МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 2002

УДК 532.546

© 2002 г. С.Е. ХОЛОДОВСКИЙ

О ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЯХ В СРЕДАХ С ЭКРАНИРОВАННЫМ ШАРОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Получены компактные формулы, позволяющие по известным потенциалам установившихся течений несжимаемой жидкости в однородных пористых средах строить потенциалы аналогичных течений в средах с шаровым включением, экранированным сильно- или слабопроницаемой пленкой (трещиной или завесой). Полученные формулы распространяются на неоднородные пористые среды, когда функции проницаемости внутри и вне включения различаются постоянным множителем, а также на ограниченные области. При этом тип особых точек потенциалов (источников, стоков и т.д.) и краевые условия, заданные в средах без включения, сохраняются для сред с экранированным включением. В качестве примера исследовано обтекание шаровой экранированной загрязненной зоны поступательным потоком, что имеет интерес в проблемах экологии.

Ключевые слова: фильтрация, несжимаемая жидкость, шаровое включение.

В реальных пористых средах большое распространение имеют трещины и завесы: с одной стороны, контакты включений, как правило, не бывают идеальными и содержат сильно- и слабопроницаемые прослойки, а с другой – искусственные трещины-дренажи и завесы-экраны играют большую роль в управлении фильтрационными потоками [1–3]. В частности, с помощью трещин и завес можно ограждать загрязненные зоны от внешних потоков [3]. В [4] приведена теорема об обтекании непроницаемого шара. В [5] доказаны фильтрационные теоремы о проницаемых шаровых включениях с идеальным контактом (без трещин и завес), когда особые точки потенциалов расположены только вне включения и пористая среда вне и внутри включения однородна. В данной работе методом, развитым в [6, 7], построены потенциалы фильтрационных течений в неоднородных средах с шаровым включением, экранированным трещиной или завесой, при произвольном расположении особых точек потенциалов. Трещина (завеса) моделируется бесконечно тонким слоем с бесконечно большой (бесконечно малой) проницаемостью.

1. Рассмотрим пространственные установившиеся течения в пористой среде, содержащей шаровое включение $D_1(r < c)$, экранированное трещиной или завесой $r = c$, когда проницаемости зон D_1 и $D_2(r > c)$ соответственно равны K_1P и K_2P, где $P = P(\theta, \psi)$, $K_i = \text{const}$; r, θ, ψ – сферические координаты. Для вывода обобщенных условий сопряжения на сфере $r = c$ заменим трещину (завесу) слоем $D_0(c < r < b)$ толщины $l = b - c$ и проницаемости K_0P, $K_0 = \text{const}$. Тогда потенциалы φ_i вне своих особых точек удовлетворяют в D_i уравнению

$$\partial_r(r^2\partial_r\varphi_i) + L[\varphi_i] = 0, \quad i = 0, 1, 2 \tag{1.1}$$

$$L[\varphi_i] = \frac{1}{P\sin\theta}\partial_\theta(P\sin\theta\partial_\theta\varphi_i) + \frac{1}{P\sin^2\theta}\partial_\psi(P\partial_\psi\varphi_i)$$

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \partial_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \partial_\psi = \frac{\partial}{\partial\psi}$$

Пусть на общих границах зон D_i выполняются классические условия сопряжения, выражающие непрерывность потенциала и нормальной составляющей скорости $v_i = K_i P\partial_r\varphi_i$:

$$r = r_i: \quad \varphi_0 = \varphi_{i+1}, \quad K_0\partial_r\varphi_0 = K_{i+1}\partial_r\varphi_{i+1}, \quad i = 0, 1$$

где $r_0 = c, r_1 = b$. Отсюда, обозначая $\varphi_{|b} = \varphi_{|r=b}$, найдем приращения потенциалов и нормальных скоростей на границе D_0 в виде

$$\varphi_{2|b} - \varphi_{1|c} = \varphi_{0|b} - \varphi_{0|c} = \frac{l}{K_0 P} v_{0|\alpha} \tag{1.2}$$

$$v_{2|b} - v_{1|c} = v_{0|b} - v_{0|c} = lK_0 P\partial_{rr}\varphi_{0|\beta} \tag{1.3}$$

