

УДК 532.5.013.4:536.252

© 2002 г. Д.В. ЛЮБИМОВ, С.В. ШКЛЯЕВ

### СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ КОНВЕКЦИИ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА

В рамках обобщенных приближений Буссинеска рассматривается возникновение конвекции в двухслойной системе при нагреве сверху или снизу. В длинноволновом приближении получено амплитудное уравнение, описывающее крупномасштабные конвективные движения, сопровождающиеся деформацией поверхности раздела. Обнаружены два типа стационарных режимов, и изучена их устойчивость.

Наличие деформируемых границ и неоднородный нагрев могут вызывать неустойчивость жидкости, находящейся в поле тяжести. Взаимодействие этих механизмов имеет значительный теоретический интерес, чем можно объяснить достаточно большое количество работ, посвященных данной тематике.

*Ключевые слова:* конвекция, двухслойная система, деформируемая граница, устойчивость.

В [1] исследована линейная устойчивость механического равновесия в горизонтальном слое жидкости со свободной верхней границей, в частности, получено длинноволновое решение. Однако в [2] показана неправомерность использования приближений Буссинеска в задачах с деформируемой свободной поверхностью (поверхностью раздела двух сред). Действительно, при построении приближений Буссинеска наряду со слабой температурной зависимостью плотности предполагается большим поле тяжести, благодаря чему свободная поверхность (поверхность раздела жидкостей) остается плоской. В случае отказа от приближений Буссинеска в подогреваемом снизу слое со свободной границей длинноволновые возмущения неопасны [2]. Работы, в которых наряду с использованием приближений Буссинеска рассматривается деформация поверхности, появляются и в настоящее время (см., например, [3, 4]).

В рамках приближений Буссинеска можно корректно учесть деформацию поверхности раздела двух жидкостей, если их плотности достаточно близки. Уравнения тепловой конвекции в двухслойной системе для этого случая (называемые далее уравнениями в обобщенных приближениях Буссинеска) получены в [5]. В этой работе также исследована линейная устойчивость равновесия и, в частности, обнаружена длинноволновая мода неустойчивости.

Слабонелинейное изучение крупномасштабных конвективных течений в двухслойной системе начато в [6]. В плоской постановке сформулировано и исследовано нелинейное уравнение для амплитуды возмущений. Показано, что в длинноволновом пределе конвекция возникает жестко, и полученное амплитудное уравнение не описывает устойчивых конвективных движений вблизи порога.

В предлагаемой работе рассмотрен предельный случай, в котором возникновение конвекции описывается уравнением Кэна – Хиллиарда, достаточно подробно исследованным для замкнутых областей в теории фазовых переходов в бинарной смеси [7, 8]. С использованием полученных в [7, 8] результатов, а также дополнительно проведенного анализа изучены два типа одномерных стационарных решений (простран-

ственно-периодическое и солитонное), соответствующих плоским конвективным течениям.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим устойчивость механического равновесия двух несмешивающихся жидкостей близкой плотности в двухслойной системе. Толщины слоев  $h_1$  и  $h_2$ , на внешних твердых идеально теплопроводных границах поддерживаются постоянные значения температуры  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  (индексом 1 отмечаются величины, относящиеся к нижней жидкости, индексом 2 – к верхней). В состоянии механического равновесия поверхность раздела жидкостей плоская, температура на поверхности

$$\Theta_0 = \frac{h_2 \kappa_1 \Theta_1 + h_1 \kappa_2 \Theta_2}{h_2 \kappa_1 + h_1 \kappa_2}$$

Здесь  $\kappa_{1,2}$  – коэффициенты теплопроводности каждой из жидкостей.

Выберем систему координат следующим образом: ось  $z$  направлена вертикально вверх, оси  $x$  и  $y$  – в плоскости невозмущенной поверхности раздела жидкостей. Температура отсчитывается от равновесной температуры поверхности раздела  $\Theta_0$ .

Аналогично общепринятым приближениям Буссинеска плотность каждой из жидкостей предполагается зависящей лишь от температуры, причем температурные отклонения плотности считаются малыми и удовлетворяющими линейному закону  $\rho_j = \rho_{0j}(1 - \beta_j T_j)$ . Здесь  $\beta_j$  – коэффициент теплового расширения, а  $\rho_{0j}$  – значение плотности  $j$ -й жидкости при  $T = 0$ . Обобщенные приближения Буссинеска состоят в том, что наряду со слабой температурной зависимостью плотности ( $|\beta_j T_j| \ll 1$ ) предполагается малой и разность значений плотности при  $T_1 = T_2 = 0$ :  $|\delta| \ll 1$ ,  $\delta = 2(\rho_{02} - \rho_{01})/(\rho_{02} + \rho_{01})$ .

Число Галилея  $Ga = gh^3/\nu^2$  является в данной модели асимптотически большим параметром, а его произведение на каждый из малых параметров конечно:  $Ra = \beta(\Theta_1 - \Theta_2)GaPr/2$  – число Рэлея и  $G = \delta GaPr$  – модифицированное число Галилея. Здесь  $Pr = \nu/\chi$  – число Прандтля,  $\beta$ ,  $\nu$ ,  $\chi$  – средние значения коэффициентов теплового расширения, кинематической вязкости, температуропроводности и толщин слоев:

$$\beta = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2), \quad \nu = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2), \quad \chi = \frac{1}{2}(\chi_1 + \chi_2), \quad h = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$$

Положительные модифицированные числа Галилея соответствуют потенциально неустойчивой стратификации жидкостей (внизу более легкая), а отрицательные – устойчивой.

