

УДК 532.517

© 2002 г. Ю.Д. ШМЫГЛЕВСКИЙ, А.В. ЩЕПРОВ

## О ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ У ПЛОСКИХ ГРАНИЦ

На базе стоксовых отрывных течений построены примеры отрывных течений вязкой несжимаемой жидкости, описываемые уравнениями Навье – Стокса. Эти течения представлены рядами, сходящимися в некоторой ненулевой окрестности обтекаемого прямолинейного контура, и имеют в его окрестности ту же структуру, что и базовые стоксовы течения. Приведены примеры областей, в которых выбранные отрезки найденных рядов дают достаточно малое отличие от численных решений уравнений Навье – Стокса. Сравнение отрывных течений идеальной жидкости без прилипания к обтекаемому контуру с вязкими течениями той же структуры, но с прилипанием, показывает, что вязкость не играет решающей роли в образовании отрыва и в формировании типа отхода или подхода линии тока к обтекаемому контуру.

*Ключевые слова:* вязкая, несжимаемая жидкость, отрывные плоскопараллельные течения, замкнутые зоны, уравнения Навье-Стокса.

Многообразие отрывных течений жидкости велико, а их примеры получены в основном с использованием приближенных подходов или численного решения уравнений гидродинамики. Выявлены некоторые свойства отрывных течений вязкой жидкости. Сращивание асимптотического представления решения уравнения Навье – Стокса с его численным решением позволило построить в плоскопараллельном случае вихревые системы в угловых областях течения [1]. Доказано [2], что в течениях вязкой жидкости линии тока, отделяющие отрывную часть течения от основного потока, образуют в точках отхода от обтекаемой поверхности и прихода к ней любые углы от 0 до  $\pi$ .

Здесь изучаются примеры течений вязкой жидкости, описываемых степенными рядами, которые сходятся в некоторой окрестности обтекаемой поверхности. Используется численная процедура, позволяющая отвергать зоны, в которых либо ряд расходится, либо выбранный его отрезок не обеспечивает требуемой точности. Приводятся примеры течений, определяемых с известной точностью.

Некоторые найденные точные решения уравнений гидродинамики идеальной жидкости показывают второстепенную роль вязкости в образовании отрывов и определении структуры течений в окрестности точки отрыва потока или его присоединения к обтекаемой поверхности.

**1. Отрывные течения вязкой жидкости.** Установившиеся плоскопараллельные течения вязкой несжимаемой жидкости описываются уравнением Навье – Стокса

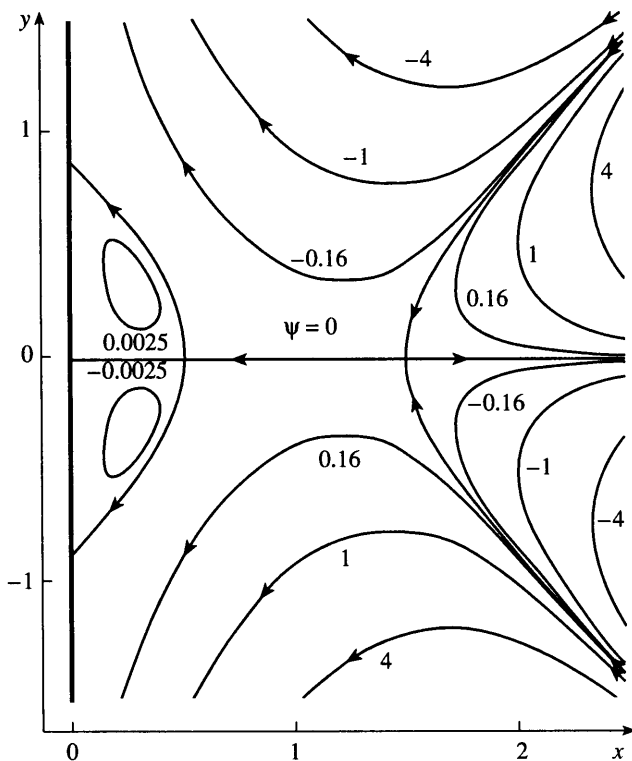
$$\psi_y \Delta \psi_x - \psi_x \Delta \psi_y = \Delta \Delta \psi \quad (1.1)$$

где  $x, y$  – декартовы координаты,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\psi$  – произведение функции тока на число Рейнольдса, которое более упоминаться не будет.

