

УДК 532.5.013.4:534.521

© 2002 г. Е.Л. ТАРУНИН, Н.И. ШУКЛИНА

РЕЗОНАНС, ВЫЗВАННЫЙ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ СОСУДА С ЖИДКОСТЬЮ, ПОДОГРЕВАЕМОЙ СВЕРХУ

Численно исследуется нестационарная конвекция в полости прямоугольного сечения при подогреве сверху, вызванная периодическими смещениями полости в горизонтальном направлении. Для зависимости интенсивности вызванного конвективного течения от частоты отчетливо проявляются резонансные эффекты. Эти эффекты проявляются при достаточной разности температур (число Грасгофа $G > 10^4$) и значительной амплитуде горизонтальных смещений полости. Найдены зависимости параметров (резонансная частота и амплитуда в резонансе) от параметров задачи (число Грасгофа, Прандтля и отношение длины полости к высоте) и метода. Оценки показывают, что вполне возможно обнаружение обсуждаемых эффектов в лабораторных условиях.

Ключевые слова: конвекция, горизонтальные колебания, резонанс.

Конвективные течения, вызванные модуляцияй ускорения, интенсивно изучались в последние годы [1]. Наиболее подробно исследован вариант высокочастотных вибраций, при котором обычно интересуются вопросами устойчивости и характером осредненного течения. Значительно меньше исследований, относящихся к случаю вынужденных колебаний с конечной частотой в случае замкнутых полостей. В данной работе изучен случай конечных по частоте горизонтальных вибраций полости прямоугольного сечения. Граничные условия соответствовали подогреву сверху, что обеспечивало устойчивую стратификацию при отсутствии вибрационных воздействий. Методами математического моделирования показано, что для конвективного течения, вызванного колебаниями сосуда, отчетливо обнаруживаются эффекты резонансного усиления амплитуды конвекции. Эти эффекты подробно исследованы для значения числа Прандтля $Pr = 6.7$ (вода) при числах Грасгофа $G \geq 5 \cdot 10^4$. Отношение длины полости к высоте изменялось от 1 (основные расчеты) до 2.

1. Постановка задачи. Полость прямоугольного сечения (фиг. 1) полностью заполнена жидкостью. Границы полости твердые и неподвижные. На горизонтальных границах поддерживаются постоянные, но различные температуры ($T_n > T_c$), соответствующие подогреву сверху. Вертикальные границы полости теплоизолированы. Вся полость подвержена горизонтальным вибрациям по закону

$$X_0 = A \cos(\Omega t) \quad (1.1)$$

Уравнения тепловой конвекции жидкости (приближение Буссинеска [2]) в системе отсчета, совершающей горизонтальные вибрации (1.1), можно записать в безразмерном виде ($\mathbf{v} = \mathbf{v}(u, v, 0)$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u - \frac{1 - \beta \Theta T}{\beta \Theta} GF \cos \omega t$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \Delta v + GT$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \Delta T$$

$$G = \frac{g\beta\Theta H^3}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad F = \frac{A\Omega^2}{g}, \quad \omega = \frac{\Omega H^2}{\nu}$$

В качестве единиц расстояния, времени, скорости и температуры выбраны соответственно: H – высота полости, H^2/ν – характерное время вязкого затухания ($\nu = \eta/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости), ν/H и разность температур $\Theta = T_n - T_c$. Уравнения содержат четыре безразмерных параметра – число Грасгофа G , число Прандтля Pr , F и безразмерную частоту вибраций сосуда ω . Выполнимость приближения Буссинеска требует неравенства $\beta\Theta \ll 1$.

Параметр F показывает отношение амплитуды ускорения по горизонтали, вызванное вибрациями, к величине ускорения свободного падения. В выбранной системе отсчета граничные условия задачи таковы ($l = L/H$):

$$v|_{\Gamma} = 0$$

$$T(t, x, 0) = 0, \quad T(t, x, 1) = 1, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$$

Начальные условия соответствовали покоящейся жидкости с линейным распределением температуры

$$\mathbf{v}^{(0)} = 0, \quad T^{(0)} = y \tag{1.2}$$

Так как чаще всего отыскивался установившийся периодический режим течения, начальные условия особой роли не играли.

