

УДК 532.526.4

© 2002 г. И.И. ВИГДОРОВИЧ

## ЗАКОНЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ И КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА РЕЙНОЛЬДСА В ПРИСТЕНОЧНОЙ ОБЛАСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СО ВДУВОМ И ОТСОСОМ

Для промежуточной области турбулентного пограничного слоя со вдувом и отсосом, расположенной вблизи стенки вне вязкого подслоя, устанавливаются законы подобия для распределения осредненной скорости, касательного напряжения и среднеквадратичной поперечной пульсации скорости. Соотношение подобия для профиля скорости является обобщением на случай наличия потока массы на стенке известного логарифмического закона.

*Ключевые слова:* турбулентность, тензор Рейнольдса, пограничный слой, подобие, вдув-отсос.

Логарифмический закон для профиля скорости может быть обобщен на случай вдува или отсоса на стенке. Соответствующее соотношение получено в [1, 2] (см. также [3, 4]) на основе формулы Прандтля для длины пути перемешивания. В [5, 6] (см. также [3]) предлагались другие зависимости.

В настоящей работе асимптотическое поведение скорости, касательного напряжения и среднеквадратичной поперечной пульсации скорости в пристеночной области исследуется на основе гипотезы замыкания, предполагающей связь общего вида между компонентами напряжений Рейнольдса и полем осредненной скорости. Полученное представление для профиля скорости в главном члене совпадает с предложенным [1, 2]. Различие состоит в двух дополнительных членах более высокого порядка, один из которых, по результатам сопоставления с экспериментальными и расчетными данными, можно положить равным нулю, а другой существенен только при сильном отсосе, когда касательное напряжение на стенке много больше, чем на внешней границе пристеночной области. Впервые такое представление без вывода указано в [7, 8].

Устанавливаются также соотношения подобия для распределения касательного напряжения и среднеквадратичной поперечной пульсации скорости.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим течение несжимаемой жидкости в пристеночной области турбулентного пограничного слоя на гладкой проницаемой поверхности. Скорость вдува или отсоса будем считать направленной по нормали к стенке. В тонкой пристеночной области поперечные градиенты осредненных параметров много больше продольных, поэтому в первом приближении течение описывается известным уравнением

$$-\langle u'v' \rangle + \nu \frac{du}{dy} = u_{\tau}^2 + v_w u \quad (1.1)$$

Здесь  $u$  – продольная составляющая осредненной скорости,  $y$  – расстояние от стенки,  $v_w$  – скорость вдува или отсоса. В соответствии с условием на стенке  $u(0) = 0$

$$u_{\tau}^2 = \nu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}$$

Уравнение (1.1) описывает турбулентное течение вдоль бесконечной плоскости, в котором поперечная скорость и давление постоянны, а продольная составляющая скорости и касательное напряжение зависят только от расстояния до плоскости.

В соответствии с общей теорией определяющих соотношений для турбулентных пристенных течений (см., например, [9]) касательное напряжение и другие компоненты тензора Рейнольдса могут быть вычислены по заданному полю вектора осредненной скорости, положению твердой границы и физическим константам жидкости. В рассматриваемом случае поле скорости определяется постоянной поперечной составляющей  $v_w$  и профилем продольной составляющей  $u(y)$ . Функцию  $u(y)$ , в свою очередь, можно считать заданной, если известны все ее производные, вычисленные в некоторой точке.

С учетом этих соображений предположим, что напряжение сдвига  $-\rho \langle u'v' \rangle$  в данной точке пристеночной области пограничного слоя зависит от плотности  $\rho$  и вязкости  $\nu$  жидкости, расстояния от стенки  $y$ , скорости вдува или отсоса  $v_w$ , а также от производных от продольной составляющей осредненной скорости по поперечной координате до порядка  $N + 1$  включительно ( $N$  – любое). Тогда из соображений размерности

$$\langle u'v' \rangle = - \left( y \frac{du}{dy} \right)^2 T(R_l^{-1}, \beta, \Pi_1, \dots, \Pi_N) \quad (1.2)$$

$$R_l = \frac{y^2}{\nu} \frac{du}{dy}, \quad \beta = \left( \frac{y}{v_w} \frac{du}{dy} \right)^{-1}, \quad \Pi_n = \left( y \frac{d}{dy} \right)^n \ln \left( y \frac{du}{dy} \right), \quad 1 \leq n \leq N$$

Здесь локальное число Рейнольдса  $R_l$  есть отношение характерных значений турбулентной и молекулярной вязкости. Выражение для касательного напряжения (1.2) представляет собой аналитическую формулировку принятой гипотезы замыкания. Дальнейшее исследование будет проведено в общем виде для любой функции  $T$ , удовлетворяющей условию  $T(0, \dots, 0) \neq 0$ , непрерывной в области определения и имеющей частные производные по всем аргументам.

Компонента тензора Рейнольдса  $\langle v'^2 \rangle$ , связанная с поперечными пульсациями скорости, ведет себя аналогично касательному напряжению. Для нее примем

$$\langle v'^2 \rangle = \left( y \frac{du}{dy} \right)^2 T_2(R_l^{-1}, \beta, \Pi_1, \dots, \Pi_N) \quad (1.3)$$

где  $T_2$  удовлетворяет тем же условиям, что и функция  $T$  в соотношении (1.2).

Компоненты  $\langle u'^2 \rangle$ ,  $\langle w'^2 \rangle$ , связанные с пульсациями скорости в направлениях, параллельных стенке, рассматриваться не будут. Их поведение вблизи обтекаемой поверхности имеет более сложный характер (см., например, [10–12]) и недостаточно полно изучено даже в случае нулевой поперечной скорости на стенке.