В дальнейшем будут использованы предельные случаи этого уравнения – уравнение Стокса и уравнение для идеальной жидкости

$$\Delta \Delta \psi = 0 \quad (1.2)$$

$$\psi_y \Delta \psi_x - \psi_x \Delta \psi_y = 0 \quad (1.3)$$



Фиг. 1. Линии тока стоксова течения (1.5) при  $0 \leq x \leq 2.5$  и течения вязкой жидкости (1.10) при  $0 \leq x \leq 1$  с прилипанием к обтекаемому контуру  $x = 0$

Ввиду однородности уравнений (1.2) и (1.3) их решения можно умножать на произвольное число, если это не противоречит граничным условиям.

Последовательность решений [3] уравнения (1.2) в декартовых координатах [2] позволяет составить из них функции  $\psi$ , описывающие отрывные течения у прямой образующей стенки  $x = 0$  с условиями прилипания на ней:

$$\psi(0, y) = 0, \psi_x(0, y) = 0 \quad (1.4)$$

Одним из этих решений является

$$\psi = x^2 y \left( \frac{3}{4} - 2x + x^2 - y^2 \right) \quad (1.5)$$

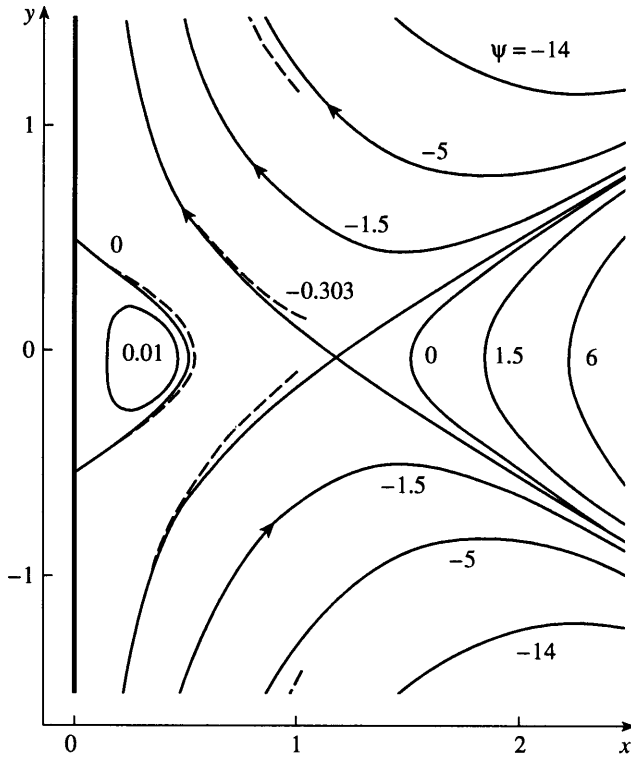
Другое течение описывается равенством

$$\psi = x^2 \left( \frac{3}{4} - 2x + x^2 - 3y^2 \right) \quad (1.6)$$

На фиг. 1, 2 изображены линии тока  $\psi = \text{const}$  этих течений. Они симметричны относительно оси  $y = 0$ , первое имеет две замкнутые зоны отрывных течений, прилегающие к началу координат, второе – одну. Стрелками показано направление течения. На фиг. 2 сплошными линиями изображены линии  $\psi = \text{const}$  течения (1.6).

Контур обтекаемой стенки  $x = 0$  на фиг. 1 и 2 показан более жирной линией, символизирующей прилипание к ней. Линии тока  $\psi = 0$ , отделяющие отрывные зоны от внешнего потока, отходят от стенки и примыкают к ней под углами, отличными от  $0$  и  $\pi$ . Внутри областей отрыва показаны примеры замкнутых линий тока.

В надежде (а она потом подтвердится) на сохранение при решении уравнения Навье – Стокса структуры течений, изображенных на фиг. 1 и 2, присоединим к усло-



Фиг. 2. Линии тока стоковского течения (1.6) при  $0 \leq x \leq 2.5$  и течения вязкой жидкости (1.12) при  $0 \leq x \leq 1$  (штриховые линии) с прилипанием при  $x = 0$

виям (1.4), справедливым для равенств (1.5) и (1.6), вытекающие из них при  $x = 0$  условия соответственно

$$\Psi_{xx}(0, y) = \frac{3}{2}y - y^3, \quad \Psi_{xxx}(0, y) = -12y \quad (1.7)$$

$$\Psi_{xx}(0, y) = \frac{3}{2} - 6y^2, \quad \Psi_{xxx}(0, y) = -12 \quad (1.8)$$

Найдем теперь решения уравнения (1.1) с данными Коши (1.4), (1.7) в первом случае и с данными (1.4), (1.8) – во втором. Соответствующие решения отметим индексами 1 и 2.

В обоих случаях данные при  $x = 0$  являются многочленами переменной  $y$ . Поэтому из теоремы Ковалевской (см., например, [4]) следует, что для каждой точки линии  $x = 0$  существует окрестность (естественно, зависящая от данных Коши), в которой имеет место аналитическое решение  $\psi = \psi(x, y)$  и оно единственно в классе аналитических функций. Из аналитичности в свою очередь следует сходимость в некоторой области соответствующих рядов по степеням  $x$ .

