МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 2002

УДК 532.529.5:532.132

© 2002 г. В.А. БАБКИН

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ПОРИСТОЙ СРЕДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЯ БРИНКМАНА

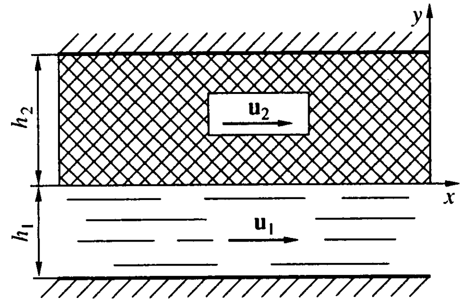
Получены точные решения трех задач, в которых использованы уравнения фильтрации Бринкмана: о ламинарном течении жидкости между параллельными плоскими стенками, одна из которых твердая, а другая – плоский слой насыщенной пористой среды; о движении плоского пористого слоя между параллельными слоями вязкой жидкости; о ламинарном течении жидкости в цилиндрическом канале, ограниченном кольцевом пористым слоем.

Ключевые слова: фильтрация, уравнение Бринкмана, плоские пористые слои, вязкая жидкость.

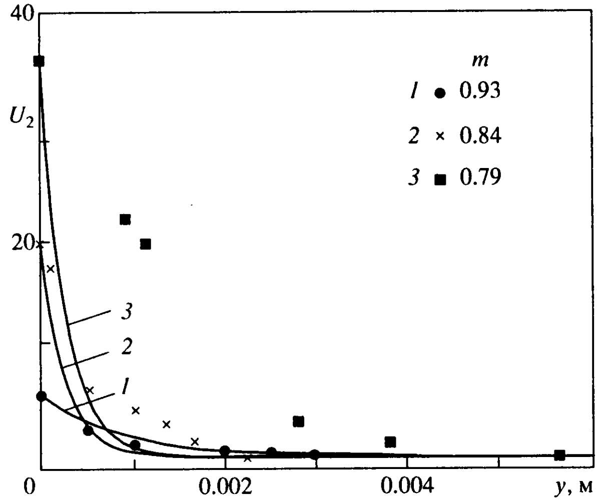
Ламинарные течения вязкой жидкости в областях, прилегающих к границе раздела потока жидкости и насыщенной пористой среды, длительное время привлекают внимание исследователей [1–5]. Для сред с большой пористостью в качестве определяющего уравнения обычно используется уравнение Бринкмана [6]. При постановке задач основные трудности возникают при формулировке граничных условий на поверхности, отделяющей поток жидкости от пористой среды. Один из вариантов граничных условий первоначально был предложен Биверсом и Джозефом [1], а затем независимо повторен Саффманом [2]. С помощью так называемого коэффициента проскальзывания они связали градиент скорости со стороны свободного потока жидкости со скоростью движения жидкости в пористой среде. Модельные представления Бринкмана, Биверса и Джозефа находят вполне удовлетворительное подтверждение в экспериментальных исследованиях [5]. Были предложены и иные граничные условия [4], но они требуют дополнительных обоснований.

Полученные к настоящему времени теоретические и экспериментальные результаты позволяют достаточно строго ставить и решать разнообразные задачи, в которых учитывалась бы также и фильтрация жидкости в пористой среде. В данной работе решаются следующие три задачи: о течении вязкой жидкости между твердой плоской стенкой и параллельным ей слоем насыщенной пористой среды; о движении плоского пористого слоя между параллельными ему слоями вязкой жидкости и о течении вязкой жидкости в круглой трубе, твердые стенки которой покрыты слоем насыщенной пористой среды. Во всех задачах течения установившиеся; жидкость вязкая, несжимаемая; пористая среда однородная; уравнения фильтрации – уравнения Бринкмана, массовые силы пренебрежимо малы. Граница раздела насыщенной пористой среды и вязкой жидкости рассматривается как поверхность разрыва и граничные условия на ней формулируются соответствующим образом [7]. Из полученных решений следует, что при определенных условиях граничное условие Биверса–Джозефа является следствием непрерывности касательных напряжений действующих по жидкой части границы, разделяющей поток и пористую среду. Решения некоторых задач сравниваются с результатами экспериментов.