где $\alpha, \beta \in (c, b)$. Пусть слой D_0 вырождается в трещину. Переходя в (1.2), (1.3) к пределу при $l \to 0$, $K_0 \to \infty$, $lK_0 \to A$, с учетом уравнения (1.1) и ограниченности v_0 в D_0 получим обобщенные условия сопряжения на трещине:

$$r = c: \quad \varphi_2 = \varphi_1, \quad K_2\partial_r\varphi_2 - K_1\partial_r\varphi_1 = \frac{A}{c^2}\partial_r(r^2\partial_r\varphi_1) \tag{1.4}$$

В случае слабопроницаемой завесы $r = c$ при $l \to 0$, $K_0 \to 0$, $l/K_0 \to B$ из равенств (1.2), (1.3) следуют условия сопряжения

$$r = c: \quad \varphi_2 - \varphi_1 = BK_1\partial_r\varphi_1, \quad K_2\partial_r\varphi_2 = K_1\partial_r\varphi_1 \tag{1.5}$$

Параметры трещины и завесы соответственно A и B, характеризующие их раскрытие и проницаемость, можно определить экспериментально, замеряя потоки $Q_1(Q_2)$ и Q через элемент среды $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, $i = 1, 2, 3$ соответственно с трещиной $x_2 = \mathrm{const}$ (завесой $x_1 = \mathrm{const}$) и без нее, когда на границах $x_i = a_i$, $x_i = b_i$ при $i = 1$ задана разность потенциалов $\Delta\varphi$, а при $i = 2, 3$ указанные границы непроницаемы:

$$A = \frac{1}{\Delta\varphi\Delta x_3}(Q_1 - Q)\Delta x_1, \quad B = \left(\frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q}\right)\Delta\varphi\Delta x_2\Delta x_3, \quad \Delta x_i = b_i - a_i$$

2. Пусть особые точки потенциала, индуцирующие течение, расположены в $D_2(r > c)$ и описываются заданной функцией $f(r, \theta, \psi)$, которая в R^3 вне особых точек удовлетворяет уравнению (1.1). Отсюда для потенциалов φ_i имеем задачи: решить уравнение (1.1) при условиях сопряжения (1.4) и (1.5) соответственно для трещины и завесы, причем в окрестности особых точек $\varphi_2 \sim f$. Решения указанных задач строятся по формулам

$$\varphi_{1j} = H_{1j}(r, \theta, \psi), \quad r < c \tag{2.1}$$

$$\varphi_{2j} = f(r,\theta,\psi) + (-1)^j \frac{c}{r}[f(\rho, \theta, \psi) - H_{jj}(\rho,\theta,\psi)], \quad r > c \tag{2.2}$$

$$H_{ij}(r,\theta,\psi) = \frac{1}{Q_j}[N_i(a_{1j})\Phi_{1j}(r,\theta,\psi) - N_i(a_{2j})\Phi_{2j}(r,\theta,\psi)]$$

$$N_1(a) = (1 - 2a)K_2, \quad N_2(a) = K_2 - (2K_1 + \gamma_2)a \tag{2.3}$$

$$\Phi_{ij}(r,\theta,\psi) = \int_0^r \left(\frac{\xi}{r}\right)^{a_{ij}} \frac{1}{\xi} f(\xi,\theta,\psi)d\xi \tag{2.4}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2\gamma_j}[p_j + (-1)^i Q_j] > 0, \quad Q_j = (p_j^2 - 4K_2\gamma_j)^{1/2} \tag{2.5}$$

$$p_j = K_1 + K_2 + \gamma_j, \quad \gamma_1 = \frac{A}{c}, \quad \gamma_2 = \frac{K_1K_2B}{c}, \quad \rho = \frac{c^2}{r} \tag{2.6}$$

Здесь $j = 1$ и 2 соответственно в случае трещины и завесы.