В переменных стенки

$$y_+ = \frac{y u_\tau}{\nu}, \quad u_+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad v_w^+ = \frac{v_w}{u_\tau}$$

уравнение (1.1) с учетом (1.2) принимает вид

$$\left( y_+ \frac{du_+}{dy_+} \right)^2 T(R_l^{-1}, \beta, \Pi_1, \dots, \Pi_N) + \frac{du_+}{dy_+} = 1 + v_w^+ u_+ \quad (1.4)$$

$$R_l = y_+^2 \frac{du_+}{dy_+}, \quad \beta = \left( \frac{y_+}{v_w^+} \frac{du_+}{dy_+} \right)^{-1}, \quad \Pi_n = \left( y_+ \frac{d}{dy_+} \right)^n \ln \left( y_+ \frac{du_+}{dy_+} \right), \quad 1 \leq n \leq N$$

Для уравнения (1.4) имеется одно граничное условие:  $u_+(0, v_w^+) = 0$ . Решение уравнения (1.4) зависит от параметра  $v_w^+$ , который при вдуве может изменяться в диапазоне  $0 \leq v_w^+ < \infty$ . На внешней границе пристеночной области скорость  $u_+$  достигает достаточно больших значений; при этом правая часть (1.4) остается положительной. Следовательно, при отсосе  $v_w^+$  всегда есть малая величина.

Будем рассматривать две подобласти в пристеночной области пограничного слоя: вязкий подслой, в котором турбулентные и вязкие напряжения одного порядка, и внешнюю часть пристеночной области, где молекулярной вязкостью можно пренебречь.

**2. Обобщение логарифмического закона для случаев вдува и отсоса. Правила подобия для компонент тензора Рейнольдса.** Исследуем теперь асимптотику решения уравнения (1.4) при  $y_+ \rightarrow \infty$ , т.е. во внешней подобласти.

Рассмотрим сначала частный случай непроницаемой стенки  $v_w^+ = 0$ . При условии  $T(0, \dots, 0) \neq 0$ , которое поставлено выше, функция  $u_+(y_+, 0)$  подчиняется известному логарифмическому закону

$$u_+(y_+, 0) = \frac{1}{\kappa} (\ln y_+ + C_0) + O(y_+^{-\alpha}), \quad y_+ \rightarrow \infty, \quad \kappa = \sqrt{T(0, \dots, 0)}, \quad \alpha > 0 \quad (2.1)$$

В этом можно убедиться непосредственной подстановкой (2.1) в уравнение (1.4). Согласно (2.1), роль постоянной Кармана  $\kappa$  для гипотезы замыкания (1.2) играет величина  $[T(0, \dots, 0)]^{1/2}$ .

В настоящее время по-прежнему существует проблема выбора численных значений постоянных  $\kappa$  и  $C_0$ . Данные измерений разных авторов характеризуются заметным разбросом (см., например, обзор [6]). Результаты экспериментов, которые выполнены в самое последнее время [13–15] в круглой трубе и пограничном слое при очень больших числах Рейнольдса, также не вносят ясности в этот вопрос. Далее используются значения  $\kappa = 0.41$ ,  $C_0 = 2.05$ , рекомендованные для пограничного слоя [16].

Подставляя (2.1) в (1.3), получим, что среднеквадратичная поперечная пульсация скорости во внешней подобласти постоянна:

$$\sqrt{\langle v'^2 \rangle_+} = \frac{1}{\sigma_2} + O(y_+^{-\alpha}), \quad y_+ \rightarrow \infty, \quad \sigma_2 = \kappa [T_2(0, \dots, 0)]^{-1/2}, \quad \alpha > 0 \quad (2.2)$$

Величина конечного предела  $1/\sigma_2$  есть универсальная константа. Большинство экспериментов дает для  $\sigma_2$  значения близкие, но несколько меньшие единицы [6]. В дальнейшем, согласно [17], будем считать  $\sigma_2 = 0.95$ .

Рассмотрим теперь общий случай вдува или отсоса на пластине при  $v_w^+ \neq 0$ . Переходя в (1.4) к новым переменным  $y_*$  и  $w$ , получим уравнение

$$\left( \frac{dw}{d \ln y_*} \right)^2 T(R_l^{-1}, \beta, \Pi_1, \dots, \Pi_N) + \frac{2}{y_* |w|} \frac{dw}{d \ln y_*} = 1, \quad w(0) = \frac{2}{v_w^+} \quad (2.3)$$

$$R_l = \frac{y_* |w|}{2} \frac{dw}{d \ln y_*}, \quad \beta = \left( \frac{w}{2} \frac{dw}{d \ln y_*} \right)^{-1}, \quad \Pi_n = \frac{d^n}{(d \ln y_*)^n} \ln \left( |w| \frac{dw}{d \ln y_*} \right)$$

$$y_* = \frac{y |v_w^+|}{v} = |v_w^+| y_+, \quad w = \frac{2}{v_w^+} \sqrt{1 + v_w^+ u_+} \quad (2.4)$$

Введенная вместо  $y_+$  переменная  $y_*$  имеет физический смысл числа Рейнольдса,

образованного по расстоянию от стенки и скорости вдува или отсоса; переменная  $w$ , как нетрудно видеть, связана с касательным напряжением в пристеночной области

$$w = \frac{2}{v_w} \sqrt{\tau}, \quad \tau = -\langle u'v' \rangle + \nu \frac{du}{dy} \quad (2.5)$$

Замена переменных (2.4) выбрана так, чтобы уравнение (2.3) не зависело от параметра  $u_w^+$ . В случае отсоса искомая функция  $w$  изменяется в диапазоне  $2/u_w^+ \leq w < 0$ , при вдуве  $w \geq 2/u_w^+$ .