1. Вязкая жидкость между твердой стенкой и пористым слоем. Пусть пространство между двумя бесконечными параллельными плоскими стенками занято слоем вязкой жидкости постоянной толщины h_1 и слоем насыщенной пористой среды постоянной толщины h_2 (фиг. 1). Стенки твердые. Введем декартову систему координат: ось x –



Фиг. 1. Схема течения вязкой жидкости между твердой стенкой и пористым слоем



Фиг. 2. Профили безразмерных скоростей фильтрации U_2 в пористом слое, построенные по (1.7) (кривые 1–3) и экспериментальные точки [5] при течении вязкой жидкости между твердой стенкой и пористым слоем. Пористость m = 0.93; 0.86; 0.79

в плоскости раздела слоев, ось y – по нормали к стенкам. В обоих слоях жидкость находится в движении под действием перепада давления, приложенного в направлении оси x. Пусть $\mathbf{u}_1$ – локальная скорость жидкости в слое $(-h_1) < y < 0$ и $\mathbf{u}_2$ – локальная скорость фильтрации жидкости в слое $0 < y < h_2$. Под скоростью фильтрации понимается скорость движения жидкости, локально осредненная по объему пористой среды [7].

Учитывая симметрию течений жидкости в слоях, проекции скоростей отыскиваются в виде

$$u_{ix} = u_i(y), \qquad u_{iy} = u_{iz} = 0, \qquad i = 1, 2 \tag{1.1}$$

Уравнения жидкости в слоях соответственно имеют вид

$$\eta \frac{d^2 u_1}{dy^2} = -P, \qquad P = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{1.2}$$

$$\eta' \frac{d^2 u_2}{dy^2} - \frac{\eta}{K} u_2 = -P \tag{1.3}$$

где p – давление, η – динамическая вязкость жидкости, η' – эффективная вязкость жидкой фазы в пористой среде, которая используется для определения вязких напряжений в уравнении Бринкмана, K – коэффициент проницаемости Дарси.

Граничные условия на твердых стенках:

$$u_1(-h_1) = u_2(h_2) = 0 \tag{1.4}$$

Рассматривая плоскость $y = 0$, разделяющую слои, как поверхность разрыва и пользуясь общими условиями на разрывах подобного типа [7], получим следующие граничные условия

$$u_1(0) = u_2(0), \qquad \eta\frac{du_1(-0)}{dy} = \eta'\frac{du_2(+0)}{dy} \tag{1.5}$$

Производные скоростей u_1 и u_2 в точке $y = 0$ односторонние.

Решения уравнений (1.2), (1.3) с граничными условиями (1.4) и (1.5) имеют вид

$$u_1 = -\frac{P}{2\eta}y^2 + C_1 y + C_2 \tag{1.6}$$

$$u_2 = u_f + B_1\exp(s) + B_2\exp(-s) \tag{1.7}$$

$$C_1 = \frac{2\alpha u_f}{\sqrt{K}}\left[(1+a_-)\operatorname{ch}s_2 - \frac{1}{2D}\right], \qquad C_2 = \alpha^2 s_1 u_f\left[\frac{2(\operatorname{ch}s_2 - 1) + s_1\operatorname{sh}s_2}{2D}\right]$$

$$B_1 = u_f[(1+a_-)\exp(-s_2) - 2a_+], \qquad B_2 = u_f[2a_- - (1+a_-)\exp(s_2)]$$

$$u_f = \frac{PK}{\eta}, \qquad s = \frac{y}{\alpha\sqrt{K}}, \qquad s_i = \frac{h_i}{\alpha\sqrt{K}}, \qquad \alpha^2 = \frac{\eta'}{\eta}, \qquad a_\pm = \frac{1\pm\alpha^2 s_1}{4D}$$

$$D = \operatorname{sh}s_2 + \alpha^2 s_1\operatorname{ch}s_2, \qquad i = 1,2 \tag{1.8}$$

При $s_2 \to +\infty$ формула (1.6) совпадает с решением Биверса–Джозефа [1].