Поставленная задача решалась двухполевым методом [4] в переменных функции тока ψ и вихря скорости φ :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi = (\text{rot } v)_z = -\Delta \psi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Delta \varphi + G \frac{\partial T}{\partial x} - GF \cos(\omega t) \frac{\partial T}{\partial y}$$

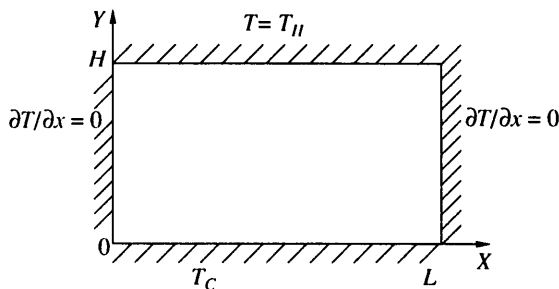
$$\Delta \psi + \varphi = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \Delta T$$

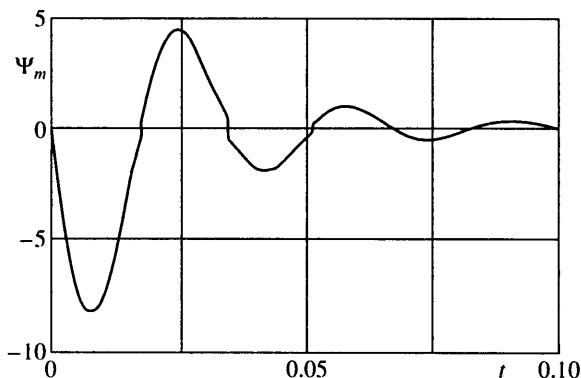
Уравнения (1.3) решались конечно-разностным методом на равномерной сетке по явной двухслойной схеме. Так как резонансные явления характерны для больших значений числа Грасгофа, конвективные слагаемые в эволюционных уравнениях аппроксимировались разностями против тока. Значение функции тока на границе полагалось равным нулю, а для вихря скорости использовалась формула Тома [4]. Для вычисления температуры на боковых границах использовалось два подхода. В основном варианте температура на боковых гранях вычислялась по эволюционному уравнению с введением фиктивных узлов. Этот вариант обеспечивал аппроксимацию условия отсутствия теплотока с порядком $O(h^2)$. Часть расчетов была выполнена при аппроксимации отсутствия теплового потока с неполным учетом эволюционности с порядком $O(h)$.

Уравнение Пуассона для функции тока решалось на каждом шаге по времени методом поточечной верхней релаксации [4] с оптимальным параметром релаксации до выполнения одного из неравенств (N_x – число интервалов на оси x)

$$m \geq 2.5N_x, \quad \max_{j,k} |\psi_{j,k}^{(m+1)} - \psi_{j,k}^{(m)}| < 10^{-4}$$



Фиг. 1. Геометрия области и граничные условия



Фиг. 2. Зависимость экстремума функции тока Ψ_m от времени t при отсутствии вибрации ($G = 10^5$, $Pr = 6.7$, $l = 1$, $F = 0$, сетка 30×30)

В качестве интегральных характеристик течения использовались экстремальное значение функции тока Ψ_m , кинетическая энергия E и числа Нуссельта

$$Nu_1 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} dx, \quad Nu_2 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=1} dx$$

2. Результаты. Серийным вычислительным экспериментам предшествовал этап исследования свободных затухающих колебаний при отсутствии модуляции ($F = 0$). Для наблюдения затухающих колебаний при подогреве сверху (эти колебания были предсказаны в [2]) система в начале выводилась из состояния равновесия с помощью задания распределения функции тока

$$\psi^{(0)} = 10^3 x^2 (l-x)^2 y^2 (1-y)^2 \quad (2.1)$$

Использованное распределение функции тока (2.1) соответствовало одновихревому течению жидкости. С этим заданным распределением функции тока велся счет одного уравнения теплопроводности до момента времени $t = t_0$, при котором число Нуссельта достигало величины $Nu_1(t_0) \geq 1.2$. После этого ($t > t_0$) счет выполнялся по полным уравнениям, но без вибраций ($F = 0$).