Описанный предельный переход означает, что в обобщенных приближениях Буссинеска плотности обеих жидкостей предполагаются постоянными и равными среднему значению  $\rho$  всюду, кроме слагаемых, связанных с массовыми силами.

Система уравнений и граничных условий тепловой конвекции в обобщенных приближениях Буссинеска после исключения основной части гидростатического давления –  $G/\delta\rho_0 z$  имеет вид

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j \right) = -\nabla p_j + \nu_j \Delta \mathbf{v}_j + Ra \beta_j T_j \boldsymbol{\gamma} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla T_j = \chi_j \Delta T_j, \quad \text{div } \mathbf{v}_j = 0 \quad (1.2)$$

$$z = -h_1 : \mathbf{v}_1 = 0, \quad T_1 = \Theta_1^{(0)}, \quad z = h_2 : \mathbf{v}_2 = 0, \quad T_2 = -\Theta_2^{(0)} \quad (1.3)$$

$$z = \zeta : [\mathbf{v}] = 0, \quad [T] = 0, \quad [\kappa \nabla T] \mathbf{n} = 0 \quad (1.4)$$

$$(G\zeta - [p])\mathbf{n} + [\sigma \mathbf{n}] = -\mathbf{n} C \text{div } \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta = \mathbf{v}_z \quad (1.5)$$

Положение границы раздела задается уравнением  $z = \zeta(x, y, t)$ . Квадратными скобками обозначается скачок соответствующей величины на поверхности раздела:  $[f] = (f_1 - f_2)_z = \zeta$ ,  $\mathbf{n}$  – вектор нормали, направленный из первой среды во вторую,  $\gamma$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ .  $\Theta_{1,2}^{(0)} = 2h_{1,2}\kappa_{2,1} / (h_1\kappa_2 + h_2\kappa_1)$  – безразмерные абсолютные значения температуры границ. Индекс  $j$  принимает значения 1 и 2.

Система уравнений и граничных условий (1.1) – (1.5) записана в безразмерном виде; в качестве единиц измерения времени, расстояния, скорости, температуры и давления используются  $h^2/\chi$ ,  $h$ ,  $\chi/h$ ,  $(\Theta_1 - \Theta_2)/2$ ,  $\rho\nu\chi/h^2$  соответственно. Помимо  $Ra$ ,  $G$  и  $Pr$  задача (1.1) – (1.5) содержит капиллярное число  $Ca = \sigma h/\rho\nu\chi$ , а также безразмерные параметры, характеризующие соотношения физических свойств жидкостей и геометрических размеров слоев: коэффициенты вязкости  $\nu_j$ , теплопроводности  $\kappa_j$ , теплового расширения  $\beta_j$  и температуропроводности  $\chi_j$ , толщины слоев  $h_j$ , выраженные через свои средние значения  $\nu$ ,  $\kappa$ ,  $\beta$ ,  $\chi$ ,  $h$ . Последние пять пар параметров связаны очевидными соотношениями

$$\nu_1 + \nu_2 = 2, \quad \kappa_1 + \kappa_2 = 2, \quad \beta_1 + \beta_2 = 2, \quad \chi_1 + \chi_2 = 2, \quad h_1 + h_2 = 2$$

и для этих параметров оставлены те же обозначения, что и для соответствующих размерных величин.

Задача (1.1) – (1.5) допускает состояние механического равновесия

$$T_j^{(0)} = -\Theta_j^{(0)} \frac{z}{h_j}, \quad \zeta_0 = 0, \quad p_j^{(0)} = -\frac{Ra\beta_j\Theta_j^{(0)}}{2h_j} z^2 \quad (1.6)$$

с линейным распределением температуры и плоской поверхностью раздела.

**2. Формулировка амплитудного уравнения.** Для исследования устойчивости равновесного состояния (1.6) по отношению к длинноволновым возмущениям и изучения слабонелинейных режимов конвекции будем применять метод многих масштабов [9]. Разложим отклонение поверхности раздела от горизонтального положения, поля скорости, температуры и давления, а также производные по координатам и времени в ряд по формальному параметру  $\epsilon$ , связанному с надкритичностью:

$$\mathbf{v}_j = \epsilon^2 \mathbf{u}_j^{(2)} + \epsilon^3 \mathbf{u}_j^{(3)} + \dots + \gamma(\epsilon^3 w_j^{(3)} + \epsilon^4 w_j^{(4)} + \dots) \quad (2.1)$$

$$T_j = T_j^{(0)} + \epsilon T_j^{(1)} + \epsilon^2 T_j^{(2)} + \dots, \quad p_j = p_j^{(0)} + \epsilon p_j^{(1)} + \dots \quad (2.2)$$

$$\zeta = \epsilon \zeta_1 + \epsilon^2 \zeta_2 + \dots, \quad Ra = R_0 + \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2 + \dots \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots, \quad \nabla = \gamma \frac{\partial}{\partial z} + \epsilon \nabla_1 + \dots \quad (2.4)$$

Здесь  $\mathbf{u}_j$  – двумерный вектор скорости в плоскости  $x, y$ ,  $\nabla_1$  – векторный оператор дифференцирования в этой же плоскости,  $w_j$  – вертикальная компонента скорости.