Если формулы (1.6) – (1.8) подставить во второе граничное условие (1.5), то получим равенство

$$\frac{du_1(-0)}{dy} = \frac{\alpha u_f}{\sqrt{K}}\frac{(2-\alpha^2 s_1^2)\operatorname{ch}s_2 - 2}{2D} \tag{1.9}$$

которое, на первый взгляд, лишь отдаленно напоминает граничное условие Биверса–Джозефа. Однако, если в нем перейти к пределу при $s_2 \to +\infty$ и ввести скорость на границе $u_b = u_i(0) = C_2$, которую также взять при $s_2 \to +\infty$, то получится формула

$$\frac{du_1(-0)}{dy} = \frac{\alpha}{\sqrt{K}}(u_f - u_b) \tag{1.10}$$

в данной системе координат в точности совпадающая с граничным условием Биверса–Джозефа, и, таким образом, граничное условие Биверса–Джозефа является следствием второго граничного условия (1.5). Даже при большой пористости величина K весьма мала ($\sim 10^{-10}$–10^{-8} м^2 [5–7]), так что при $\alpha \sim 10$ и $h_2 \sim 0.01$ м имеем $s_2 \sim 10$–100. При использовании функций $\exp(s)$, $\operatorname{sh} s$ и $\operatorname{ch} s$ такие значения s_2 можно рассматривать как большие.

На фиг. 2 представлены экспериментальные точки [5] и профили безразмерной скорости $U_2 = u_2/u_f$, вычисленные по формуле (1.7) при тех же значениях параметров пористой среды. Параметры, использованные в расчетах, приведены в таблице. В соответствии с выводами [8] решение задачи с уравнением Бринкмана для пористой среды хорошо подтверждается опытами лишь при пористости $m = 0.93$. В этом случае влияние эффективной вязкости η' сказывается в слое толщиной $\delta \approx 5$ мм. При уменьшении пористости толщина приграничного вязкого слоя δ быстро убывает и в пористом слое устанавливается фильтрация по закону Дарси со скоростью u_f.

m	K, м^2	α	h_1, м	h_2, м
0.93	$5.22 \cdot 10^{-8}$	3.910	0.01	0.02
0.86	$3.26 \cdot 10^{-8}$	1.480	0.01	0.02
0.79	$9.24 \cdot 10^{-9}$	1.485	0.01	0.02

Интегрированием профиля скоростей (1.5) в пределах от $(-h_1)$ до 0 получается формула для объемного расхода Q на единицу ширины потока (без учета фильтрации)

$$Q = Q_0\left[1+\frac{3(2\operatorname{ch}s_2+s_1\operatorname{sh}s_2-2)}{s_1 D}\right],\qquad Q_0=\frac{Ph_1^3}{12\eta} \tag{1.11}$$

Величина Q_0 – расход при условии, что плоскость $y = 0$ является твердой стенкой. Таким образом, второе слагаемое в квадратных скобках характеризует влияние пористого слоя на поток. Например, в случае [5] при $m = 0.93$ имеем $Q/Q_0 = 1.0205$. Если $s_2 \to +\infty$, формула (1.11) совпадает с соответствующей формулой Биверса–Джозефа [1].

2. Пористый слой и вязкая жидкость между параллельными плоскими стенками. Пусть между параллельными слоями вязкой жидкости постоянной толщины находится насыщенный пористый слой толщины $2h_2$. Слои жидкости ограничены параллельными плоскими стенками, расстояние между которыми $2h_1$ (фиг. 3). Пористый слой и вязкая жидкость движутся под действием приложенного перепада давления. Стенки твердые, скелет пористого слоя жесткий. Требуется найти скорости жесткого скелета $\mathbf{w}$, а также жидкости между твердыми стенками и пористым слоем $\mathbf{u}_1$ и жидкости в пористом слое $\mathbf{u}_2$. Подобного рода задачи возникают при стержневых течениях волокнистой суспензии [9, 10].

Не уменьшая по существу общности задачи, ограничимся случаем, когда слои жидкости и пористый слой симметричны относительно горизонтальной плоскости, расположенной на расстоянии h_1 от стенок (фиг. 3). Система координат декартова: ось x в плоскости симметрии; ось y перпендикулярна стенкам.

Пусть перепад давления создан в направлении оси x. В пренебрежении массовыми силами проекции скоростей отыскиваются в виде (1.1). Уравнением движения в слоях является уравнение (1.2) и в пористой среде – уравнение (1.3), в котором скорость u_2 заменена на относительную скорость $(u_2 - w)$.