Для вывода формул (2.1)–(2.6) рассмотрим сначала случай кусочно-однородных сред, т.е. $P = \text{const}$ и $f(r, \theta, \psi)$ – гармоническая функция, имеющая особые точки в D_2. Разложим потенциалы φ_i в D_i и функцию f в D_1 (где она не имеет особых точек) по сферическим функциям $Y_n^{(\nu)}(\theta, \psi)$:

$$\varphi_{ij} = f_i + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} b_{ij} \left(\frac{c}{r}\right)^{(2i-3)(n+i-1)} Y_n^{(\nu)}, \quad i = 1,2 \tag{2.7}$$

$$f(r, \theta, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} f_{n\nu} \left(\frac{r}{c}\right)^{n} Y_n^{(\nu)}, \quad r < c \tag{2.8}$$

где $b_{ij} = b_{ij}(n, \nu)$ – неизвестные параметры, $f_{n\nu}$ – коэффициенты Фурье разложения функции $f(c, \theta, \psi)$ по функциям $Y_n^{(\nu)}$, $f_1 = 0$, $f_2 = f(r, \theta, \psi)$, при этом потенциалы (2.7) удовлетворяют уравнению (1.1) и $\varphi_2 \sim f$ (при условии возможности дифференцирования рядов (2.7), что для дальнейшего несущественно). Из условий сопряжения (1.4), (1.5) найдем

$$b_{1j} = \frac{N_1(-n)}{M_j(n)} f_{n\nu}, \quad b_{2j} = (-1)^j \left[1 - \frac{N_j(-n)}{M_j(n)}\right] f_{n\nu} \tag{2.9}$$

$$M_j(n) = \gamma_j (n + a_{1j})(n + a_{2j}) \tag{2.10}$$

где N_i, a_{ij} и γ_j вычисляются по формулам (2.3), (2.5), (2.6).

Выразим потенциалы непосредственно через заданную функцию f. Умножая (2.8) на $r^{a_{ij}-1}$ и интегрируя по r, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{f_{n\nu}}{n + a_{ij}} \left(\frac{r}{c}\right)^{n} Y_n^{(\nu)} = \Phi_{ij}(r, \theta, \psi), \quad r < c \tag{2.11}$$

где Φ_{ij} имеет вид (2.4). Разлагая дроби (2.9) на простейшие и свертывая с помощью формулы (2.11) ряды (2.7), потенциалы в случае трещины ($j = 1$) и завесы ($j = 2$) найдем в виде (2.1), (2.2).

Покажем, что в случае неоднородных сред с функцией проницаемости $P(\theta, \psi)$ формулы (2.1)–(2.6) сохраняются. Поскольку условия (1.4) и (1.5) выполняются по переменной r и не содержат функции $P(\theta, \psi)$, то потенциалы (2.1), (2.2) по построению удовлетворяют этим условиям соответственно при $j = 1$ и 2, причем функция φ_{1j} в D_1 не имеет особых точек, а функция φ_{2j} в D_2 имеет особые точки лишь функции f.

Очевидно, что если функция $f(r, \theta, \psi)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то и функция $r^{-1} f(c^2 r^{-1}, \theta, \psi)$ также удовлетворяет этому уравнению. Покажем, что функции Φ_{ij} (2.4) удовлетворяют уравнению (1.1). Поскольку оператор L (1.1) не содержит переменной r, то, интегрируя по частям, найдем

$$L[\Phi] = \int_0^r \left(\frac{\xi}{r}\right)^a \frac{1}{\xi} L[f] d\xi = -\int_0^r \left(\frac{\xi}{r}\right)^a \frac{1}{\xi} \partial_\xi [\xi^2 \partial_\xi f(\xi, \theta, \psi)] d\xi = -a(a-1)\Phi + (a-1)f - r\partial_r f$$

С другой стороны, для функции (2.4) имеем

$$\partial_r (r^2 \partial_r \Phi) = a(a-1)\Phi - (a-1)f + r\partial_r f$$

Здесь индексы у Φ_{ij} и a_{ij} опущены. Отсюда функции (2.4), а значит и потенциалы (2.1), (2.2) удовлетворяют уравнению (1.1).