Подставляя разложения (2.1) – (2.4) в задачу (1.1) – (1.5), получим в главном (третьем) порядке малости:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t_2} = -(\lambda_R R_0 + \lambda_G G) \Delta \zeta_1 \left( \frac{\partial \zeta_1}{\partial t_1} = 0 \right)$$

$$\Delta = \nabla_1^2, \quad H = h_1 - h_2$$

$$\lambda_G = \frac{1}{24} (4 - H^2) (4 - H[\nu]) f_1 \quad (2.5)$$

$$\lambda_R = \frac{[\kappa]([\kappa] - [\beta])f_2 + (4 - [\beta][\kappa])f_3}{480(4 - H[\kappa])^2} f_1 \quad (2.6)$$

$$f_1 = \frac{(4 - H^2)^2}{4(16 - H^3[v])(4 - H[v]) - 3[v]^2(4 - H^2)^2}$$

$$f_2 = (4 - H[v])(92 - 11H^2)(4 + H^2) - 12(4 - H^2)(12 + H^2)$$

$$f_3 = 3[v](4 - H^2)(4 + 3H^2) - 2H(4 - H[v])(68 - 5H^2)$$

В предельном случае  $H = 0$  (слой равной толщины) (2.5) – (2.6) согласуются с коэффициентами, полученными в [5].

Критическое число Рэлея для длинноволновой неустойчивости, определяемое из линейной теории, дается соотношением  $R_0 = -\lambda_G / \lambda_R G$ . Используя (2.5) – (2.6), можно показать, что коэффициент  $\lambda_R$  не является знакоопределенным, а коэффициент  $\lambda_G$  неотрицателен. При  $\lambda_R > 0$  критические числа Рэлея и Галилея имеют разные знаки, т.е. наблюдается конкуренция конвективного и рэлей-тейлоровского механизмов неустойчивости. При  $\lambda_R < 0$  (2.5) – (2.6) описывает возникновение длинноволновой конвекции при нагреве сверху (см. [10]) и наличии деформируемой границы. В данном случае возможна стабилизация длинноволновой неустойчивости Рэлея – Тейлора подогревом снизу. При  $\lambda_R < 0$  надкритическим режимам соответствуют отрицательные поправки к числу Рэлея.

Поля возмущений выражаются через отклонение поверхности следующим образом:

$$T_j^{(1)} = \vartheta_j(z)\zeta_1, \quad p_j^{(1)} = q_j(z)\zeta_1 \quad (2.7)$$

$$\mathbf{u}_j^{(2)} = U_j(z)\nabla_1\zeta_1, \quad w_j^{(3)} = W_j(z)\Delta\zeta_1 \quad (2.8)$$

где  $\vartheta_{1,2}, q_{1,2}, U_{1,2}, W_{1,2}$  – полиномы 1, 2, 4 и 5-го порядков соответственно.

Для изучения конвективных движений вблизи порога устойчивости необходимо учесть более высокие порядки в разложении (2.1) – (2.4). В четвертом порядке малости амплитудное уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t_3} = -\lambda_R R_1 \Delta \zeta_1 - B \Delta (\zeta_1^2) \quad (2.9)$$

Коэффициент  $B$  является громоздкой знакопеременной функцией скачков физических величин, но не зависит от  $[\chi]$  и  $Ca$ . Однако знак  $B$  несуществен, его можно изменить, меняя при этом  $\zeta_1$  на  $-\zeta_1$ .

Можно показать, что ниже порога устойчивости положение равновесия устойчиво, если максимальное начальное отклонение поверхности не превосходит  $-\lambda_R R_1 / 2B$  ( $B > 0$ ). В противоположном случае в ходе временной эволюции данная модель становится неприменимой в связи с неограниченным ростом самого решения или его производных (образование доменных стенок). Таким образом, уравнение (2.9) показывает жесткий характер ветвления длинноволновых возмущений, однако это уравнение не имеет ограниченных решений. Для их описания необходимо учитывать следующие порядки малости в разложении (2.1) – (2.4).

В наиболее общем случае полагаем, что  $R_1 = \zeta_1 = 0$ . Тогда вместо (2.9) будем иметь в шестом порядке малости

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial t_4} = -\lambda_R R_2 \Delta \zeta_2 - B \Delta (\zeta_2^2) - C \Delta^2 \zeta_2 \quad (2.10)$$

Коэффициент  $C$  в отличие от  $\lambda_R, \lambda_G$  и  $B$  зависит от скачка  $[\chi]$  и  $Ca$ . В лабораторных условиях для многих жидкостей  $Ca$  достигает значения  $10^5$  и довольно велико по

сравнению с  $Ra^2$ . При этом коэффициент  $C$  является положительным, что соответствует длинноволновому минимуму на нейтральной кривой  $Ra(k)$ .

Амплитудное уравнение (2.10) в одномерном случае получено и исследовано в [6]. Анализ (2.10) показал, что конвекция в двухслойной системе возбуждается жестким образом. Стационарные подкритические решения (2.10) являются неустойчивыми, а само уравнение не дает информации о режимах конвекции вблизи порога. Ниже критического числа Рэлея малые возмущения затухают, а возмущения с амплитудой, большей некоторого порогового значения, неограниченно нарастают, что приводит к выходу за пределы применимости уравнения (2.10).