Граничные условия аналогичны условиям (1.5):

$$u_1(\pm h_1)=0,\qquad u_1(\pm h_2)=u_2(\pm h_2),\qquad \eta\frac{du_1(\pm h_2)}{dy}=\eta'\frac{du_2(\pm h_2)}{dy} \tag{2.1}$$

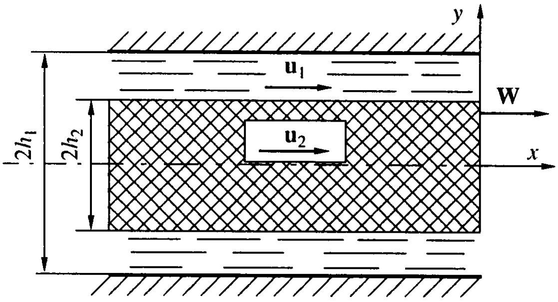
Решение поставленной задачи имеет вид

$$u_1(y)=\frac{P}{2\eta}(h_1^2-y^2) \tag{2.2}$$

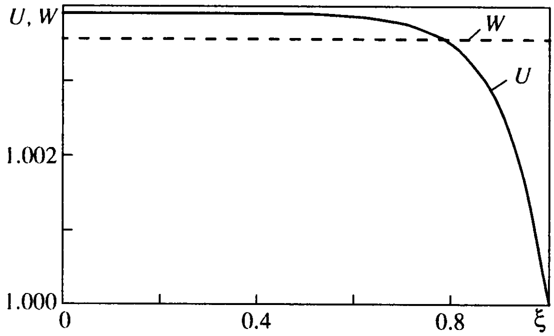
$$u_2(s)=u_f+w+(u_b-u_f-w)\frac{\operatorname{ch}s}{\operatorname{ch}s_2} \tag{2.3}$$

$$w=u_b-u_f+\frac{Ph_2\sqrt{K}}{\alpha\eta}\frac{\operatorname{ch}s_2}{\operatorname{sh}s_2},\qquad u_b=\frac{P(h_1^2-h_2^2)}{2\eta} \tag{2.4}$$

Величины α, s, s_1, s_2 и u_f определены формулами (1.8).



Фиг. 3. Схема движения пористого слоя между слоями вязкой жидкости



Фиг. 4. Профили безразмерных скоростей жидкой фазы U (сплошная) и скелета W (штриховая) при движении пористого слоя между слоями вязкой жидкости ($m = 0.93$)

Подставляя решение (2.3) в третье граничное условие (2.1) при $y = h_2$, получим равенство

$$\frac{du_1(h_2+0)}{dy} = \frac{\alpha}{\sqrt{K}}(u_b - u_f - w)\,\mathrm{th}\, s_2 \tag{2.5}$$

которое с точностью до множителя th s_2 совпадает с граничным условием Биверса–Джозефа для пористой среды, движущейся со скоростью w. При $s_2 \to +\infty$ множитель th $s_2 \to 1$ и формула (2.5) в точности переходит в условие Биверса–Джозефа. Аналогичное равенство получается и при $y = -h_2$.

Для оценки влияния пористости на течение жидкости воспользуемся данными [5] при пористости $m = 0.93$ (см. п. 1), полагая $h_1 = 2$ см и $h_2 = 1$ см. На фиг. 4 представлены графики безразмерных скоростей $U(\xi) = u_2(y)/u_b$ и $W(\xi) = w/u_b$, где $\xi = y/h_2$, в верхней половине пористого слоя $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. В области $0.786 < \xi \leqslant 1$ жидкая фаза движется медленнее скелета, тогда как при $0 \leqslant \xi < 0.786$ она, напротив, движется быстрее. Максимальная разность скоростей достигается на границе раздела фаз $\xi = 1$, но она невелика. В рассматриваемом примере разность скоростей не превосходит 0.4% от скорости скелета. Если разности скоростей такого порядка не играют существенной роли, то ими естественно можно пренебречь, что, например, и сделано в [9, 10].