Вычислительные эксперименты показали, что при $G < 10^4$ созданное отклонение температуры от равновесного монотонно приближалось к равновесному решению ($T = y$, $\psi = 0$). Отчетливые затухающие колебания наблюдались при $G > 10^4$. Типичный вид затухающих колебаний при $G = 10^5$ представлен на фиг. 2.

В качестве амплитуды колебаний выбрано экстремальное значение функции тока

$$\Psi_m = \text{sign}(\Psi_{j,k}) \max_{j,k} |\Psi_{j,k}|$$

Из представленной зависимости $\Psi_m(t)$ можно найти характеристики колебания, которые приближенно могут быть описаны на языке гармонических затухающих колебаний с одной степенью свободы [5]

$$\Psi_m = \Psi_m^0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_e t + \alpha), \quad \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (2.2)$$

Здесь частота колебаний ω_e выражена через собственную частоту колебаний без трения (вязкости) ω_0 и коэффициент γ , определяющий силу вязкого трения в дифференциальном уравнении для свободных колебаний

$$\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0 \quad (2.3)$$

Полагая, что зависимость (2.2) является решением уравнения (2.3), можно определить параметры модельного уравнения (2.3) – T_e , γ , T_0 . Если, например, Ψ_1 и Ψ_2 соседние экстремумы $\Psi_m(t)$ в соответствующие моменты t_1 и t_2 , то очевидно

$$T_e = 2(t_2 - t_1), \quad \gamma = 2 \ln |\Psi_1 / \Psi_2| / T_e$$

Подобная обработка зависимостей $\Psi_m(t)$ для численного решения на сетке 20×20 ($\text{Pr} = 6.7$, $l = 1$) позволила получить значения, указанные ниже

G	T_e	γ	T_0	ω_0	$f_0 = \omega_0/2\pi$
10^5	0.031 ± 0.001	47 ± 3	0.0295 ± 0.0006	213 ± 5	33 ± 1
$2 \cdot 10^5$	0.022 ± 0.0004	57 ± 6	0.02085 ± 0.0005	301 ± 7	47 ± 2

Полученные данные позволили надеяться на реализацию установившихся колебаний при включении вибраций полости и дали оценку для резонансной частоты [5]

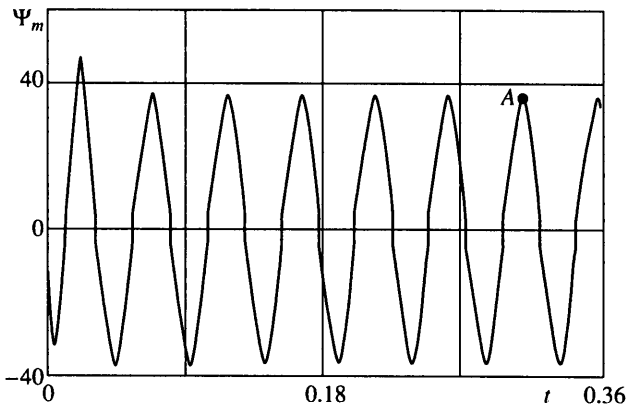
$$\omega_* = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

При $10^5 \leq G \leq 2 \cdot 10^5$ резонансные частоты $f_* = \omega_*/2\pi$ лежат в интервале от 30 до 46. Дальнейшие расчеты показали, что эта оценка правдоподобна (резонансное значение при $G = 10^5$, определенное на сетке 20×20 , оказалось равным ≈ 24).