В [2] доказано, что если у стоковского решения (здесь это (1.5) и (1.6)) наименьшая степень ненулевых одночленов от  $x$  и  $y$  в точке  $(0,0)$  не меньше 2, то у добавка к стоковому решению при разложении в ряд решения рассматриваемой задачи Коши наименьшая степень не менее чем в 2 раза превышает упомянутую степень. В случаях (1.5) и (1.6) представление решений уравнения (1.1) в виде рядов не разрушает стоковых решений возникающими добавками.

Выполнение вычислений с использованием данных Коши (1.4), (1.7), а также

вычисление необходимого в дальнейшем вихря

$$\omega = \Delta\psi \quad (1.9)$$

в соответствии с (1.5) дают ряды

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \frac{3}{4}yx^2 - y^3x^2 - 2yx^3 + yx^4 + \left(-\frac{3}{160}y + \frac{1}{10}y^3 - \frac{1}{10}y^5\right)x^5 + \\ & + \left(\frac{1}{20}y - \frac{1}{15}y^3\right)x^6 + \left(-\frac{13}{140}y + \frac{2}{21}y^3\right)x^7 + \left(\frac{219}{5120}y - \frac{17}{8960}y^3 + \frac{11}{2240}y^5 - \frac{1}{336}y^7\right)x^8 + \\ & + \left(-\frac{157}{10080}y + \frac{1}{180}y^3 - \frac{4}{315}y^5\right)x^9 + \left(-\frac{17}{19200}y - \frac{143}{50400}y^3 + \frac{31}{5040}y^5\right)x^{10} + \dots \quad (1.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 = & \frac{3}{2}y - 2y^3 - 12yx + 6yx^2 + \left(-\frac{3}{8}y + 2y^3 - 2y^5\right)x^3 + \\ & + \left(\frac{3}{2}y - 2y^3\right)x^4 + \left(-\frac{33}{10}y + 2y^3\right)x^5 + \left(\frac{1277}{640}y - \frac{17}{160}y^3 + \frac{11}{40}y^5 - \frac{1}{6}y^7\right)x^6 + \\ & + \left(-\frac{11}{20}y + \frac{2}{5}y^3 - \frac{32}{35}y^5\right)x^7 + \left(-\frac{51}{560}y - \frac{11}{70}y^3 + \frac{3}{7}y^5\right)x^8 + \dots \quad (1.11) \end{aligned}$$

В соответствии со стоксовым течением (1.6) уравнение Навье – Стокса (1.1) дает

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \frac{3}{4}x^2 - 3y^2x^2 - 2x^3 + x^4 + \left(\frac{3}{20}y - \frac{3}{5}y^3\right)x^5 + \frac{1}{7}yx^7 + \\ & + \left(-\frac{3}{1120} + \frac{9}{560}y^2 - \frac{3}{140}y^4\right)x^8 + \left(\frac{3}{560} - \frac{9}{140}y^2\right)x^9 + \left(-\frac{29}{8400} + \frac{11}{525}y^2\right)x^{10} + \dots \quad (1.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_2 = & \frac{3}{2} - 6y^2 - 12x + 6x^2 + (3y - 12y^3)x^3 + \frac{12}{5}yx^5 + \\ & + \left(-\frac{3}{20} + \frac{9}{10}y^2 - \frac{6}{5}y^4\right)x^6 + \left(\frac{27}{70} - \frac{162}{35}y^2\right)x^7 + \left(-\frac{39}{140} + \frac{57}{35}y^2\right)x^8 + \dots \quad (1.13) \end{aligned}$$

Однородность уравнения (1.2) позволяет изменить знаки его решений (1.5) и (1.6) на обратные. При этом линии тока не изменятся, но направление течения вдоль них перейдет в противоположное. В силу неоднородности уравнения (1.1) при изменении знака у (1.5), (1.6) изменится не только направление течения, но и форма линий тока.

Ряды (1.10)–(1.13) представляют аналитические в некоторой области функции, но области их сходимости, примыкающие к линии  $x = 0$ , не известны. Кроме того, использование этих рядов для вычислений даже в областях их сходимости может не дать нужной точности из-за недостаточного количества членов в выбранных отрезках рядов. Для выявления непригодности выбранной области и отрезков рядов предлагается такая численная процедура.

