

УДК 533.72

© 2002 г. А.Б. ПОДДОСКИН

О СКАЧКЕ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА МНОГОАТОМНЫЙ ГАЗ-КОНДЕНСИРОВАННАЯ ФАЗА

Для компонент гидродинамического тензора напряжений получено граничное условие на межфазной границе раздела многоатомный газ-конденсированная фаза. Решение граничной задачи проводится в рамках предложенной ранее кинетической модели, в которой учтены вращательные степени свободы молекул газа, методом полупространственных моментов. Газокинетический коэффициент C_p , входящий в граничное условие для компонент тензора напряжений, зависит от коэффициента аккомодации тангенциального импульса q , коэффициентов аккомодации трансляционной α_t и ротационной α_r составляющих энергии, числа Прандтля. Проведены вычисления этого коэффициента для некоторых многоатомных газов.

Ключевые слова: тензор напряжений, граница раздела, слой Кнудсена, термофорез.

При решении задач газодинамики необходимо использовать граничные условия для макропараметров течения газа на границе раздела газ-конденсированная фаза. В частности, подобные задачи возникают в теории термофореза и диффузиофореза умеренно крупных аэрозольных частиц при взаимодействии облачных капель и капель топлив и др. В [1] показано, что тангенциальная составляющая гидродинамического тензора напряжений на поверхности нелетучей жидкости терпит разрыв из-за того, что часть тангенциальной составляющей потока импульса проходит по слою Кнудсена.

Настоящая работа посвящена расчету газокинетического коэффициента C_p , входящего в граничное условие для тензора напряжений [1], при условии, что жидкая поверхность обтекается неоднородным по температуре многоатомным газом с вращательными степенями свободы.

Пусть сферическая нелетучая жидкая частица (капля) находится в многоатомном газе в поле градиента температуры. В этом случае она начинает двигаться под действием термофоретической силы. Поместим начало сферической системы координат в центре частицы, а полярную ось направим вдоль градиента температуры. Будем предполагать, что выполнены условия линеаризации $|\lambda \nabla \ln T_e| \ll 1$, $|u_e| \ll 2kT_e / m$, число Кнудсена $Kn = \lambda / R$ – мало. Здесь λ – средняя длина свободного пробега молекул газа, m – масса молекулы газа, T_e , u_e – температура и скорость газа. Далее индекс "e" относится к газу, а "i" – к капле. Кроме этого, будем пренебрегать изменением формы капли, что возможно при выполнении условия [2] $\gamma_i \gg v_e \mu_e |\nabla \ln T_e|$. Здесь γ_i – коэффициент поверхностного натяжения жидкости капли, μ_e , v_e – динамическая и кинематическая вязкости газа.

Вокруг капли формируется слой Кнудсена. Вне слоя Кнудсена состояние газа описывается рядом Чепмена – Энскога, который имеет вид [3]

$$f_{Ch} = f_0(1 + \Phi_0 + \Psi_{Ch}) \quad (1)$$

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \left[\frac{I_1 I_2 I_3}{(2\pi k T_0)^3} \right]^{1/2} \exp(-c^2 - c_\omega^2), \quad \mathbf{c} = \sqrt{m/2kT_0} \mathbf{v}$$

$$\Phi_0 = \mathbf{v} + (c^2 + c_\omega^2 - 3)\boldsymbol{\tau} + 2(\mathbf{c}\mathbf{G}), \quad \mathbf{G} = \sqrt{m/2kT_0} \mathbf{u}, \quad c_\omega^2 = I_\alpha \omega_\alpha^2 / 2kT_0$$

$$\Psi_{Ch} = -a_1(\mathbf{c}\mathbf{g})(c^2 + c_\omega^2 - 4) - b_1 c_\alpha c_\beta \Pi_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{g} = (\nabla T)_\infty / T_0$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial G_\beta}{\partial x_\alpha} \right), \quad a_1 = \frac{2\mu}{\text{Pr} \rho_0} \sqrt{\frac{m}{2kT_0}}, \quad b_1 = \frac{4\mu}{\rho_0} \sqrt{\frac{m}{2kT_0}}$$

$$\mathbf{v} = \frac{n - n_0}{n_0}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{T - T_0}{T_0}$$