Из формул (2.1), (2.2) при отсутствии трещины и завесы ($A \to 0$ и $B \to 0$) получим

$$\varphi_1 = 2af(r,\theta,\psi) + ah\int_0^r \left(\frac{\xi}{r}\right)^a \frac{1}{\xi} f(\xi,\theta,\psi)d\xi$$

$$\varphi_2 = f(r,\theta,\psi) - \frac{ch}{r} f(\rho,\theta,\psi) + \frac{ahc}{r}\int_0^\rho \left(\frac{\xi}{\rho}\right)^a \frac{1}{\xi} f(\xi,\theta,\psi)d\xi$$

$$a = K_2(K_1 + K_2)^{-1}, \quad h = (K_1 - K_2)(K_1 + K_2)^{-1}$$

Последнее соответствует идеальному контакту зон D_1 и D_2. Отсюда при $K_1 = 0$ следует теорема Вейса обтекания произвольным потоком непроницаемой сферы [4].

3. Пусть особые точки потенциала расположены в шаре D_1 и описываются функцией $f(r, \theta, \psi)$, которая в R^3 вне особых точек удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям на бесконечности

$$r \to \infty: \quad r^{1-a_{ij}} f \to 0, \quad r^{2-a_{ij}} \partial_r f \to 0 \tag{3.1}$$

Решения задач (1.1), (1.4) и (1.1), (1.5) при условии $\varphi_{1j} \sim f$ строятся по формулам

$$\varphi_{1j} = f(r,\theta,\psi) + (-1)^j \frac{c}{r}[f(\rho,\theta,\psi) - G_{jj}(\rho,\theta,\psi)], \quad r < c \tag{3.2}$$

$$\varphi_{2j} = G_{1j}(r,\theta,\psi), \quad r > c \tag{3.3}$$

$$G_{ij}(r,\theta,\psi) = \frac{1}{Q_j}[N_i(a_{2j})F_{2j}(r,\theta,\psi) - N_i(a_{1j})F_{1j}(r,\theta,\psi)]$$

$$N_1(a) = (1-2a)K_1, \quad N_2(a) = (2K_2 - \gamma_2)(1-a) - K_1 \tag{3.4}$$

$$F_{ij}(r,\theta,\psi) = \frac{1}{r}\int_\infty^r \left(\frac{r}{\xi}\right)^{a_{ij}} f(\xi,\theta,\psi)d\xi \tag{3.5}$$

где a_{ij}, Q_j, γ_j и ρ имеют вид (2.5), (2.6), $j = 1$ и 2 соответственно в случае трещины и завесы.

Действительно. Пусть $P = \mathrm{const}$. Разлагая гармоническую функцию f при $r > c$ в ряд

$$f(r,\theta,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} f_{n\nu}\left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} Y_n^{(\nu)} \tag{3.6}$$

потенциалы найдем в виде (2.7), где $f_1 = f(r, \theta, \psi)$, $f_2 = 0$

$$b_{1j} = (-1)^j \left[1 - \frac{N_j(-n)}{M_j(n)}\right] f_{n\nu}, \quad b_{2j} = \frac{N_1(-n)}{M_j(n)} f_{n\nu}$$

N_i, M_j, a_{ij}, γ_j вычисляются по формулам (3.4), (2.10), (2.5), (2.6). Умножая (3.6) на $r^{a_{ij}}$ и интегрируя по r, получим формулу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{f_{n\nu}}{n + a_{ij}} \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} Y_n^{(\nu)} = F_{ij}(r,\theta,\psi), \quad r > c$$

где F_{ij} имеют вид (3.5). Отсюда потенциалы (2.7) в случае трещины ($j = 1$) и завесы ($j = 2$) приводятся к виду (3.2), (3.3).

Для неоднородных сред проницаемости $P(\theta, \psi)$ решения указанных задач также имеют вид (3.2), (3.3), что с учетом (3.1) проверяется непосредственно.

Если особые точки потенциалов расположены произвольно вне и внутри включения D_1, то потенциалы найдем в виде суммы соответствующих потенциалов (2.1), (2.2) и (3.2), (3.3).

4. Полученные формулы (2.1), (2.2) и (3.2), (3.3) также дают решения краевых задач. Пусть область фильтрации D ограничена по переменной θ и (или) ψ. Тогда имеют место следующие утверждения.