Во внешней части пристеночной области вязкими членами, т.е. величинами  $O(y_*^{-1} w^{-1})$  в уравнении (2.3) можно пренебречь, что дает для функции  $z(w) = dw/d \ln y_*$  уравнение, в которое переменная  $y_*$  явно не входит

$$z^2(w) T(0, \beta, \Pi_1, \dots, \Pi_N) = 1$$

$$\beta = \frac{2}{wz(w)}, \quad \Pi_n = \left( z(w) \frac{d}{dw} \right)^n \ln[|w| z(w)] \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) будем рассматривать в интервалах  $-\infty < w \leq 0$  и  $0 \leq w < +\infty$  для случаев отсоса и вдува соответственно.

Асимптотика решения уравнения (2.6) для больших по модулю значений переменной  $w$  имеет вид

$$z(w) = \frac{1}{\kappa} - \frac{2\omega}{\kappa^2 w} + O(w^{-2}), \quad w \rightarrow \pm\infty \quad (2.7)$$

$$\omega = \frac{1}{4\kappa^2} \frac{\partial}{\partial \Pi_1} T(0, \dots, 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} T(0, \dots, 0)$$

Отсюда получим

$$\int_0^w \frac{dw}{z(w)} = \kappa w + 2\omega \ln |w| + C_1 + \kappa \Omega \left( \frac{w}{2} \right) \quad (2.8)$$

Здесь  $C_1$  – постоянная интегрирования, функция  $\Omega$  подчинена условию

$$\Omega(w) = O(w^{-1}), \quad w \rightarrow \pm\infty \quad (2.9)$$

Теперь асимптотику решения уравнения (2.3) на внешней границе пристеночной области можно искать в виде

$$\int_0^w \frac{dw}{z(w)} = \ln y_* + C_2 (v_w^+) + \varphi(y_*, v_w^+) \quad (2.10)$$

где  $z(w)$  удовлетворяет уравнению (2.6),  $C_2$  – некоторая функция,  $\varphi \rightarrow 0$  при  $y_* \rightarrow \infty$ . Отсюда

$$\frac{dw}{d \ln y_*} = z(w) \left( 1 + y_* \frac{\partial \varphi}{\partial y_*} \right)$$

$$\Pi_n = \left[ y_* \frac{\partial}{\partial y_*} + \left( 1 + y_* \frac{\partial \varphi}{\partial y_*} \right) z(w) \frac{\partial}{\partial w} \right]^n \ln[|w| z(w)] +$$

$$+ \left( y_* \frac{\partial}{\partial y_*} \right)^n \ln \left( 1 + y_* \frac{\partial \varphi}{\partial y_*} \right) \quad (2.11)$$

После подстановки (2.11) в уравнение (2.3) получим оценку  $\phi(y_+, v_w^+) = O(y_*^{-\alpha})$ ,  $\alpha > 0$ ,  $y_* \rightarrow \infty$ .

Соотношение (2.10) справедливо при больших значениях  $y_*$ , которые, согласно (2.8), могут достигаться либо при  $w \rightarrow +\infty$  в случае вдува, либо при больших по модулю отрицательных значениях функции  $C_2(v_w^+)$  при отсосе.

Возвращаясь в (2.10) к переменным  $y_+$ ,  $u_+$  по формулам (2.4), получим окончательный вид асимптотики решения уравнений (1.4) во внешней подобласти

$$\begin{aligned} & \frac{2}{v_w^+} \left( \sqrt{1 + v_w^+ u_+} - 1 \right) + \frac{\omega}{\chi} \ln(1 + v_w^+ u_+) + \Omega \left( \frac{1}{v_w^+} \sqrt{1 + v_w^+ u_+} \right) = \\ & = \frac{1}{\chi} [\ln y_+ + C(v_w^+)] + O(y_+^{-\alpha}), \quad \alpha > 0, \quad y_+ \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь введено обозначение

$$C(v_w^+) = (1 + 2\omega) \ln |v_w^+| + C_2(v_w^+) - C_1 - 2\omega \ln 2 - \frac{2\chi}{v_w^+} \quad (2.13)$$

Кроме постоянной Кармана (2.12) содержит вторую константу данной гипотезы замыкания  $\omega$ , а также функции  $\Omega$  и  $C$ .

Соотношение (2.12) является обобщением на случай массопереноса на стенке логарифмического закона для профиля скорости (2.1). Запишем (2.12) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{2u_+}{1 + \sqrt{1 + v_w^+ u_+}} + \frac{\omega}{\chi} \ln(1 + v_w^+ u_+) + \Omega \left( \frac{1}{v_w^+} \sqrt{1 + v_w^+ u_+} \right) = \\ & = \frac{1}{\chi} [\ln y_+ + C(v_w^+)] + O(y_+^{-\alpha}) \end{aligned}$$

и положим  $v_w^+ = 0$ . После сопоставления с (2.1) будем иметь  $C(0) = C_0$ . Таким образом,

$$C(v_w^+) = C_0 + O(v_w^+), \quad v_w^+ \rightarrow \pm 0 \quad (2.14)$$

Оценка порядка остаточного члена в (2.14) следует из того факта, что решение уравнения (1.4) должно быть непрерывно дифференцируемым по параметру  $v_w^+$ .