**2. Численная оценка решения.** Пусть необходимо выяснить пригодность отрезков рядов (1.10), (1.11) или (1.12), (1.13) для получения решения в области  $D$ , определенной условиями  $0 \leq x \leq X$ ,  $-Y \leq y \leq Y$ , с заданной точностью. Эта пригодность будет обусловлена точностью совпадения функций  $\psi$  и  $\omega$ , определяемых отрезками рядов и численным решением уравнения Навье – Стокса в области  $D$  при задании на границе области  $D$  функций  $\psi$  и  $\omega$  отрезками указанных рядов. (В дальнейшем  $n$  будет означать, что из ряда для  $\psi$  взят отрезок до члена с  $x^n$  включительно, а для  $\omega$  – отрезок до члена с  $x^{n-2}$  включительно.)

Система уравнений Навье – Стокса (1.1), (1.9) записывается в виде

$$\psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = \Delta \omega, \quad \omega = \Delta \psi \quad (2.1)$$

Для ее численного решения область  $0 \leq x \leq X$ ,  $-Y \leq y \leq Y$  покрывается прямоугольной сеткой  $N_x \times N_y$ , где  $N_x$  и  $N_y$  – числа интервалов по  $x$  и  $y$ . При  $n \geq 8$  эти интервалы выбраны равновеликими. Все производные в уравнениях (2.1) аппроксимируются с использованием центральных разностей, что приводит к схеме второго порядка точности. Полученная после такой аппроксимации система алгебраических уравнений, дополненная граничными условиями в узловых точках границы, решается итерациями с использованием метода верхней релаксации [5]. Релаксационный параметр взят равным 1.8. Значения функций  $\psi$  и  $\omega$  на первом итерационном слое вычисляются по формулам (1.10), (1.11) или (1.12), (1.13) при выбранном значении  $n$ . На каждой итерации вычисление сеточной функции  $\psi$  следует за вычислением  $\omega$ . Полученные таким образом значения этих функций взвешиваются с соответствующими значениями функций из предыдущей итерации. Параметр взвешивания равен 0.9. На каждом новом итерационном слое вычисляются отношения максимума абсолютной величины разности  $\psi$ , а также  $\omega$  на двух последних итерациях к максимумам абсолютных величин соответствующих функций в предположении, что они не равны нулю. Описанный итерационный процесс считается сошедшимся, когда названные отношения становятся меньше, чем  $10^{-12}$ , для обеих функций.

Для оценки точности результатов проведенных вычислений в каждой из выбранных областей ( $X = 0.5, 1.0, 1.5$ ,  $Y = 1.5$ ) использована последовательность расчетных сеток с изменением шагов вдвое. Величины этих шагов для квадратных сеток равны 0.02, 0.01, 0.005. Наиболее точные результаты, полученные для этой статьи, отвечают шагу 0.005.

Итак, краевая задача для уравнений (2.1) при выбранном  $n$  решается численно с нужной точностью. Это дает в области  $D$  функции  $\psi^*(x, y)$  и  $\omega^*(x, y)$ .

Для сравнения численных результатов с представленными отрезками рядов проводится вычисление относительных разностей аналитического и численного решений. Для этого вводятся величины

$$\varepsilon = \max |\psi - \psi^*| / \max |\psi|, \quad \delta = \max |\omega - \omega^*| / \max |\omega|$$

Из сравнения этих величин с наибольшими относительными погрешностями численного решения краевой задачи можно сделать выводы о пригодности или непригодности выбранной области  $D$  и использованного числа  $n$  для применения соответствующего отрезка ряда (1.10) или (1.12).

В цели этой работы входит получение численных результатов, позволяющих сделать такие выводы. Результаты расчетов сведены в таблицу. Из нее следует, что во всех случаях при  $n = 10$  сетки с наименьшим шагом по  $x$  и  $y$  и вдвое большим обеспечивают наибольшую достижимую точность, поскольку приводят к практически одинаковым  $\varepsilon$  и  $\delta$ . Величины погрешностей при изменении  $n$  от 8 до 10 меняются заметно, а задание на границе области  $D$  функций  $\psi$  и  $\omega$  из стоковского приближения ( $n = 4$ ) приводит в варианте (1.12) при  $X = 1$  к погрешности  $\delta = 0.17$ . Таблица показывает, что отрезки рядов (1.10)–(1.13) при  $n = 10$  дают погрешность в определении  $\psi$  и  $\omega$  менее 1%, если  $X = 1$ , и менее 0.01%, если  $X = 0.5$ .

Обратимся к графическим иллюстрациям. После выполнения расчетов функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  оказываются представленными в области  $D$  и отрезками рядов, и численными данными. Последние непригодны для построения линий тока вблизи  $x = 0$ , поскольку значения  $|\psi|$  здесь могут быть меньше погрешностей расчетов. В связи с этим для построения линий тока используются отрезки рядов.