В действительности существует устойчивая верхняя ветвь амплитудной кривой (максимальное отклонение поверхности в зависимости от подкритичности), не описываемая в рамках уравнения (2.10) и, в общем случае, разложениями (2.1) – (2.4). Возможен, однако, предельный случай, в котором обе ветви могут быть получены в слабонелинейном приближении. Для этого необходимо, чтобы касательная бифуркация, приводящая к появлению устойчивой и неустойчивой ветвей, имела место вблизи порога устойчивости, определяемого из линейной теории. Это возможно в том случае, когда неустойчивое решение достаточно быстро растет с увеличением подкритичности, т.е. для малого коэффициента при нелинейном слагаемом  $B$ . Ввиду того что коэффициент  $B$  не знакоопределен, такая область параметров достижима. С экспериментальной точки зрения для определенной пары веществ можно добиться малости параметра  $B$ , меняя  $H$ . В этом случае

$$B \approx \left( \frac{\partial B}{\partial H} \right) (H - H_0) = B_1 \varepsilon \quad (2.11)$$

где  $H_0$  и  $B_1$  – функции  $[\nu]$ ,  $[\beta]$ ,  $[\kappa]$ , причем  $B(H_0) = 0$ . Полагая в (2.9)  $R_1 = \partial/\partial t_3 = 0$ , получим в пятом порядке малости следующее амплитудное уравнение:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t_4} = -\lambda_R R_2 \Delta \zeta_1 - B_1 \Delta (\zeta_1^2) - C \Delta^2 \zeta_1 + D \Delta (\zeta_1^3) \quad (2.12)$$

Знак коэффициента  $D$  зависит от параметров задачи, однако отрицательные  $D$  соответствуют жесткому возбуждению конвекции, причем (2.12) не описывает в этом случае устойчивых ограниченных решений. Этот случай ниже не рассматривается.

Выбором подходящих масштабов можно сократить число безразмерных параметров в (2.12) до одного. Будем иметь

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\Delta \left( r \zeta + \frac{3}{2} \zeta^2 - 2 \zeta^3 + \Delta \zeta \right), \quad r = 9 \frac{\lambda_R R_2 D}{8 B_1^2} \quad (2.13)$$

Здесь и далее индексы у переменных опускаются. При получении (2.13) принято, что  $C > 0$ ,  $D > 0$ ,  $B_1 > 0$ . Безразмерная переменная  $r$  имеет смысл надкритичности. Случай  $r > 0$  соответствует надкритическим (по отношению к возмущениям с бесконечной длиной волны) режимам, а  $r < 0$  – подкритическим, независимо от знака  $\lambda_R$ . Дальнейшее рассмотрение, если только это не оговорено особо, будет проводиться для плоских возмущений, зависящих от одной координаты  $x$ .

**3. Периодические решения.** Уравнение (2.13), впервые полученное при изучении фазовых переходов в бинарной смеси, известно как частный случай уравнения Кэна–Хиллиарда ( $\zeta$  является концентрацией одного из компонентов). Исследованию данного уравнения и его обобщений посвящено большое количество работ. В [7] определен порог глобальной устойчивости равновесия (однородного состояния): показано, что при  $r < -3/8$  нулевое решение является единственным, а также найдено стационарное периодическое решение

$$\zeta_p = \frac{a_3 - a_4}{1 - \alpha \operatorname{sn}^2(s, qx)} + a_4 \quad (3.1)$$

$$s^2 = \frac{a_1 - a_4}{a_1 - a_3} \frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_4}, \quad \alpha = \frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_4}, \quad q = \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)}$$

где  $\operatorname{sn}(x, x)$  – синус амплитуды (эллиптическая функция Эйлера). Коэффициенты  $a_1 - a_4$  (предполагается, что  $a_1 \geq a_2 \geq 0 \geq a_3 \geq a_4$ ) определяются из следующих четырех условий:

$$\sum_{n=1}^4 a_n = 1, \quad \sum_{n=1}^3 \sum_{m=n+1}^4 a_n a_m = -r, \quad k = \frac{\pi q}{K(s)} \quad (3.2)$$

$$-\frac{a_3 - a_4}{K(s)} \pi(\alpha^{-1} s, 1) + a_4 = 0 \quad (3.3)$$

Здесь  $K(s)$  и  $\pi(c, s, z)$  – эллиптический интеграл первого рода и нормальный эллиптический интеграл третьего рода соответственно [11];  $k$  – волновое число решения. Условие (3.3) представляет собой требование сохранения массы каждой из жидкостей. Легко видеть, что решения, определяемые (3.1), ограничены:  $a_2 \geq \zeta_p \geq a_3$ .

Решения вида (3.1) существуют при  $r > -1/4$ . В зависимости от волнового числа возможно как мягкое (при  $k > 1/2$ ), так и жесткое ветвление ( $k < 1/2$ ) решений вблизи критического значения  $r_0 = k^2$ . Отметим, что при переходе от (2.12) к (2.13) единица измерения длины изменена в  $3\sqrt{2CD}/4B_1$  раз, т.е. при малых  $B_1$  (или  $H - H_0 = o(\epsilon)$  – см. (2.11)) даже решения с достаточно большим по сравнению с  $h/\epsilon$  периодом ветвятся мягко.