В силу (2.5) соотношения (2.10) или (2.12) задают также распределение касательного напряжения во внешней подобласти

$$\begin{aligned} & \frac{2}{v_w^+} \left( \sqrt{-\langle u'v' \rangle_+} - 1 \right) + \frac{\omega}{\chi} \ln(-\langle u'v' \rangle_+) + \Omega \left( \frac{1}{v_w^+} \sqrt{-\langle u'v' \rangle_+} \right) = \\ & = \frac{1}{\chi} [\ln y_+ + C(v_w^+)] + O(y_+^{-\alpha}), \quad y_+ \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.15)$$

Аналогичное представление можно получить для среднеквадратичной поперечной пульсации скорости. Сделав в (1.3) замену переменных (2.4), во внешней подобласти будем иметь

$$\frac{2\sqrt{\langle v'^2 \rangle_+}}{v_w^+} = w z(w) \sqrt{T_2(0, \beta, \Pi_1, \dots, \Pi_N)}$$

где  $\beta$  и  $\Pi_n$  задаются выражениями (2.6). Далее с учетом асимптотики (2.7) получим

$$\frac{2\sigma_2\sqrt{\langle v'^2 \rangle_+}}{v_w^+} = w + \frac{2(\omega_2 - \omega)}{\kappa} + O\left(\frac{1}{w}\right), \quad w \rightarrow \pm\infty$$

$$\omega_2 = \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^2} \frac{\partial}{\partial \Pi_1} T(0, \dots, 0) + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} T(0, \dots, 0)$$

Здесь постоянная  $\sigma_2$  имеет выражение (2.2) и определяется по данным для непроницаемой стенки. Теперь, принимая во внимание (2.8), (2.10), для среднеквадратичной поперечной пульсации скорости будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{2}{v_w^+} \left( \sigma_2 \sqrt{\langle v'^2 \rangle_+} - 1 \right) + \frac{\omega}{\kappa} \ln(\sigma_2^2 \langle v'^2 \rangle_+) + \Omega_2 \left( \frac{\sigma_2}{v_w^+} \sqrt{\langle v'^2 \rangle_+} \right) = \\ & = \frac{1}{\kappa} [\ln y_+ + C(v_w^+) + 2(\omega - \omega_2)] + O(y_+^{-\alpha}), \quad y_+ \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\Omega_2(w) = O(w^{-1}), \quad w \rightarrow \pm\infty$$

Асимптотические представления (2.12), (2.15), (2.16) выражают правила подобия для распределения продольной скорости, касательного напряжения и среднеквадратичной поперечной пульсации скорости в промежуточной области пограничного слоя, расположенной вблизи стенки вне вязкого подслоя. В случае непроницаемой стенки эта область носит название логарифмического подслоя.

Соотношение (2.12), известное как закон Стивенсона, при  $\omega = 0$ ,  $\Omega \equiv 0$  впервые было установлено [1, 2] (см. также [3, 4]) на основе формулы Прандтля для длины пути перемешивания. Законы подобия (2.15), (2.16) являются новыми.

Как показано выше, при вдуве  $w \rightarrow \infty$ , когда  $y_+ \rightarrow \infty$ . В этом случае в силу (2.9) в левых частях (2.12), (2.15), (2.16) существенны только первые два члена асимптотики. При отсосе непосредственно на стенке  $\Omega(1/v_w^+) = O(v_w^+)$  есть малая величина. Далее, с ростом  $y_+$  аргумент функции  $\Omega$  убывает. Если на внешней границе пристеночной области он не достигает величины порядка единицы, функцией  $\Omega$  в (2.12), (2.15) можно пренебречь. Влияние  $\Omega$ , таким образом, сказывается только при достаточно сильном отсосе, когда касательное напряжение на внешней границе пристеночной области много меньше, чем на стенке.

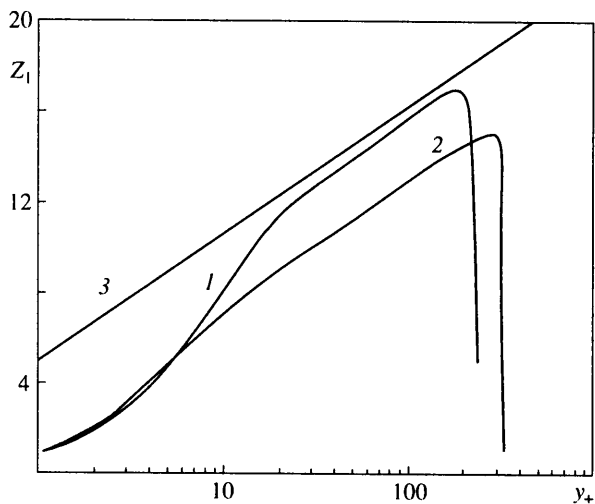
На фиг. 1 даны профили скорости, полученные при прямом численном моделировании напорного течения в плоском канале с постоянным поперечным потоком массы [18, 19]. На всех фигурах использованы обозначения

$$Z_1 = \frac{2u_+}{1 + \sqrt{1 + v_w^+ u_+}}, \quad Z_2 = \frac{2}{v_w^+} (\sqrt{\tau_+} - 1)$$

$$Z_3 = \frac{2}{v_w^+} \left( \sigma_2 \sqrt{\langle v'^2 \rangle_+} - 1 \right)$$

Кривая 1 на фиг. 1 получена при  $v_w^+ = 0.061$  и числе Рейнольдса, вычисленном по средней скорости и ширине канала  $R = 4357$ ;  $2 - v_w^+ = 0.241$ ,  $R = 8000$ . Несмотря на небольшие числа Рейнольдса, при которых проводился расчет, эти распределения хорошо соответствуют правилу подобия (2.12), они имеют достаточно протяженный почти прямолинейный участок с наклоном, близким к величине  $1/\kappa$ . Следовательно, константу  $\omega$  можно положить равной 0.