Область  $D$  с  $X = 1.5$  отвергается как не вызывающая доверия из-за больших значений  $\varepsilon$  и  $\delta$ . Точность расчетов при  $X = 0.5$  (погрешности меньше 0.01%) и при

n	N <sub>x</sub>	N <sub>y</sub>	Ряд (1.10)		Ряд (1.12)	
			10 <sup>2</sup> ε	10 <sup>2</sup> δ	10 <sup>2</sup> ε	10 <sup>2</sup> δ
X = 0.5						
10	25	150	0.0039	0.0053	0.0033	0.0011
10	50	300	0.0018	0.0055	0.0011	0.0033
10	100	600	0.0013	0.0055	0.0006	0.0031
4	30	80	–	–	8.0	4.3
X = 1.0						
10	50	150	0.17	0.74	0.23	0.63
10	100	300	0.16	0.71	0.22	0.60
10	200	600	0.16	0.69	0.21	0.59
9	200	600	0.38	2.2	0.61	0.2
8	200	600	0.55	2.7	0.76	3.0
4	60	180	–	–	2.7	17
X = 1.5						
10	75	150	2.4	6.1	3.2	5.2
10	150	300	2.3	5.8	3.1	5.0
10	300	600	2.3	5.7	3.0	4.9
4	90	180	–	–	4.0	34

X = 1 (погрешности меньше 1%) позволяет проследить на графиках при  $x \leq 1$  различие линий тока в течениях, определяемых уравнениями Стокса и Навье – Стокса.

На фиг. 1 изображены линии тока стоксова течения (1.7). Если на этот график при  $0 \leq x \leq 1$  наложить график функции, которую дает формула (1.10) при  $n = 10$ , то использованная толщина линий не позволит увидеть различия этих двух картин.

В случае формул (1.8) и (1.12) при  $n = 10$  отличие в поведении линий  $\psi = \text{const}$  становится заметным на глаз. Для изображения  $\psi_2 = \text{const}$  на фиг. 2 при  $0 \leq x \leq 1$  использованы штриховые линии. (При  $\psi = -1.5$  сплошные и штриховые линии неразличимы.)

**3. Отрывные течения идеальной жидкости.** При изучении отрывных течений жидкости возникает вопрос о том, в какой степени отрыв обусловлен вязкостью. В связи со стоксовым течением (1.6) и соответствующим решением (1.12) уравнения Навье – Стокса ответ на этот вопрос в какой-то степени дает течение идеальной жидкости, подчиняющееся уравнению (1.3) и выражаемое формулой

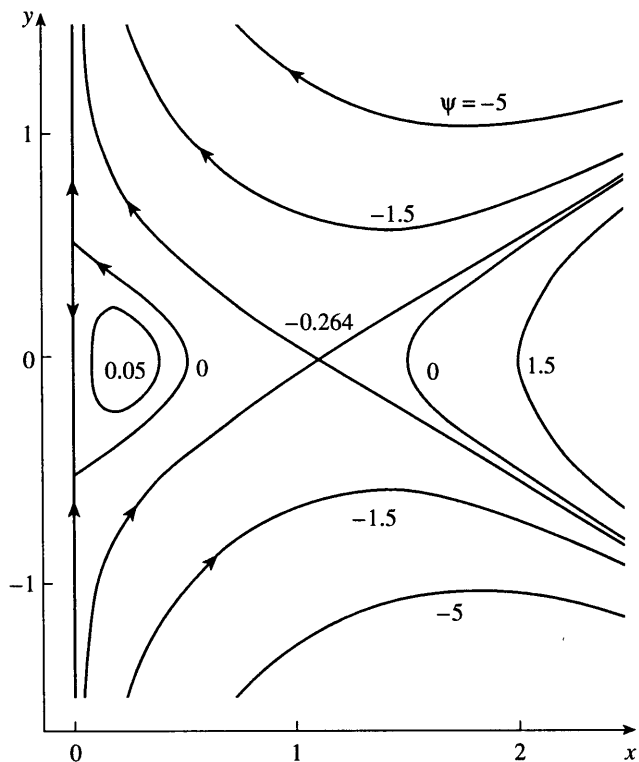
$$\psi = x(\frac{3}{4} - 3y^2 - 2x + x^2), \quad \omega = -4 \quad (3.1)$$

Линии тока этого течения показаны на фиг. 3. Решение (3.1) удовлетворяет также уравнению (1.2), т.е. является и стоксовым, а тем самым удовлетворяет и полному уравнению Навье – Стокса (1.1), обращая в нуль обе его части, но не удовлетворяет условиям прилипания (1.4).