где I_α и ω – компоненты момента инерции и угловая скорость молекулы, \mathbf{v} – скорость поступательного движения молекул, n_0 и T_0 – равновесные значения концентрации и температуры, \mathbf{v} , $\boldsymbol{\tau}$ – отклонения от равновесных значений безразмерной концентрации и температуры газа. Здесь и далее по повторяющимся греческим индексам проводится суммирование.

Используя обозначение

$$(\Phi, \Psi) = \int e^{-c^2 - c_\omega^2} \Phi \Psi \frac{d^3 c}{\pi^{3/2}} \frac{d^3 c_\omega}{\pi^{3/2}} \quad (2)$$

моменты \mathbf{v} , $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{G} , \mathbf{Q} могут быть представлены в виде

$$\mathbf{v} = (1, \Phi), \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{3}((c^2 + c_\omega^2 - 3), \Phi)$$

$$\mathbf{G} = (\mathbf{c}, \Phi), \quad \mathbf{Q} = (\mathbf{c}(c^2 + c_\omega^2 - 4), \Phi)$$

Около частицы газ описывается функцией распределения

$$f = f_{Ch} + f_0 \Phi \quad (3)$$

где Φ – функция, описывающая состояние газа внутри слоя Кнудсена.

Воспользовавшись определением тензора напряжений

$$P_{\alpha\beta} = m \int v_\alpha v_\beta f d^3 v d^3 \omega$$

и выражением (3), находим

$$P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}^{(Ch)} + P_{\alpha\beta}^{(Kn)} \quad (4)$$

Учитывая условие линейризации, как и в случае простого газа, закон сохранения импульса можно записать в виде

$$\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = 0$$

Этому же уравнению удовлетворяют и компоненты тензора $P_{\alpha\beta}^{(Kn)} = 2P_0(c_\alpha c_\beta, \Phi)$.

Учитывая осевую симметрию задачи, компоненты тензора напряжений не зависят от переменной φ и в используемом приближении по Кн $P_{\theta\theta}^{(Kn)} = P_{\varphi\varphi}^{(Kn)}$ и $P_{r\theta}^{(Kn)} = P_{\theta\varphi}^{(Kn)} = 0$ [1].

Поэтому закон сохранения импульса в сферической системе координат можно представить в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_{rr}^{(Kn)}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta P_{\theta r}^{(Kn)}) - \frac{2P_{\theta\theta}^{(Kn)}}{r} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_{r\theta}^{(Kn)}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta P_{\theta\theta}^{(Kn)}) + \frac{P_{\theta r}^{(Kn)}}{r} - \frac{\text{ctg} \theta}{r} P_{\theta\theta}^{(Kn)} = 0 \quad (6)$$

Интегрируя уравнения (5) и (6) по слою Кнудсена, получим в линейном приближении по Кн следующие выражения:

$$P_{rr}^{(Kn)} = -\frac{2}{R} \int_R^\infty P_{\theta\theta}^{(Kn)} dr \quad (7)$$

$$P_{r\theta}^{(Kn)} = -\frac{1}{R} \int_R^\infty P_{\theta\theta}^{(Kn)} dr \quad (8)$$

$$P_{\theta\theta}^{(Kn)} = 2P_0(c_\theta^2, \Phi)$$

Из этих выражений следует, для того чтобы рассчитать $P_{\theta\theta}^{(Kn)}$, необходимо знать ту часть функции распределения Φ , которая ответственна за скачок температуры газа на межфазной поверхности.