Об этом свидетельствуют также построенные на фиг. 2 опытные данные [20] (см. также [21]) по распределению скорости ( $Z_1$ ) и касательного напряжения ( $Z_2$ ) в турбу-



Фиг. 1. Профили скорости для плоского течения Пуазейля с поперечным потоком массы в переменных подобия: 1, 2 – данные [18, 19], 3 –  $Z_1 = 2.44 \ln y_+ + 5.0$

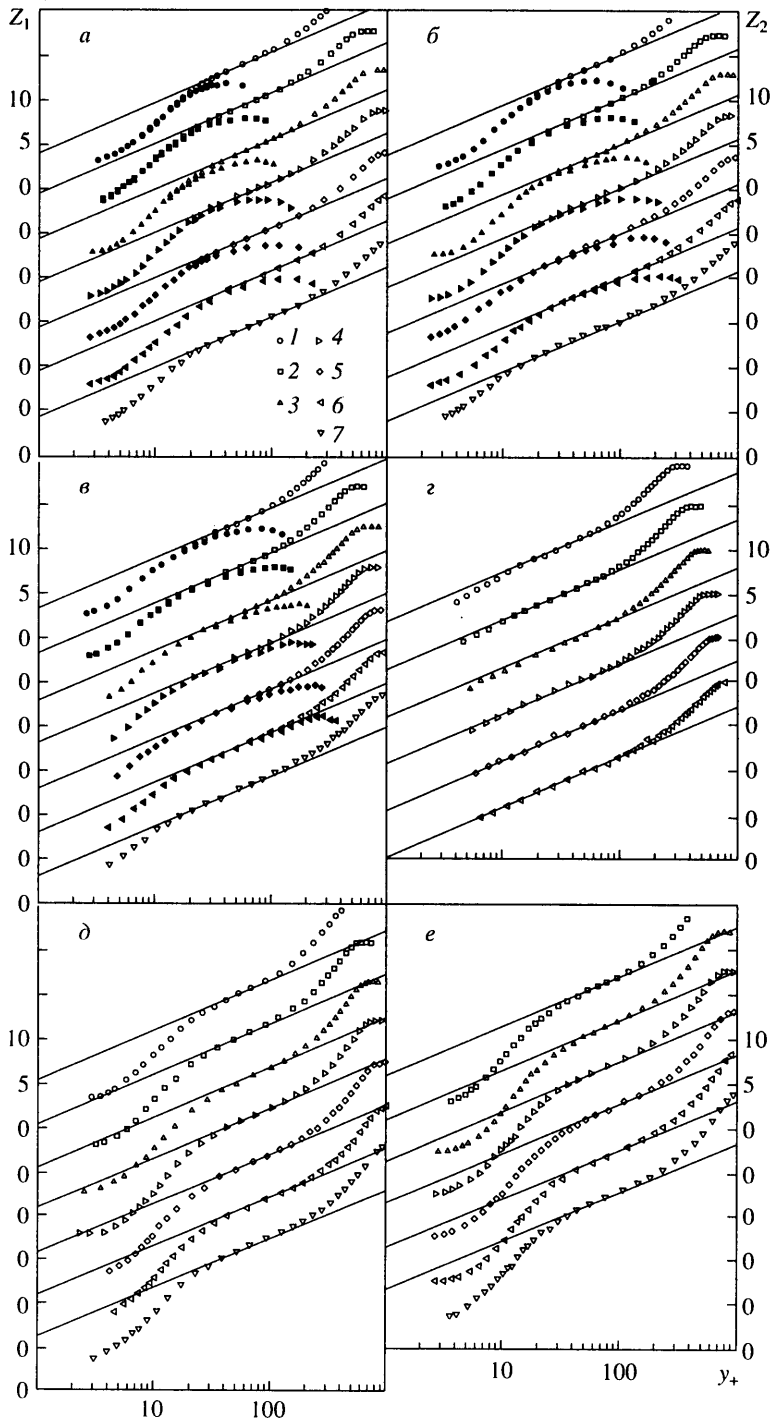
лентном пограничном слое с равномерным вдувом и отсосом. Экспериментальные точки на фиг. 2, *a–г* отвечают вдуву при нулевом градиенте давления и различных значениях параметра  $F = v_w/U_\infty$ , где  $U_\infty$  – скорость в невозмущенном набегающем потоке, на фиг. 2, *д, е* – отсосу при умеренном неблагоприятном градиенте давления. Прямые на фиг. 2 имеют наклон  $1/\kappa$  ( $\kappa = 0.41$ ) и соответствуют правой части соотношений (2.12), (2.15), в которых функция  $C(v_w^+)$  выбрана из условия наилучшей аппроксимации экспериментальных данных, ее значения построены на фиг. 3. Согласно [20], для непроницаемой пластины экспериментальные данные хорошо соответствуют логарифмическому закону (2.1) при выбранном значении постоянной  $C_0 = 2.05$ .

Из фиг. 2, *a–г* видно, что протяженность логарифмического участка для профилей скорости, т.е. интервал значений переменной  $y_+$ , в котором выполняется закон подобия (2.12), увеличивается с ростом числа Рейнольдса, а также по мере возрастания параметра  $v_w^+$ . При увеличении скорости вдува  $v_w^+$  начало логарифмической области сдвигается ближе к стенке. Это хорошо видно на фиг. 2, *г*, соответствующей наибольшей в серии экспериментов [20] скорости вдува.

Фиг. 2, *д и е* отвечают умеренному отсосу, при котором функция  $\Omega$  мала, поэтому для достаточно больших чисел Рейнольдса профили скорости в переменных подобия также имеют выраженный логарифмический участок.