Структура течения (3.1), как это видно из сопоставления фиг. 2 и 3, вблизи обтекаемой стенки повторяет структуру отрывного течения вязкой жидкости. Здесь вязкость не является решающей причиной образования отрыва, вызванного условиями во внешнем потоке.

В [2] установлено, что линия тока вязкого течения, отделяющая область отрывного течения от окружающего его потока, может отходить от обтекаемого контура или подходить к нему по касательной. Ответ на вопрос о роли вязкости в появлении такой возможности дают течения идеальной жидкости, определяемые функциями

$$\begin{aligned} \psi &= x(y^3 - x - x^2y), \quad \omega = -2 \\ \psi &= x(3y^2 - 3x - x^2), \quad \omega = -6 \end{aligned} \quad (3.2)$$



Фиг. 3. Линии тока идеальной жидкости (3.1) без прилипания при  $x = 0$

Эти равенства удовлетворяют уравнению (1.3). Линии тока соответствующих течений показаны на фиг. 4, а и б. В статье [2] можно найти течения вязкой жидкости с такими же схемами поведения линий тока. Таким образом, вязкость не играет решающей роли и в формировании течений этого типа.

**4. Вихревые образования в вязкой жидкости при отсутствии стенок.** Такие вихревые образования известны в различных вариантах (см., например, [6]), а здесь будут даны примеры течений со структурами, близкими к содержащим стенки.

Примеры решений уравнения Навье – Стокса будут получены, как и в предыдущих разделах, решением подходящих задач Коши с данными на линии тока  $x = 0$  в предположении, что на ней не осуществляется прилипание. Структуры такого типа возникают, например, в случае симметричного относительно оси  $x = 0$  течения вязкой жидкости, когда  $\psi$  является нечетной по переменной  $x$  функцией. В дальнейшем будет рассматриваться только область  $x \geq 0$  и не будет обсуждаться причина отсутствия трения на прямой  $x = 0$ .

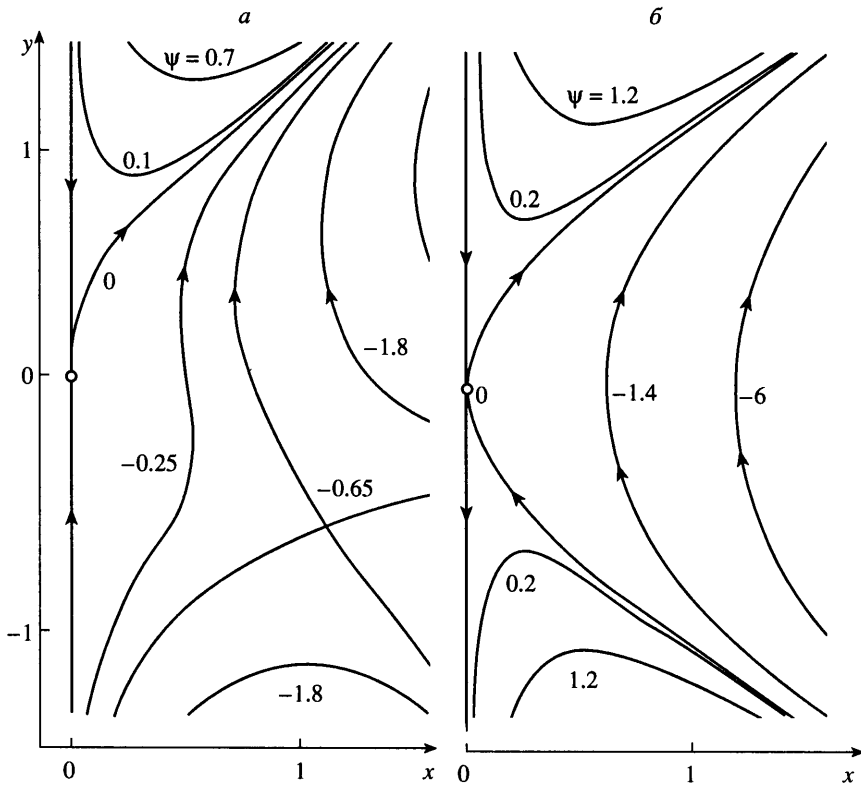
Два из условий нечетности по  $x$  функции  $\psi$  имеют вид

$$\psi(0, y) = 0, \quad \psi_{xx}(0, y) = 0 \quad (4.1)$$

Рассмотрим вначале стоксовы течения, описываемые бигармоническим уравнением (1.2) и условиями (4.1). Решение этой задачи в полярных координатах находится методом разделения переменных [7]. Выпишем два примера таких функций в декартовых координатах:

$$\psi = xy\left(\frac{1}{9} - x^2 - y^2\right) \quad (4.2)$$

$$\psi = x(x^2 + y^2 - y) \quad (4.3)$$



Фиг. 4. Линии тока идеальной жидкости, обтекающей контур  $x = 0$  без прилипания;  $a$  и  $b$  – функции тока определяются первым и вторым равенствами (3.2) соответственно

Линии тока этих течений изображены сплошными линиями в области  $0 \leq x \leq 1.5$ ,  $-1.5 \leq y \leq 1.5$  на фиг. 5,  $a$  и  $b$  соответственно.