Представляется, что появление надкритического ветвления имеет следующее происхождение. При произвольных параметрах задачи на нейтральной кривой  $\operatorname{Ra}(k)$  имеется интервал волновых чисел, соответствующий мягкому возбуждению ячеистой конвекции. По мере приближения  $H$  к  $H_0$  нижняя граница этого интервала попадает в область малых  $k$ , где справедливы разложения (2.1)–(2.4). Именно этот эффект приводит к появлению мягкого ветвления длинноволновых возмущений.

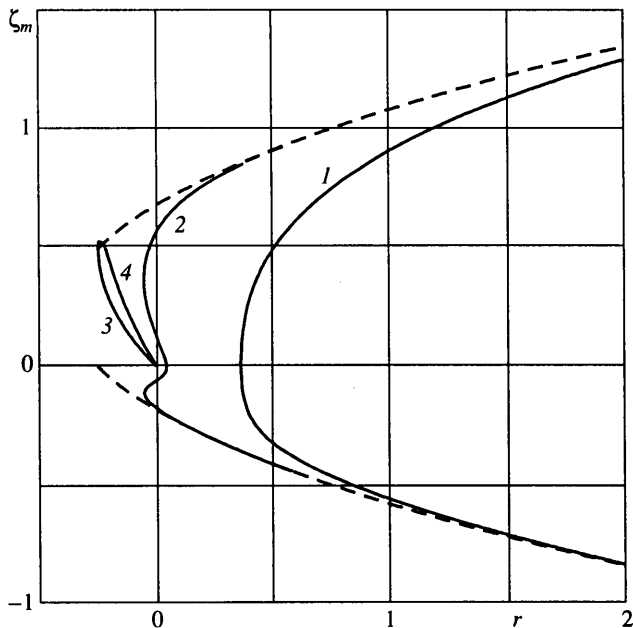
В предельных случаях систему трансцендентных уравнений (3.2)–(3.3) для коэффициентов  $a_1 - a_4$  удается разрешить аналитически. При малых  $\zeta$ , чему соответствует  $s \rightarrow 0$ , разложение уравнений (3.1)–(3.3) дает корневой закон для максимального отклонения поверхности в зависимости от  $r$ ; форма поверхности синусоидальна. В противоположном предельном случае  $s \rightarrow 1$  на половине периода поверхность описывается формулой

$$\zeta_p = \frac{2q\epsilon e^{2qx}}{1 + \epsilon e^{2qx}} + \frac{1}{4} - q \left( 0 \leq x \leq \frac{\pi}{k}, \quad r > -\frac{1}{4} \right) \quad (3.4)$$

$$q = \sqrt{3 + 8r}/4, \quad \epsilon = \exp(-\pi(1 + 4q)/4k)$$

Этот предельный случай соответствует большим значениям  $r$ , однако ввиду экспоненциальной зависимости малого параметра  $\epsilon$  от  $r$  (3.4) достаточно хорошо описывает ситуацию и при вполне умеренных надкритичностях, особенно для решений с большим пространственным периодом (волновое число стоит в знаменателе показателя экспоненты). По этой же причине в (3.4) наряду с  $r$  оставлены постоянные величины. Нетрудно убедиться, что максимальное и минимальное значения отклонения поверхности равны соответственно  $1/4 \pm q$ .

При произвольных  $s$  необходимо численное решение (3.2)–(3.3). На фиг. 1 изображена зависимость минимального и максимального значений  $\zeta_p$  от  $r$  (амплитудная



Фиг. 1. Амплитудная кривая различных режимов конвекции: 1, 2 – периодические решения с  $k = 0.6$  и  $0.2$ ; 3, 4 – плоский и осесимметричный солитоны. Штриховая линия – периодическое квазисолитонное решение

кривая). При  $k < 1/2$  на амплитудной кривой имеются две ветви. Предельный закон больших  $r$  (3.4) показан штриховой линией. Как видно, для  $k = 0.2$  выход на асимптотику наблюдается уже при  $r \approx 1$ .

Эволюция стационарной формы поверхности с ростом надкритичности показана на фиг. 2. Вблизи порога возникновения конвекции ( $r_0 = 0.36$ ) форма поверхности раздела близка к синусоидальной; с увеличением надкритичности на поверхности образуется плато. При достаточно большом  $r$  (линия 3) на половине периода форма поверхности хорошо описывается предельным законом (3.4). Конвективные течения, найденные по формулам (2.7)–(2.8), показаны на фиг. 3. С увеличением надкритичности интенсивность движения растет, а конвективные валы при этом локализуются вблизи границ плато. Достаточно большой объем жидкости не участвует в движении.