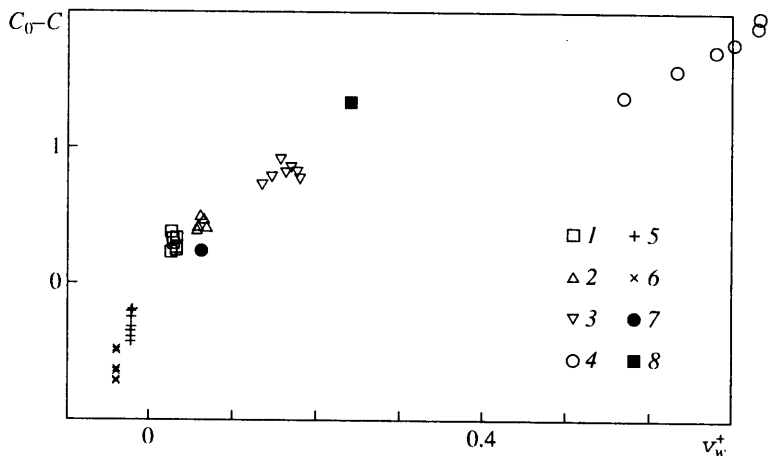
В выбранных переменных профили скорости и касательного напряжения практически совпадают в вязком подслое и достаточно близки во внешней части пристеночной области, что является хорошим экспериментальным подтверждением справедливости уравнения (1.1). Из фиг. 2, *б и в* видно, что при наличии потока массы на стенке квадратный корень из касательного напряжения действительно имеет в пристеночной области логарифмическую асимптотику.

К сожалению, в настоящее время нет достаточно точных измерений пульсационных характеристик скорости в пристеночной области при наличии вдува или отсоса для проверки соотношения (2.16). На фиг. 4 в переменных (2.16) дан профиль среднеквадратичной поперечной пульсации, полученной [22, 23] путем прямого численного моделирования асимптотического турбулентного пограничного слоя с отсосом при  $v_w^+ = -0.0601$  и числе Рейнольдса, вычисленном по толщине вытеснения,  $R_{\delta^*} = 1000$ .



Фиг. 2. Профили скорости  $Z_1$  и касательного напряжения  $Z_2$  в переменных подобия для пограничного слоя со вдувом и отсосом при различных числах Рейнольдса по данным [20]:  $a - F = 0.001$ ,  $\bar{b} - 0.002$ ,  $\bar{v} - 0.00375$ ,  $\bar{z} - 0.008$ ,  $\bar{d} - -0.001$ ,  $\bar{e} - -0.002$ ;  $1 - R_\chi = 3.5 \cdot 10^5$ ,  $2 - 5.4 \cdot 10^5$ ,  $3 - 7.3 \cdot 10^5$ ,  $4 - 9.2 \cdot 10^5$ ,  $5 - 1.1 \cdot 10^6$ ,  $6 - 1.3 \cdot 10^6$ ,  $7 - 1.4 \cdot 10^6$  (светлые символы -  $Z_1$ , темные -  $Z_2$ ); все прямые имеют наклон  $1/\chi$





Фиг. 3. Функция  $C(v_w^+)$  по результатам обработки экспериментальных [20] и расчетных [18, 19] профилей скорости: 1 –  $F = 0.001$  данные [20], 2 – 0.002, 3 – 0.00375, 4 – 0.008, 5 – -0.001, 6 – -0.002, 7, 8 – данные [18, 19]

Как видно из фиг. 4, несмотря на небольшое число Рейнольдса, при котором проводился расчет, на профиле исследуемой величины есть выраженный логарифмический участок, наклон которого, однако, примерно на 20% превышает величину  $1/\kappa$ .

На фиг. 4 дано полученное в этом же расчете распределение осредненной скорости, которое удовлетворяет правилу подобия (2.15). Логарифмические участки профилей скорости и среднеквадратичной пульсации достаточно близки между собой. Это позволяет предположить, что константу  $\omega_2$ , так же как  $\omega$ , можно положить равной 0.

**3. Структура профиля скорости при больших и малых значениях  $v_w^+$ .** Распределение скорости в пристеночной области можно представить в виде

$$\Psi^+ - \Psi_w^+ = \frac{1}{\kappa} [\ln y_+ + C(v_w^+)] - \Omega \left( \frac{1}{v_w^+} \right) + \Psi_+(v_w^+, y_+), \quad 0 \leq y_+ < \infty \quad (3.1)$$

$$\Psi^+ = \frac{2u_+}{1 + \sqrt{1 + v_w^+ u_+}} + \frac{\omega}{\kappa} \ln(1 + v_w^+ u_+) + \Omega \left( \frac{1}{v_w^+} \sqrt{1 + v_w^+ u_+} \right)$$

Здесь  $\Psi_w^+$  есть значение  $\Psi^+$  на стенке. Согласно (2.12),

$$\Psi_+(v_w^+, y_+) = O(y_+^{-\alpha}), \quad \alpha > 0, \quad y_+ \rightarrow \infty$$

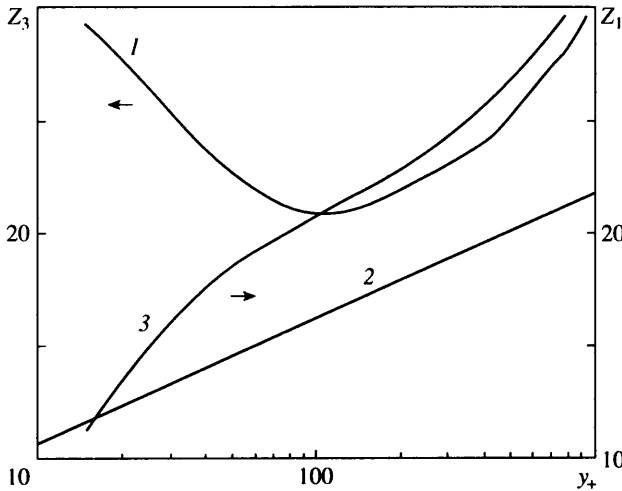
При малых  $v_w^+$  можно написать

$$\Psi^+ - \Psi_w^+ = \frac{1}{\kappa} [\ln y_+ + C_0] + \Psi_+(0, y_+) + O(v_w^+) = u_+(y_+, 0) + O(v_w^+)$$

$$v_w^+ \rightarrow \pm 0, \quad 0 \leq y_+ < \infty \quad (3.2)$$

Для случаев отсоса и умеренного вдува, когда  $v_w^+$  есть малая величина, соотношение (3.2) дает представление профиля скорости в пристеночной области через профиль скорости в пограничном слое на непроницаемой пластине.