Если функция $f(r, \theta, \psi)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в области D и на ∂D граничным условиям типа

$$f_{|\eta=\alpha} = \begin{cases} 0, & r<c \\ g, & r>c \end{cases}, \quad \partial_\eta f_{|\eta=\beta} = \begin{cases} 0, & r<c \\ h, & r>c \end{cases} \tag{4.1}$$

(в произвольном их сочетании), где $\eta = \theta$ или $\eta = \psi$, $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, g и h – функции соответствующих переменных, то потенциалы (2.1), (2.2) также удовлетворяют в D уравнению (1.1), условиям (4.1) и условиям сопряжения (1.4) и (1.5) соответственно при j = 1 и 2. Аналогично, если функция $f(r, \theta, \psi)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям

$$f_{|\eta=\alpha} = \begin{cases} g, & r<c \\ 0, & r>c \end{cases}, \quad \partial_\eta f_{|\eta=\beta} = \begin{cases} h, & r<c \\ 0, & r>c \end{cases} \tag{4.2}$$

где $\eta = \theta$ или $\eta = \psi$, то потенциалы (3.2), (3.3) при j = 1 и 2 являются решениями задач (1.1), (4.2), (1.4) и (1.1), (4.2), (1.5).

Последнее проверяется непосредственно с учетом того, что в формулах (2.1), (2.2), (2.4) $\xi < 0$, а в (3.2), (3.3), (3.5) $\xi > 0$, но при этих значениях на границах D соответственно $f(\xi, \theta, \psi) = 0$ и $\partial_\eta f(\xi, \theta, \psi) = 0$ (4.1), (4.2).

5. В качестве примера рассмотрим обтекание экранированного шарового включения D_1 поступательным потоком в кусочно-однородной среде. Данная задача имеет интерес в проблемах экологии: шар D_1 моделирует загрязненную зону, экранированную от внешнего чистого потока сильно- или слабопроницаемой пленкой, при этом проницаемости внешней и загрязненной зон различны и постоянны (свойства жидкости внутри и вне включения, как и выше, считаются одинаковыми).

Рассматривая в качестве характерной проницаемости и длины соответственно проницаемость внешней зоны и радиус шара D_1, потенциалы в безразмерных величинах найдем в виде

$$\varphi_{1j} = \frac{3f}{s_j}, \quad \varphi_{2j} = f + \frac{h_j v\cos\theta}{s_j r^2}, \quad f = vz = vr\cos\theta$$

$$h_j = 1 - K_1 + (3j-5)\gamma_j, \quad s_j = 2\gamma_j + 2 + K_1 \tag{5.1}$$

где v – скорость в бесконечности, $\gamma_1 = A$, $\gamma_2 = K_1 B$ (2.6). Отсюда в шаре D_1 в случае трещины (j = 1) и завесы (j = 2) имеет место поступательный поток. При этом как трещина, так и завеса при любом значении параметров K_1, A и B снижает модуль скорости в D_1. Последнее объясняется тем, что трещина принимает поток и отводит его в обход зоны D_1, а завеса препятствует потоку в эту зону. Если $A = K_1 B$, то течение в шаре в случае трещины и завесы идентичны. С увеличением параметров A и B скорости в зоне D_1 уменьшаются. При $A \to \infty$ или $B \to \infty$ сфера $r = c$ вырождается соответственно в абсолютно проницаемую пленку (каверну) или непроницаемый экран, при этом течение в D_1 в обоих случаях отсутствует.

Замечание. Если проницаемость включения D_1 меньше проницаемости внешней области D_2, т.е. $K_1 < 1$, и включение экранировано трещиной, то при условии $2\gamma_1 + K_1 =$ $= 1$ имеем $\varphi_2 = f$. В данном случае возмущения от слабопроницаемого включения и сильнопроницаемой трещины компенсируются, и внесение данного экранированного включения не искажает течение в области D_2. Аналогично для более проницаемого, чем область D_2, включения $D_1(K_1 > 1)$, экранированного слабопроницаемой завесой, при условии $K_1 = 1 + \gamma_2$ имеем $\varphi_2 = f$, т.е. внесение данного экранированного включения также не искажает течение в области D_2.