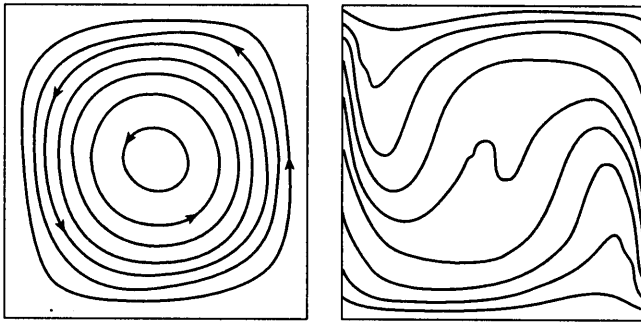
На фиг. 3 представлена зависимость $\Psi_m(t)$, полученная путем численного решения полных уравнений до момента установления амплитуды колебаний при $F = 16$. Начальное состояние соответствовало покоящейся жидкости с линейным по вертикали распределением температуры. Установление амплитуды вынужденных колебаний происходит довольно быстро – после 2–3 периодов амплитуда Ψ_m^* устанавливается с точностью до 0.5%. Одному полному периоду колебаний $\Psi_m(t)$ соответствует два полных периода колебаний числа Нуссельта. Между зависимостями $\text{Nu}_1(t)$ и $\text{Nu}_2(t)$ есть сдвиг фаз; при частоте $f = 21.5$ величина этого сдвига $\approx 0.5T_{\text{Nu}}(T_{\text{Nu}} - \text{период колебаний Нуссельта})$.

Картина течения (линии тока и изотермы), соответствующая максимальному значению $\Psi_m(t)$, представлена на фиг. 4 (для минимального значения $\Psi_m(t)$ картина аналогична). Соответствующее значение (момент времени и значение $\Psi_m(t)$) отмечено на фиг. 3 точкой с буквой А. Структура течения соответствует вращению жидкости против часовой стрелки на одной половине периода и вращению в противоположном направлении на второй половине периода $\Psi_m(t)$.

Визуально изотермы вроде бы не соответствуют условиям теплоизоляции на боковых гранях. Это вызвано существенным нестационаром и сильным градиентом температуры у границ с узким пограничным слоем, слабо разрешаемым на исполь-



Фиг. 3. Выход на установившиеся колебания ($G = 10^5$, $Pr = 6.7$, $l = 1$, $F = 16$, сетка 30×30)



Фиг. 4. Линии тока (слева) и изотермы (справа) в режиме установившихся колебаний для момента времени $t = 0.306$, $G = 10^5$, $Pr = 6.7$, $l = 1$, $F = 16$, сетка 30×30

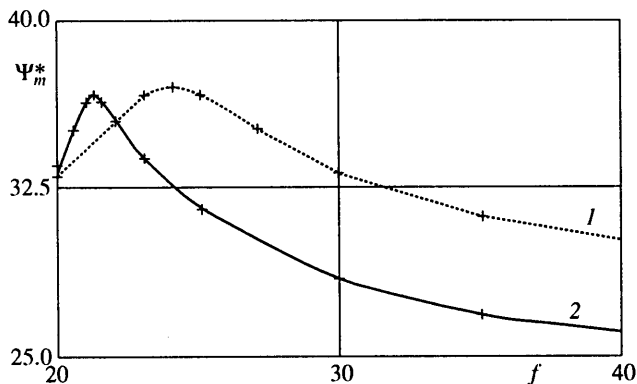
зованной пространственной сетке. Контрольные расчеты с иной аппроксимацией условия теплоизоляции (замена эволюционного уравнения на границе на аппроксимацию с порядком $O(h)$) показали, что использованный вариант является более точным.

Расчеты, подобные представленным на фиг. 3, 4, были выполнены для различных частот. На фиг. 5 показаны зависимости $\Psi_m^*(f)$. Сплошная линия соответствует сетке 30×30 , а пунктирная – сетке 24×24 . Крестики на фиг. 5 соответствуют данным вычислительных экспериментов. Отчетливо заметен резонансный характер обсуждаемой зависимости $\Psi_m^*(f)$. С измельчением сетки резонансные частоты смещаются в сторону меньших частот.