Первое течение имеет симметричные относительно оси  $y = 0$  замкнутые вихревые образования, ограниченные дугой окружности и примыкающие к началу координат. Структура этого течения при  $x \leq 1.5$  совпадает с изображенной на фиг. 1, но прилипания при  $x = 0$  здесь нет.

Полукруглое вихревое образование на фиг. 5,  $b$ , отвечающее (4.3), является плоскопараллельным стоксовым аналогом сферического вихря Хилла – частного случая "разрушения вихря", которому посвящено значительное число работ; ссылки на их обзоры можно найти в [6].

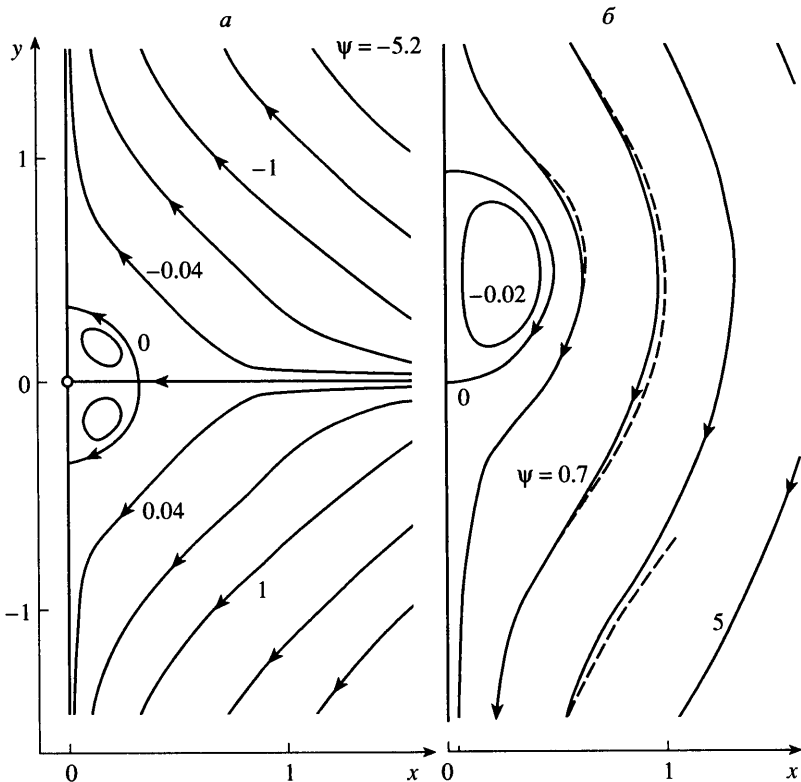
Для получения примеров течений, имеющих изображенные на фиг. 5 структуры и удовлетворяющих уравнению Навье – Стокса (1.1), присоединим к условиям (4.1) вытекающие из (4.2) и (4.3) условия

$$\psi_x(0, y) = y(\sqrt{9} - y^2), \quad \psi_{xxx}(0, y) = -6y \quad (4.4)$$

$$\psi_x(0, y) = y(y - 1), \quad \psi_{xxx}(0, y) = 6 \quad (4.5)$$

Решение задач Коши (1.1), (4.1), (4.4) и (1.1), (4.1), (4.5) отыскивается, как и в разд. 1, в виде разложений по степеням  $x$ . При этом добавки к стоксовым функциям тока (4.2) и (4.3), порождаемые уравнением Навье – Стокса, не разрушают этих стоксовых функций, с которых начинаются разложения.





Фиг. 5. Линии тока вихревых образований; *a* – стоксово течение (4.2) при  $0 \leq x \leq 1.5$  и течение вязкой жидкости (4.6) при  $0 \leq x \leq 0.75$ , *б* – стоксово течение (4.3) при  $0 \leq x \leq 1.5$  и течение вязкой жидкости (4.8) при  $0 \leq x \leq 1$  (штриховые линии)

В соответствии с (4.2) уравнение (1.1) приводит к рядам

$$\psi = y \left[ \left( \frac{1}{9} - y^2 \right) x - x^3 + \frac{1}{5} y^2 x^5 - \left( \frac{3}{35} + \frac{1}{35} y^4 \right) x^7 - \left( \frac{1}{2835} - \frac{23}{630} y^2 - \frac{1}{252} y^6 \right) x^9 + \dots \right] \quad (4.6)$$

$$\omega = y \left[ -12x + 4y^2 x^3 - \left( \frac{12}{5} + \frac{6}{5} y^4 \right) x^5 - \left( \frac{8}{315} - \frac{72}{35} y^2 - \frac{2}{7} y^6 \right) x^7 + \dots \right] \quad (4.7)$$

где  $\omega$  определено формулой (1.9).