Найдем в общем случае поток из D_1 в D_2. В случае трещины $r = 1$ положительные потоки через сферу $r = 1$ в зонах D_1 и D_2 различны и соответственно равны

$$Q_1 = \frac{3\pi K_1 v}{s_1}, \quad Q_2 = Q_1 + \frac{6\pi\gamma_1 v}{s_1}$$

где s_1 имеет вид (5.1), при этом поток Q_2 в чистую зону D_2 складывается из потока Q_1 из загрязненной зоны D_1 и чистого потока, поступающего в трещину из D_2 и выходящего в эту же зону, т.е. в случае трещины "след" за включением разбавлен чистой жидкостью.

В случае завесы $r = 1$ положительные потоки через сферу $r = 1$ в зонах D_1 и D_2 совпадают и равны $Q = 3\pi K_1 v/s_2$, при этом "след" за включением состоит из загрязненной жидкости, выходящей из D_1.

Уравнение границы указанного "следа" с учетом осесимметричности течения в полуплоскостях $\psi = \mathrm{const}$ для трещины ($j = 1$) и завесы ($j = 2$) имеет вид

$$\sqrt{\frac{(u_j + 1)r}{r^3 + u_j}} = \sin\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad u_j = -\frac{2h_j}{s_j}$$

где h_j и s_j определены в (5.1) ($u_j + 1 > 0$). Отсюда полуширина "следа" $x = r\sin\theta$ монотонно меняется от $x = 1$ на шаре D_1 до $x = u_j + 1$ при $r \to \infty$. При этом в случае трещины "след" при удалении от включения расширяется (сужается) при $2\gamma_1 + K_1 > 1$ ($2\gamma_1 + K_1 < 1$). В случае завесы "след" расширяется (сужается) при $K_1 > \gamma_2 + 1$ ($K_1 < \gamma_2 + 1$). При $2\gamma_1 + K_1 = 1$ или $K_1 = \gamma_2 + 1$ ширина "следа" не меняется, что также следует из данного выше замечания.

Для сравнения воздействия трещины и завесы на течение положим, что их раскрытия одинаковы, а проницаемости обратно пропорциональны, т.е. параметры трещины и завесы совпадают $A = B$ и $\gamma_2 = K_1\gamma_1$ (2.6). В данном случае при $K_1 < 1$ ($K_1 > 1$) трещина в большей (меньшей) степени снижает скорость в D_1, чем завеса.

Заключение. Полученные в статье формулы по сравнению с известными результатами о шаровом включении позволяют строить потенциалы течений, индуцированных произвольно заданными (вне и внутри включения) особыми точками и (или) краевыми условиями. При этом включение экранировано трещиной или завесой, проницаемость пористой среды меняется непрерывно по соответствующим координатам вдоль границы включения и область фильтрации может быть ограниченной. Разобранный при-мер позволяет дать практические рекомендации при экранировании загрязненных зон. В частности, показано, что более проницаемое, чем окружающий грунт, включение следует экранировать завесой, а менее проницаемое – трещиной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пилатовский В.П.* Основы гидромеханики тонкого пласта. М.: Недра, 1966. 317 с.
2. *Чернышев С.Н.* Движение воды по сетям трещин. М.: Недра, 1979. 141 с.
3. *Бочевер Ф.М., Лапшин И.Н., Орадовская А.Е.* Защита подземных вод от загрязнения. М.: Недра, 1979. 254 с.
4. *Milne-Thomson L.M.* Theoretical hydrodynamics. L.; N.Y.: Macmillan, 1955. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
5. *Копаев А.В., Радыгин В.М.* Фильтрационные теоремы о сферах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 2. С. 105–109.

6. *Холодовский С.Е.* Интегральные представления гармонических функций, удовлетворяющих обобщенным условиям сопряжения на луче (отрезке) // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 2. С. 355–357.
7. *Холодовский С.Е.* О фильтрации жидкости в кусочно-однородных средах с трещинами и завесами, расположенными на одной прямой // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 6. С. 85–91.

Чита
E-mail:hol@megalink.ru

Поступила в редакцию
10.V.2001