3. Круглая труба с пористым слоем. Пусть на внутреннюю твердую стенку круглой трубы наложен концентрический пористый слой. Меньший радиус слоя a_1, больший – a_2. В свободном пространстве и в пористом слое под действием приложенного перепада давления движется вязкая несжимаемая жидкость. Найдем распределение скоростей жидкости в каждой из областей и объемный расход.

Система координат цилиндрическая: ось x – по оси трубы в сторону течения; r – расстояние от оси трубы по радиусу; φ – полярный угол.

Пусть $\mathbf{u}_1$ – скорость жидкости в точках области $0 \leqslant r < a_1$ и $\mathbf{u}_2$ – локально осредненная скорость в точках пористого слоя $a_1 < r < a_2$. В пренебрежении массовыми силами скорости отыскиваются в виде

$$u_{ix} = u_i(r), \quad u_{ir} = u_{i\varphi} = 0, \quad i = 1,2 \tag{3.1}$$

Уравнения движения жидкости и граничные условия имеют вид

$$\eta\left(\frac{d^2u_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_1}{dr}\right) = -P, \qquad P = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.2}$$

$$\eta'\left(\frac{d^2u_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_2}{dr}\right) - \frac{\eta}{K}u_2 = -P \tag{3.3}$$

$$u_1(a_1) = u_2(a_1), \quad u_2(a_2) = 0, \qquad \eta\frac{du_1(a_1 - 0)}{dr} = \eta'\frac{du_2(a_1 + 0)}{dr} \tag{3.4}$$

Решение задачи имеет вид

$$u_1(r) = -\frac{Pr^2}{4\eta} + C \tag{3.5}$$

$$u_2(s) = u_f + B_1 I_0(s) + B_2 K_0(s) \tag{3.6}$$

$$C = u_f + B_1 I_0(s_1) + B_2 K_0(s_1) + \frac{Pa_1^2}{4\eta}$$

$$B_1 = -\left(\frac{1}{2}s_1 K_0(s_2) + K_1(s_1)\right)\frac{u_f}{D}, \qquad B_2 = \left(\frac{1}{2}s_1 I_0(s_2) - I_1(s_1)\right)\frac{u_f}{D}$$

$$s = \frac{r}{\alpha\sqrt{K}}, \quad s_i = \frac{a_i}{\alpha\sqrt{K}}, \quad D = I_0(s_2)K_1(s_1) + I_1(s_1)K_0(s_2), \quad i = 1,2$$

Здесь $I_0(s)$, $K_0(s)$, $I_1(s)$, $K_1(s)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка, α и u_f определены формулами (1.8).

Покажем, что подстановка решения (3.6) в третье граничное условие (3.4) при определенных условиях приводит к граничному условию Биверса–Джозефа. Перейдем в решении (3.6) к пределу при $s_2 \to +\infty$

$$u_2(s) = u_f\left(1 + \frac{s_1}{2}\frac{K_0(s)}{K_1(s_1)}\right) \tag{3.7}$$

Вводя с помощью формулы (3.7) скорость жидкости u_b на границе сред по формуле $u_b = u_2(s_1)$, получим

$$u_2(s) = u_f + (u_b - u_f)\frac{K_0(s)}{K_0(s_1)} \tag{3.8}$$

Подстановка (3.8) в третье граничное условие (3.4) дает

$$\frac{du_1(a_1 - 0)}{dr} = (u_f - u_b)\frac{\alpha}{\sqrt{K}}\frac{K_1(s_1)}{K_0(s_1)} \tag{3.9}$$

При больших s_1, когда $K_1(s_1)/K_0(s_1) \to 1$, формула (3.9) переходит в граничное условие Биверса–Джозефа

$$\frac{du_1(a_1-0)}{dr} = \frac{\alpha}{\sqrt{K}}(u_f - u_b) \tag{3.10}$$

Предельное решение (3.7) удовлетворяет граничному условию $u_2(+\infty) = u_f$, но не заданному второму граничному условию (3.4). И все же, если решить задачу с этим условием, а также с первым условием (3.4) и условием Биверса–Джозефа (3.10), то получим решение

$$u_2(s) = u_f\left(1 + \frac{s_1}{2}\frac{K_0(s)}{K_0(s_1)}\right) \tag{3.11}$$

которое не совпадает с решением (3.7), хотя если ввести скорость u_b, то формула (3.11) снова примет вид (3.8). Однако в этом случае нарушается условие непрерывности осредненных касательных напряжений (3.4). Действительно, из формул (3.5) и (3.11) следует

$$\frac{du_1(a_1)}{dr} = -\frac{Pa_1}{2\eta}, \qquad \frac{du_2(a_1)}{dr} = -\frac{Pa_1}{2\alpha^2\eta}\frac{K_1(s_1)}{K_0(s_1)} \tag{3.12}$$