Решение уравнения (1.1) на основе стоксовой составляющей (4.3) дает

$$\begin{aligned} \psi = & y(y-1)x + x^3 - \left( \frac{1}{15} - \frac{2}{15}y \right) x^5 + \left( \frac{1}{210} - \frac{1}{63}y + \frac{1}{63}y^2 \right) x^7 - \\ & - \left( \frac{53}{15120} - \frac{1}{648}y + \frac{1}{378}y^2 - \frac{1}{567}y^3 \right) x^9 + \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\omega = 8x - \left( \frac{4}{3} - \frac{8}{3}y \right) x^3 + \left( \frac{1}{5} - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y^2 \right) x^5 - \left( \frac{973}{4410} - \frac{1}{9}y + \frac{4}{21}y^2 - \frac{8}{63}y^3 \right) x^7 + \dots \quad (4.9)$$

Решение (4.8) дает пример плоскопараллельного аналога "разрушения вихря", удовлетворяющего уравнению Навье – Стокса.

Вихревые образования в случаях (4.6) и (4.8) уже не будут ограничены дугами окружностей.

Для определения пригодности отрезков рядов (4.6) и (4.8) к расчету вихревых образований в области  $0 \leq x \leq X$ ,  $-1.5 \leq y \leq 1.5$  и для оценки полученной точности используется численная процедура, описанная в разд. 2 для рядов (1.10)–(1.13). Все параметры вычислительного процесса остаются неизменными, поэтому рассмотрим только результаты расчетов.

В случае (4.6), (4.7), когда в разложениях для  $\psi$  и  $\omega$  удерживаются все выписанные в формулах члены и  $X = 0.75$ , относительные погрешности имеют значения  $\epsilon = 0.00081$ ,  $\delta = 0.013$ . В случае (4.8), (4.9), если в разложениях удержаны также все выписанные члены и  $X = 1$ , указанные погрешности равны  $\epsilon = 0.0016$ ,  $\delta = 0.013$ . Линии тока, соответствующие (4.6) в масштабе фиг. 5, не отличаются от стоксовых линий тока (4.2) при  $0 \leq x \leq 0.75$ . Линии тока в случае (4.8) при  $0 \leq x \leq 1$  изображены на фиг. 5, б штриховыми линиями.

Таким образом, добавки к стоксовым функциям тока (4.2) и (4.3) в формулах (4.6) и (4.8) не меняют структуру стоксовых течений и при умеренных  $x$ , содержащих вихревые образования, приводят к малым деформациям стоксовых линий тока.

**Заключение.** Приведены примеры отрывных плоскопараллельных течений у обтекаемой стенки с прямолинейной образующей, а также примеры внутренних вихревых образований вязкой несжимаемой жидкости. Решения уравнения Навье – Стокса представлены степенными рядами по одной из независимых переменных. Сходимость этих рядов в некоторой области вытекает из выполнения условий теоремы Ковалевской. Выявлена точность, с которой использованные отрезки рядов воспроизводят зоны вихревых образований. Сравнение полученных примеров друг с другом и сопоставление их с известными результатами показывает, что при набегающем потоке на стенку или же в двух встречных потоках могут возникать вихревые образования и что определяющую роль в этом играют условия в набегающих потоках. В рассмотренных течениях даже наличие вязкости не является определяющим. В плоскопараллельных потоках, как выяснено, могут возникать замкнутые зоны течений, структура которых отвечает структуре осесимметричного "разрушения вихря".

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шмыглевский Ю.Д., Щепров А.В. О вихревых системах в вязкой жидкости вблизи угловой точки границы // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 1. С. 62–73.
2. Пальцев Б.В., Шмыглевский Ю.Д. О подходе разделяющей линии тока к обтекаемому контуру в плоскопараллельном потоке вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 2. С. 76–89.
3. *Strutt J.W. baron Rayleigh*. 351. *Hedrodynamic Notes. Steady motion in a corner of a viscous fluid // Scientific Papers*. V. 6. Cambridge: Univ. Press, 1920. P. 18–21.
4. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 430 с.
6. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 231 с.
7. *Dean W.R., Montagnon P.E.* On the steady motion of viscous liquid in a corner // *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 1949. V. 45. Pt. 3. P. 389–394.

Москва

Поступила в редакцию  
1.X.2001