В [7] рассмотрено решение одномерного уравнения Кэна–Хиллиарда в замкнутой области, на границах которой ставились условия отсутствия потока:

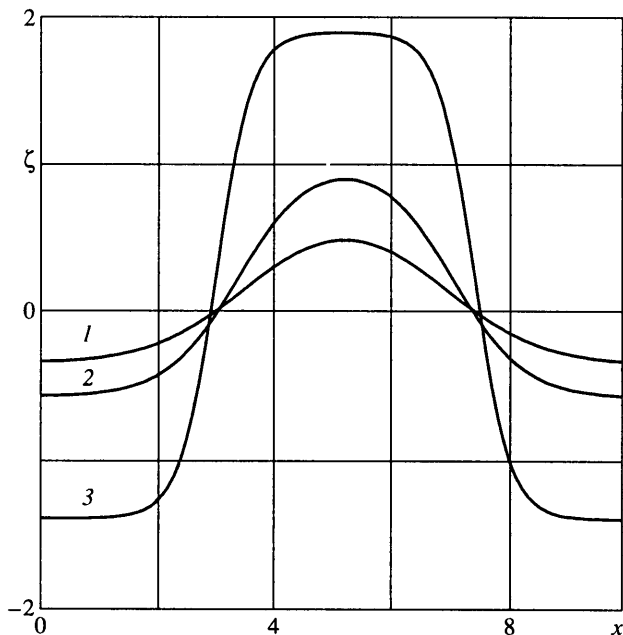
$$x = \pm L_x : \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0 \quad (3.5)$$

Первое из этих условий накладывает ограничение на возможные волновые числа (3.2)

$$k_n = \frac{\pi}{2L_x} n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

второе является следствием четности стационарного решения.

Аналогичное граничное условие, являющееся в силу (2.8) условием непротекания, необходимо поставить и в задаче о возникновении конвекции в двухслойной системе. Разумеется, вязкая жидкость прилипает на твердой стенке; на боковых поверхностях также должны выполняться определенные тепловые условия. Однако эти диссипа-



Фиг. 2. Форма поверхности для пространственно-периодических решений с  $k = 0.6$  для  $r = 0.5, 1.5$  (кривые 1–3)

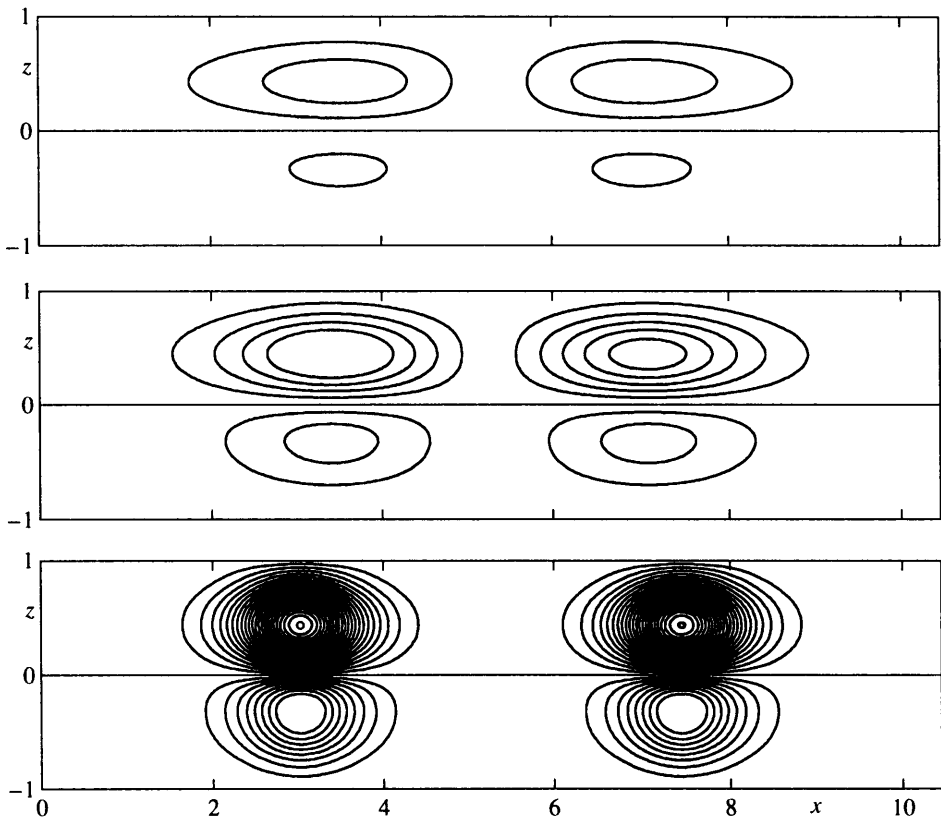
тивные процессы происходят на масштабах, сравнимых с толщиной слоя, и не могут быть описаны в рамках уравнения (2.13).

В [8] подробно изучено вязкое уравнение Кэна–Хиллиарда (обобщение уравнения (2.13)) в ограниченной области: определена размерность неустойчивых многообразий для решения вида (3.1), показано, что устойчивым является лишь монотонно растущее (убывающее) с  $x$  решение, соответствующее  $n = 1$ . Будем называть такое решение полужелым, так как на длине слоя укладывается половина периода, определяемого (3.2). Решения с большими значениями  $k$  являются неустойчивыми. Разумеется, неустойчивыми при любых  $k$  являются решения, соответствующие нижней ветви амплитудной кривой (фиг. 1) в подкритической области.

Все результаты, полученные в [8], относились к изучению уравнения (2.13) в замкнутой области. Однако представляет интерес исследование устойчивости стационарного решения (3.1) в слое, неограниченном в продольном направлении. В этом случае спектр допустимых волновых чисел для возмущений непрерывен, а анализ устойчивости пространственно-периодического решения проводится с помощью теории Флоке. Численные исследования, проведенные в настоящей работе, показали, что стационарное конвективное течение вида (3.1) является неустойчивым в безграничном слое по отношению к медленной продольной модуляции (экхаузова мода).