Рассмотрим теперь другой предельный переход:  $v_w^+ \rightarrow +\infty$ . Исследуем асимптотическую структуру решения уравнения (2.3) и профиля скорости при больших зна-



Фиг. 4. Среднеквадратичная поперечная пульсация скорости в переменных подобия для пристеночной области  $Z_3$  по данным прямого численного моделирования [22]: 1 –  $Z_3$ , 2 –  $2.44 \ln y_+ + 5.0$ , 3 –  $Z_1$

чения параметра  $v_w^+$  методом сращиваемых асимптотических разложений [24]. В этом случае в пристеночной области образуются три характерных подобласти.

В подобласти 1, расположенной непосредственно у стенки, имеем  $y_* = O(1)$ , тогда турбулентным касательным напряжением в уравнении (2.3) можно пренебречь, и решение в главном члене такое же, как для чисто ламинарного течения

$$w = \frac{2}{v_w^+} e^{y_*^2/2} + O((v_w^+)^{-3}) \quad (3.3)$$

В промежуточной подобласти 2 решение будем искать в виде

$$y_* = M + Y_2, \quad w = \frac{W_2(Y_2)}{M} + \dots, \quad Y_2 = O(1), \quad M \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

Подстановка (3.4) в уравнение (2.3) и предельный переход при  $M \rightarrow \infty$ ,  $Y_2 = O(1)$  дают

$$\left( \frac{dW_2}{dY_2} \right)^2 T(R_l^{-1}, \infty, \dots, \infty) + 2 \frac{d \ln W_2}{dY_2} = 1, \quad R_l = \frac{W_2}{2} \frac{dW_2}{dY_2} \quad (3.5)$$

Таким образом, турбулентная и ламинарная составляющие касательного напряжения здесь одного порядка. Асимптотическое сращивание решений (3.3), (3.4) позволяет определить начальное условие для уравнения (3.5) и параметр  $M$

$$W_2 = 2e^{Y_2^2/2}, \quad Y_2 \rightarrow -\infty, \quad Me^{M^2/2} = v_w^+$$

Асимптотика решения уравнения (3.5) при  $Y_2 \rightarrow +\infty$  имеет вид

$$W_2 = [T(0, \infty, \dots, \infty)]^{-1/2} Y_2 + \dots \quad (3.6)$$

Во внешней подобласти 3

$$y_* = MY_3, \quad w = W_3(Y_3) + \dots, \quad Y_3^{-1} = O(1)$$

В уравнении (2.3) после предельного перехода  $M \rightarrow \infty$ ,  $1/Y_3 = O(1)$  остается только

турбулентная составляющая касательного напряжения

$$\left( \frac{dW_3}{d \ln Y_3} \right)^2 T(0, \beta, \Pi_1, \dots, \Pi_N) = 1 \quad (3.7)$$

$$\beta = \left( \frac{W_3}{2} \frac{dW_3}{d \ln Y_3} \right)^{-1}, \quad \Pi_n = \frac{d^n}{(d \ln Y_3)^n} \ln \left( W_3 \frac{dW_3}{d \ln Y_3} \right)$$

Уравнение (3.7) имеет решение

$$\ln Y_3 = \int_0^{W_3} \frac{dw}{z(w)} + D \quad (3.8)$$

Здесь функция  $z(w)$  удовлетворяет уравнению (2.6),  $D$  – постоянная интегрирования. Поскольку, согласно (2.6),  $z(0) = [T(0, \infty, \dots, \infty)]^{-1/2}$ , асимптотика решения (3.8) есть

$$\ln Y_3 = D + W_3 \sqrt{T(0, \infty, \dots, \infty)} + \dots, \quad W_3 \rightarrow 0 \quad (3.9)$$

Сравнение решений для подобластей 2 и 3 с использованием асимптотических представлений (3.6) и (3.9) дает  $D = 0$ .

Теперь, сопоставляя (3.8) с (2.10), получим

$$C_2(v_w^+) = -\ln M + \dots, \quad M \rightarrow \infty.$$

Отсюда, согласно (2.13), функция  $C(v_w^+)$  имеет следующее асимптотическое представление:

$$C(v_w^+) = (1 + 2\omega) \ln v_w^+ - \ln M - 2\omega \ln 2 - C_1 - \frac{2\kappa}{v_w^+} + \dots, \quad v_w^+ \rightarrow +\infty \quad (3.10)$$

$$M + 2 \ln M = 2 \ln v_w^+$$

На фиг. 3 функция  $C_0 - C(v_w^+)$ , построенная по результатам обработки экспериментальных [20] и расчетных [18, 19] профилей скорости, растет вплоть до  $v_w^+ \approx 0.8$ . С другой стороны, согласно (3.10),  $C \rightarrow \infty$  при  $v_w^+ \rightarrow \infty$ . Следовательно, функция  $C(v_w^+)$  немонотонна и зависимость на фиг. 3 при некотором значении скорости  $v_w^+$  должна иметь максимум.

Подобласти 1 и 2 образуют вязкий подслой. Обозначим  $d_+$  характерную толщину вязкого подслоя, отнесенную к пристеночному масштабу  $\nu/u_*$ . Проведенный анализ показывает, что при  $v_w^+ \rightarrow \infty$   $d_+ = O(\ln v_w^+ / v_w^+)$ . Уменьшение толщины вязкого подслоя и расширение внешней логарифмической области в результате вдува было отмечено при анализе экспериментальных данных на фиг. 2.

