^{-5}$ ; 6 – место, где  $M = 1$

давления вдоль боковой поверхности меняет здесь знак. Для острого конуса при различных значениях числа  $Re$ , температурного фактора  $t_w$  и угла раствора  $\theta$  (варианты 1, 4 и 5) распределения давления  $P/P_c$  на боковой поверхности почти совпадают, различаясь только около самой кромки. Размер области влияния  $\Delta s$  донного разрежения на боковой поверхности можно оценить по расстоянию, на котором начинается уменьшение давления (или рост коэффициента трения) при приближении к угловой кромке. Величина  $\Delta s$  заметно зависит от степени затупления, меняясь от 0.07-0.09 при  $n = 0$  до 0.15-0.2,  $n = 0.5$ .

Данные, представленные в табл. 2, показывают, что числа  $M_a$  и  $Re_a$  в отрывной области и ее размеры ( $r_{sep}, L_w$ ) растут с уменьшением угла полураствора конуса  $\theta$  от 11 до 5° (варианты 4, 5) и увеличением числа  $Re_\infty$  набегающего потока с  $10^4$  до  $10^5$  (варианты 1, 4). Причем уменьшение угла  $\theta$  приводит к сильному росту длины

отрывной зоны (примерно в 4.5 раза), а число Маха в возвратной струе становится сверхзвуковым –  $M_a = 1.12$ . В потоке отрывной зоны значения  $M_a > 1$  при сверхзвуковом обтекании клиньев и конусов под нулевым углом атаки были также получены в расчетах [9, 10]. В эксперименте сверхзвуковое течение в двумерных отрывных зонах не наблюдалось.

Из фиг. 2, 3 и табл. 2 видно, что с ростом числа  $Re_\infty$  набегающего потока с  $10^4$  до  $10^5$  (варианты 1, 4) значения  $P_b$  и  $St$  уменьшаются, причем для теплового потока в центре дна выполняется соотношение  $St \sim 1/Re_\infty^{1/2}$ . Это согласуется с экспериментальными данными.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 01-01-00159, 00-01-00578).

**Заключение.** Проведено численное исследование влияния чисел Рейнольдса, степеней затупления и углов раствора на ламинарный ближний след за тонкими конусами при гиперзвуковом обтекании совершенным газом. Получено удовлетворительное согласие результатов расчета с экспериментальными данными по донному теплообмену. С увеличением степени затупления и уменьшением угла раствора конуса давление и тепловой поток на дне, а также размеры отрывной зоны возрастают. С ростом числа  $Re_\infty$  набегающего потока значения донного давления и числа  $St$  уменьшаются, а размеры отрывной зоны увеличиваются. С приближением к угловой кромке с обеих сторон наблюдается монотонное возрастание абсолютных значений теплового потока и коэффициента трения при  $s < 0.01-0.1$ . На боковой поверхности конуса в очень малой окрестности кромки ( $s < 10^{-3}$ ) в расчетах получена область повышения давления. На донном срезе сразу за угловой кромкой ( $s < 10^{-2}$ ), несмотря на высокие значения числа  $Re_\infty = 10^4-10^5$ , имеется зона сильного разрежения потока с локальным числом  $K_n \gg 1$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чжен П. Отрывные течения. М.: Мир. Т. 1. 1972. 299 с. Т. 2. 1973. 280 с. Т. 3. 1973. 333 с.
2. Швец А.И., Швец И.Т. Газодинамика ближнего следа. Киев: Наук. думка, 1976. 382 с.
3. Гогин Л.В., Степанов Г.Ю. Отрывные и кавитационные течения. М.: Наука, 1990. 382 с.
4. Chapman D.R. An analysis of base pressure at supersonic velocities and comparison with experiment // NASA Techn. Note. 1950. № 2137. 69 p.
5. Korst H.H. A theory for base pressures in transonic and supersonic flows // J. Appl. Mech. 1956. V. 23. № 4. P. 593–600.
6. Матвеева Н.С., Нейланд В.Я. Ламинарный пограничный слой вблизи угловой точки тела // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 4. С. 64–70.
7. Нейланд В.Я. К асимптотической теории расчета тепловых потоков около угловой точки тела // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 5. С. 53–60.
8. Нейланд В.Я. Особенности отрыва пограничного слоя на охлаждаемом теле и его взаимодействия с гиперзвуковым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 6. С. 99–109.
9. Ковеня В.М., Лебедев А.С. Численное моделирование вязкого отрывного течения в ближнем следе // ПМТФ. 1989. № 5. С. 53–59.
10. Grasso F., Pettinelli C. Analysis of laminar near-wake hypersonic flows // J. Spacecraft and Rockets. 1995. V. 32. № 6. P. 970–980.
11. Lamb J.P., Oberkampf W.L. Review and development of base pressure and base heating correlations in supersonic flow // J. Spacecraft and Rockets. 1995. V. 32. № 1. P. 8–23.
12. Левчук Д.Г., Остапович О.Н., Павлова Н.В. Экспериментальные данные о донном теплообмене на поверхности тел конической конфигурации при их обтекании гиперзвуковым потоком // Космонавтика и ракетостроение. 1997. № 11. С. 34–38.
13. Zakkay V., Cresci R.J. An experimental investigation of the near wake of a slender cone at  $M_\infty = 8$  and 12 // AIAA J. 1966. V. 4. № 1. P. 41–46.

14. *Hovarth T.J., McGinley C.B., Hannemann K.* Blunt body near-wake flow-field at Mach 6 // AIAA Paper. 1996. № 96-1935. 24 p.
15. *Hollis B.R., Perkins J.N.* High-enthalpy aerothermodynamics of a Mars entry vehicle. Pt 2: Computational results // J. Spacecraft and Rockets. 1997. V. 34. № 4. P. 457–463.
16. *Yoon S., Jameson A.* An LU-SSOR scheme for the Euler and Navier–Stokes equations // AIAA Paper. 1987. № 87-0600. 11 p.
17. *Pulliam T.H., Steger J.L.* Recent improvements in efficiency, accuracy, and convergence for implicit approximate factorization algorithms // AIAA Paper. 1985. № 85-0360. 37 p.
18. *Горшков А.Б.* Расчет ламинарного донного теплообмена за телами в виде тонких конусов // Космонавтика и ракетостроение. 1997. № 11. С. 13–20.
19. *Власов В.И.* Метод расчета вязкого ударного слоя с учетом неравновесных физико-химических процессов // Космонавтика и ракетостроение. 1997. № 11. С. 5–12.
20. *Ковалев Р.В.* Расчет двумерных турбулентных сверхзвуковых течений около боковой поверхности летательных аппаратов // Космонавтика и ракетостроение. 1997. № 11. С. 21–27.
21. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.
22. *Горшков А.Б.* Теплообмен при сверхзвуковом обтекании сферы и цилиндра при малых числах Рейнольдса // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 1. С. 156–164.
23. *Артонкин В.Г.* Влияние степени затупления конуса на его донное давление при гиперзвуковых скоростях // Учен. зап. ЦАГИ. 1977. Т. 8. № 2. С. 106–109.
24. *Lockman W.K.* Free-flight base pressure and heating measurements on sharp and blunt cones in a shock tunnel // AIAA J. 1967. V. 5. № 10. P. 1898–1900.
25. *Фэй Дж., Ридделл Ф.Р.* Теоретический анализ теплообмена в передней критической точке, омываемой диссоциированным воздухом // Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций. М.: ИЛ, 1962. С. 190–224.

Москва

Поступила в редакцию  
28.VIII.2001