Рассмотрим задачу устойчивости полужелтых решений относительно спиральных возмущений, зависящих только от поперечной координаты  $y$  и времени, как  $\exp(-\sigma t + iq_y y)$ . Легко убедиться, что вблизи порога возникновения конвекции слабонелинейные режимы неустойчивы. Действительно, при  $r \rightarrow k^2$  имеем  $\sigma = -q_y^2(r - q_y^2)$ , т.е. возмущения с  $q_y < q_c = \sqrt{r}$  нарастают (так называемая зигзаговая мода неустойчивости). Критическое волновое число  $q_c$  в зависимости от  $r$  представлено на фиг. 4 для  $k = 1$ . С ростом надкритичности область опасных волновых чисел заметно уменьшается. Предельное решение (3.4) является устойчивым. Малость критических





Фиг. 3. Конвективные течения, соответствующие пространственно-периодическим решениям:  $k = 0.6, r = 0.5, 1.5$  (1–3). Изолинии проведены через 0.0005 единиц

волновых чисел позволяет надеяться, что периодические решения (3.1) могут наблюдаться в эксперименте для достаточно больших надкритичностей (таких, что  $q_c < \pi/L_y$ , где  $2L_y$  – размер слоя вдоль оси  $y$ ). Так, для квадратного слоя критерий устойчивости полуцелого решения имеет вид  $q_c < k$ .

**4. Солитонные решения и их устойчивость.** Помимо периодических в пространстве решений, возникающих через вилочную бифуркацию, уравнение (2.13) допускает также подкритическое стационарное решение в виде одномерного солитона

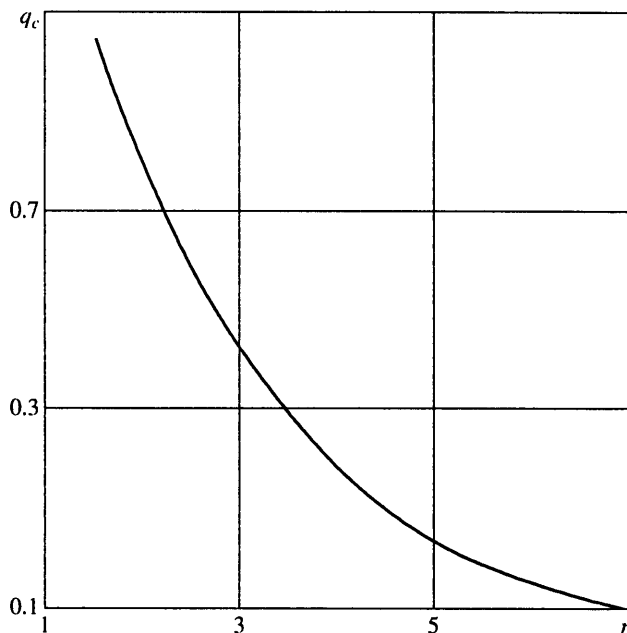
$$\zeta_s = \frac{2q^2}{1 + \sqrt{1 - 4q^2 \operatorname{ch} qx}}, \quad q^2 = -r \quad (4.1)$$

Амплитудная кривая для решения вида (4.1) показана на фиг. 1 линией 3. Солитонное решение существует в ограниченном диапазоне подкритичностей:  $0 \geq r \geq -1/4$ . Форма поверхности для солитонных решений с различными  $q$  представлена на фиг. 5. Из фиг. 5 очевидно, что с ростом подкритичности солитон увеличивается по амплитуде и ширине, а при  $r = -1/4$  занимает всю область.

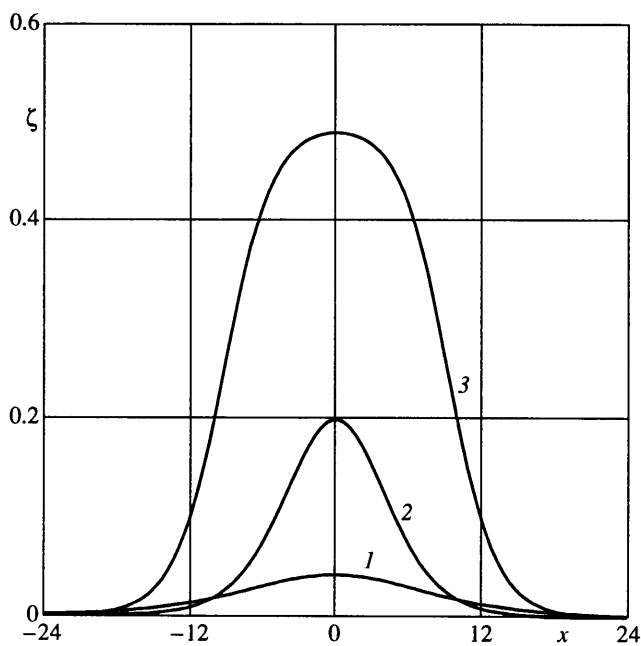
Солитонное решение исследовалось на устойчивость, по отношению к затухающим на бесконечности плоским возмущениям. Линейная задача устойчивости имеет вид

$$-\sigma \xi = -\frac{d^2}{dx^2} \left( r\xi + 3\zeta_s \xi - 6\zeta_s^2 \xi + \frac{d^2 \xi}{dx^2} \right) \quad (4.2)$$

где  $\sigma$  – декремент возмущений.