**Заключение.** Пристеночная область турбулентного пограничного слоя со вдувом и отсосом состоит из двух характерных подобластей: расположенного непосредственно у стенки вязкого подслоя, в котором турбулентные и вязкие напряжения одного порядка и внешней подобласти, где молекулярной вязкостью можно пренебречь. Во внешней подобласти продольная скорость, касательное напряжение и среднеквадратичная поперечная пульсация скорости в перемешанных подобия имеют одно логарифмическое распределение, которое зависит только от безразмерной поперечной скорости на стенке  $v_w^+$ .

При увеличении скорости вдува  $v_w^+$  толщина вязкого подслоя, измеренная в единицах пристенного масштаба, падает и при  $v_w^+ \rightarrow \infty$  стремится к 0 как  $\ln v_w^+ / v_w^+$ , а область применимости законов подобия начинается непосредственно у стенки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№№ 98-01-00154, 01-01-00808).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stevenson T.N.* A law of the wall for turbulent boundary layers with suction or injection // *CoA Rept. Aero.* 1963. № 166; *J. Roy. Aeronaut. Soc.* 1964. V. 68. № 642. P. 431.
2. *Stevenson T.N.* Inner region of transpired turbulent boundary layers // *AIAA Journal.* 1968. V. 6. № 3. P. 553–554.
3. *Jeromin L.O.* The status of research in turbulent boundary layers with fluid injection // *Prog. Aeronaut. Sci.* 1970. V. 10. P. 65–189.
4. *Cebeci T., Smith A.M.O.* Analysis of Turbulent Boundary Layers. N.Y.: Acad. Press, 1974. 404 p.
5. *Tennekes H.* Similarity laws for turbulent boundary layers with suction or injection // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 21. Pt 4. P. 689–703.
6. *Кадер Б.А., Яглом А.М.* Законы подобия для пристенных турбулентных течений // *Итоги науки и техн. Сер. Механика жидкости и газа.* М.: ВИНТИ, 1980. Т. 15. С. 81–155.
7. *Вяздорович И.И.* Универсальный закон дефекта скорости для турбулентного пограничного слоя на пластине со вдувом и отсосом // *Докл. РАН.* 1993. Т. 331. № 4. С. 443–448.
8. *Вяздорович И.И.* Универсальный закон трения для турбулентного пограничного слоя на пластине со вдувом // *Докл. РАН.* 1994. Т. 337. № 1. С. 39–43.
9. *Lumley J.L.* Toward a turbulent constitutive relation // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 41. Pt 2. P. 413–434.
10. *Perry A.E., Henbest S., Chong M.S.* A theoretical and experimental study of wall turbulence // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 165. P. 163–199.
11. *Fernholz H.H., Finley P.J.* The incompressible zero-pressure-gradient turbulent boundary layer: An assessment of the data // *Prog. Aerospace Sci.* 1996. V. 32. № 4. P. 245–311.
12. *Morrison J.F., Jiang W., McKeon B.J., Smits A.J.* Reynolds-number dependence of streamwise velocity fluctuations in turbulent pipe flow // *Turbulence and Shear Flow Phenomena: 2nd Intern. Symp.* / Ed. E. Lindborg et al. Stockholm: KTH, 2001. V. 1. P. 43–48.
13. *Zagarola M.V., Smits A.J., Orszag S.A., Yakhot V.* Experiments in high Reynolds number turbulent pipe flow // *AIAA Paper.* 1996. № 96–0654. 8 p.
14. *Hites M., Nagib H., Wark C.* Velocity and wall shear-stress measurements in high-Reynolds-number turbulent boundary layers // *AIAA Paper.* 1997. № 97–1873. 14 p.
15. *Österlund J.M., Johansson A.J.* High Reynolds number turbulent boundary-layer experiments // *Advances in Turbulence VIII. Proc. 8th Europ. Turbulence Conf.* / Ed. C. Dopazo et al. Barcelona: CIMNE, 2000. P. 395–398.
16. *Coles D., Hirst E.A.* Memorandum on data selection // *Computation of turbulent boundary layers – 1968: AFORS-IFP-Stanford Conf. Proc.* 1968. Stanford: Univ. Press, 1969. V. 2. P. 47–54.
17. *Klebanoff P.S.* Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient // *NACA Rep.* 1955. № 1247. 19 p.
18. *Sumitani Y., Kasagi N.* Direct numerical simulation of turbulent transport with uniform wall injection and suction // *AIAA Journal.* 1995. V. 33. № 7. P. 1220–1228.
19. *Никитин Н.В., Павельев А.А.* Турбулентные течения в канале с проницаемыми стенками. Результаты прямого численного моделирования и трехпараметрической модели // *Изв. РАН. МЖГ.* 1998. № 6. С. 18–26.
20. *Andersen P.S., Kays W.M., Moffat R.J.* The turbulent boundary layer on a porous plate: An experimental study of the fluid mechanics for adverse free-stream pressure gradient // *Rep. HMT-15.* 1972. Stanford Univ. 194 p.
21. *Andersen P.S., Kays W.M., Moffat R.J.* Experimental results for the transpired turbulent boundary layer in an adverse pressure gradient // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 69. Pt 2. P. 353–375.
22. *Mariani P., Spalart P., Kollmann W.* Direct simulation of a turbulent boundary layer with suction // *Proc. Intern. Conf. Near-Wall Turbulent Flows* / Ed. R. M. C. So et al. Amsterdam: Elsevier, 1993. P. 347–356.
23. *Antonia R.A., Spalart P.R., Mariani P.* Effect of suction on the near-wall anisotropy of a turbulent boundary layer // *Phys. Fluids.* 1994. V. 6. № 1. P. 430–432.
24. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. Мир. М.: 1967. 310 с.