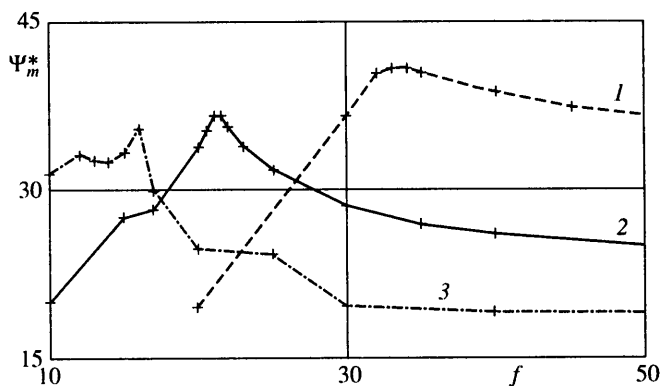
Обработка результатов, полученных на различных сетках, позволила оценить предельные при $h \rightarrow 0$ значения ($G = 10^5$, $F = 16$, $Pr = 6.7$): $\overline{\Psi_m^*} = 37 \pm 0.5$, $\overline{f_*} = 20.6 \pm 0.6$.

Из этих оценок следует, что на сетке 30×30 ($l = 1$) относительная погрешность резонансных характеристик менее 5%.

С ростом числа Грасгофа максимумы резонансных кривых поднимаются и смещаются в сторону больших частот (фиг. 6). Обращают на себя внимание две вершины вблизи резонансной частоты для $G = 0.5 \cdot 10^5$ (линия 3). Расчеты с частотами вблизи этих пиков показали, что характер течения в целом при этом меняется не существенно, но в зависимости, например, $\Psi_m(t)$ заметно появление субгармоник. При этом,



Фиг. 5. Резонансные кривые $\Psi_m^*(f)$ для $G = 10^5$, $Pr = 6.7$, $l = 1$, $F = 16$, (сетка 24×24 – линия 1, сетка 30×30 – линия 2)



Фиг. 6. Резонансные кривые $\Psi_m^*(f)$ для $Pr = 6.7$, $l = 1$, $F = 16$, сетка 30×30 , $G = 2 \cdot 10^5$, 10^5 , $0.5 \cdot 10^5$ (линии 1–3)

естественно, зависимость амплитуды от времени сложнее той, что изображена на фиг. 3.

Представленные результаты были получены для фиксированного значения числа Прандтля $Pr = 6.7$ (вода). Расчеты с $Pr = 2$ показали, что уменьшение числа Прандтля увеличивает безразмерную амплитуду в резонансе и смещают резонансную частоту в сторону больших частот. Для параметров $G = 10^5$, $l = 1$, $N_x = 20$ обсуждаемый сдвиг по амплитуде и частоте составляет $\approx 6\%$.

При увеличении горизонтального размера полости резонансная кривая, так же как и при уменьшении числа Прандтля, смещается вправо и вверх. При смене $l = 1$ на $l = 2$ ($G = 10^5$, $F = 16$, $Pr = 6.7$) сдвиг по амплитуде составляет примерно 33% , а по частоте – 61% .

Заключение. При горизонтальных вибрациях полости возможны резонансные эффекты в жидкости с устойчивой стратификацией плотности. Это явление можно наблюдать в случае, когда система, выведенная из равновесия, дает затухающие колебания $G > 10^4$ и когда максимальные ускорения, вызванные горизонтальными вибрациями полости, примерно на порядок выше ускорения свободного падения ($F \approx 10$). Выяснено влияние чисел Грасгофа, Прандтля и длины полости на параметры резонанса: при росте числа Грасгофа, при уменьшении числа Прандтля частота и амплитуда увеличиваются. Найденные значения параметров резонанса позволяют

оценить соответствующие размерную частоту $f \approx 24\nu/H^2$ и амплитуду горизонтальных вибраций $A \approx (H^2/24\nu)^2$, где ν – кинематическая вязкость, H – высота полости, при которых отчетливо можно наблюдать явление резонанса. Для параметров воды с размером полости $H \approx 1$ см частота вполне реализуема, но амплитуда оказывается очень большой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gershuni G.Z., Lyubimov D.V.* Thermal Vibrational Convection. N.Y. et al.: Wiley, 1998. 358 p.
2. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320с.
4. *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд. Иркутск. у-та, 1990. 225 с.
5. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т. 2. М.: Наука, 1988. 496с.

Пермь
E-mail: tarunin @psu.ru

Поступила в редакцию
23.VII.2001