Фиг. 4. Критическое волновое число  $q_c$  в зависимости от параметра надкритичности



Фиг. 5. Форма поверхности раздела, соответствующая подкритическому солитонному решению:  $q = 0.2, 0.4, 0.4999$  (1–3)

После замены переменных  $z = \text{ch}^{-1}qx$  в (4.2) получим

$$-\frac{\sigma}{q^4}\xi = D\xi - 3D(\zeta_s\xi) + 6q^2D(\zeta_s^2\xi) - D^2\xi \quad (4.3)$$

$$z = 0: \xi = 0, \xi' < \infty, \quad z = 1: \xi, \xi' < \infty \quad (4.4)$$

$$D = z\sqrt{1-z^2} \frac{d}{dz} z\sqrt{1-z^2} \frac{d}{dz}$$

штрихом обозначаются производные по  $z$ .

Задача (4.3)–(4.4) решалась разложением в степенные ряды вблизи особых точек уравнения (4.3)  $z = 0$  и  $z = 1$

$$\xi_1 = z^{\mu_1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} z^n + z^{\mu_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} z^n, \quad \mu_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sigma/q^4}}{2}$$

$$\xi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (1-z)^n$$

с последующей сшивкой решений в некоторой точке внутри области. В ходе численного суммирования рядов обнаружена неустойчивость солитонного решения (4.1) относительно плоских возмущений во всей области его существования.

Наряду с одномерным солитонным решением (4.1) существует также аксиально-симметричный стационарный солитон. Форма поверхности, отвечающая решению такого рода, определяется из уравнения

$$\Delta \zeta_a = -r \zeta_a - \frac{3}{2} \zeta_a^2 + 2 \zeta_a^3 \quad (4.5)$$

где  $\Delta$  – радиальная часть оператора Лапласа в полярных координатах.

Решения уравнения (4.5) находились численно методом стрельбы. Соответствующая им амплитудная кривая показана на фиг. 1 линией 4. Аксиально-симметричные солитоны рождаются при  $r = -1/4$ , как и одномерные решения вида (4.1). Вид  $\zeta_a$  как функции полярного радиуса в достаточной степени схож с приведенной на фиг. 5 функцией  $\zeta_s$ . Устойчивость данного решения не исследовалась.

**Заключение.** На основании проведенных исследований можно сделать вывод о подкритическом возникновении конвекции в двухслойной системе, допускающей описание в рамках обобщенных приближений Буссинеска. При определенном соотношении толщин слоев становится возможным мягкое ветвление. В этом случае развитие конвективного движения описывается уравнением Кэна–Хиллиарда. Известно, что в замкнутой области устойчивым является “полуцелое” решение, которому соответствует одновихревое вторичное течение в каждом слое. Поверхность раздела поднимается у одной стенки и опускается у другой. Такое течение, однако, неустойчиво относительно поперечной модуляции валов. Кроме того, обнаружено солитонное решение и показана его неустойчивость относительно плоских возмущений.

Работа выполнена при частичном финансировании в рамках Программы поддержки ведущих научных школ (№ 00-15-96112).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Изаксон В.Х., Юдович В.И. О возникновении конвекции в слое жидкости со свободной границей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 4. С. 23–28.
2. Непомнящий А.А. О длинноволновой конвективной неустойчивости в горизонтальных слоях с деформируемой границей // Конвективные течения. Пермь: Изд-во Перм. пед. ин-та, 1983. С. 25–31.

3. *Bethancourt L.A.M., Hashiguchi M., Kuwahara K. et al.* Natural convection of a two-layer fluid in a side-heated cavity // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1992. V. 42. № 1. P. 2427–2437.
4. *Renardy Y.Y., Renardy M., Fujimura K.* Takens – Bogdanov bifurcation on the hexagonal lattice for double-layer convection // Physica. D. 1999. V. 129. № 3/4. P. 171–202.
5. *Лобов Н.И., Любимов Д.В., Любимова Т.П.* Конвективная неустойчивость системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей с деформируемой границей раздела // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 32–39.
6. *Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Alexander J.I.D. et al.* Long-wave instability of a differentially heated two-layer system with a deformable interface. // 3rd Intern. Conf. on Multiphase Flows (ICMF-98). Proc. CD. 1998, Lyon, France. PDF/PDF600/PDF675.
7. *Novick-Cohen A., Segel L.A.* Nonlinear aspects of the Cahn-Hilliard equation // Physica. D. 1984. V. 10. № 3. P. 277–298.
8. *Grinfeld M., Novick-Cohen A.* The viscous Cahn-Hilliard equation: Morse decomposition and structure of the global attractor // Trans Amer. Math. Soc. 1999. V. 351. № 6. P. 2375–2406.
9. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
10. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* О неустойчивости равновесия системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей при нагреве сверху // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 6. С. 28–34.
11. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 831 с.

Пермь  
 E-mail: lyubimov@psu.ru,  
 shklyaeв@psu.ru

Поступила в редакцию  
 27.IV.2001