Третье условие (3.4), очевидно, будет выполняться только в случае, когда $s_1 \to$ $\to +\infty$. Аналогичный результат получится, если условие на бесконечности заменить вторым граничным условием (3.4).

Ввиду громоздкости аналитических формул влияние пористости на расход Q оценим на конкретном примере. Пусть $a_1 = 5$ мм, $a_2 = 10$ мм, параметры пористой среды – по таблице при $m = 0.93$. Интегрирование профилей скоростей (3.5), (3.6) по сечению потока дает $Q = 1.115\ Q_0$ при учете фильтрации через пористый слой и $Q = 1.110\ Q_0$, если фильтрация не учитывается. Здесь $Q_0 = \pi a_1^4 P/8\eta$ – расход через круглое сечение радиуса a_1 трубы с твердыми стенками. Таким образом, большая пористость слоя может заметно сказаться на расходе.

Заключение. Сравнение решения задачи о течении вязкой жидкости между твердой стенкой и пористым слоем с экспериментальными результатами [5] показывает, что уравнение Бринкмана может быть использовано для описания фильтрации жидкости в высокопористых средах. Однако с уменьшением пористости оно приводит к заниженным по сравнению с экспериментальными данными значениям скорости фильтрации.

В рассмотренных задачах в качестве граничных условий на поверхности раздела вязкой жидкости и пористой среды использованы условия равенства скоростей и касательных напряжений. При определенных предположениях из равенства касательных напряжений следует граничное условие Биверса–Джозефа. Однако последнее не равносильно условию равенства касательных напряжений. Если из решений задач, полученных с использованием равенства касательных напряжений, следуют решения, полученные с условием Биверса–Джозефа, то обратное, вообще говоря, неверно. Более того, решения, полученные с этим условием, не обеспечивают необходимую из условий на скачке непрерывность касательных напряжений.

Разность скоростей скелета пористой среды и обтекающей ее вязкой жидкости (эффект проскальзывания) приводит к изменению профиля скоростей вязкой жидкости. При большой пористости стенок, ограничивающих поток, их влияние может оказаться достаточно ощутимым, и тогда решение задачи в точной постановке становится необходимым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beavers G.S., Joseph D.D.* Boundary conditions at a naturally permeable wall // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Pt 1. P. 197–207.
2. *Saffman P.G.* On the boundary condition at the surface of a porous medium // Stud. Appl. Math. 1971. V. 50. № 2. P. 93–101.
3. *Larson R.E., Higdon J.J.L.* Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. Pt 2. Transverse flow // J. Fluid Mech. 1987. V. 178. P. 119–136.
4. *Vafai K., Kim S.J.* Fluid mechanics of the interface region between a porous medium and a fluid layer – an exact solution // Intern. J. Heat and Fluid Flow. 1990. V. 11. № 3. P. 254–256.
5. *Gupte S.K., Advani S.G.* Flow near the permeable boundary of a porous medium: An experimental investigation using LDA // Experim. Fluids. 1997. V. 22. № 5. P. 408–422.
6. *Brinkman H.C.* A calculation of viscous force exerted by flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Scient. Res. Ser. A. 1947. V. 1. № 1. P. 27–34.
7. *Николаевский В.Н.* Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996. 447 с.
8. *Durlofsky L., Brady J.F.* Analysis of Brinkman equation as a model for flow in porous media // Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 11. P. 3329–3341.
9. *Бабкин В.А.* Сопротивление при стержневом течении волокнистой суспензии в трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 1. С. 88–93.
10. *Бабкин В.А.* Введение в механику волокнистых суспензий. Петрозаводск: Изд-во Петрозаводск. ун-та, 1993. 108 с.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
24.VIII.2001