Для вычисления компоненты тензора $P_{\theta\theta}^{(Kn)}$ воспользуемся модельным кинетическим уравнением [4], в котором учтены вращательные степени свободы молекул многоатомного газа и, в условиях задачи о скачке температуры, имеющем вид

$$c_r \frac{d\Phi}{dr_0} = v + (c^2 + c_\omega^2 - 3)\tau + 2c_r G_r + \xi c_r Q_r (c^2 + c_\omega^2 - 4) - \Phi \quad (9)$$

Эта задача решается методом полупространственных моментов, аналогично тому, как это сделано в [5]. Здесь приведем только результат

$$\Phi = \eta^+ \Phi^+ + \eta^- \Phi^-$$

$$\eta^\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \text{sign } c_r), \quad \text{sign } c_r = \begin{cases} 1, & c_r > 0 \\ -1, & c_r < 0 \end{cases}$$

$$\Phi^\pm = b_0^\pm + (c^2 - \frac{3}{2})b_1^\pm + (c_\omega^2 - \frac{3}{2})b_2^\pm + c_r(c^2 + c_\omega^2 - 4)b_3^\pm$$

Моменты b_i^\pm являются функциями от переменных r и θ :

$$b_k^\pm(r_0, \theta) = B_1(\theta)\gamma_k^\pm \exp(-\rho_1 r_0) + B_2(\theta)\delta_k^\pm \exp(-\rho_2 r_0), \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (10)$$

$$\gamma_0^+ = 1, \quad \gamma_0^- = 0.4235, \quad \gamma_1^+ = -2.0647, \quad \gamma_1^- = -0.9117,$$

$$\gamma_2^+ = -4.6803, \quad \gamma_2^- = -0.9383, \quad \gamma_3^+ = 2.5973, \quad \gamma_3^- = -0.3634;$$

$$\delta_0^+ = 1, \quad \delta_0^- = 0.3402, \quad \delta_1^+ = -1.5737, \quad \delta_1^- = -0.2541,$$

$$\delta_2^+ = -0.4034, \quad \delta_2^- = -0.2252, \quad \delta_3^+ = 0.9242, \quad \delta_3^- = -0.1043;$$

$$\rho_1 = 1.4688, \quad \rho_2 = 1.7817.$$

Параметры $B_1(\theta)$, $B_2(\theta)$ находятся из граничных условий для функции распределения.

В качестве граничных условий для функции распределения воспользуемся зеркально-диффузной моделью [6–8]

$$f^+(c_r, c_\theta, c_\varphi; \omega, R) = qf_m + (1-q)f^-(-c_r, c_\theta, c_\varphi; \omega, R) \quad (11)$$

$$f_m = f_0(1 + v_m + (c^2 - \frac{3}{2})\tau_{mt} + (c_\omega^2 - \frac{3}{2})\tau_{mr})$$

$$f^\pm(\pm c_r, c_\theta, c_\varphi; \omega, R) = f_0(1 \mp a_1 g_r c_r (c^2 + c_\omega^2 - 4) + [b_0^\pm + b_1^\pm (c^2 - \frac{3}{2}) + b_2^\pm (c_\omega^2 - \frac{3}{2}) \pm b_3^\pm c_r (c^2 + c_\omega^2 - 4)])$$

$$v_m = (n_0 - n_m) / n_0, \quad \tau_{mt} = (T_0 - T_{mt}) / T_0, \quad \tau_{mr} = (T_0 - T_{mr}) / T_0$$

Здесь f^+ , f^- – функции распределения отраженных и падающих на поверхность молекул, q – коэффициент диффузности, который в условиях данной задачи совпадает с коэффициентом аккомодации тангенциального импульса [7]; $v_m, \tau_{mt}, \tau_{mr}$ – свободные параметры модели граничных условий [8], которые можно определить, воспользовавшись условием непротекания поверхности, т.е. должны быть равны потоки падающих и отраженных молекул и через коэффициенты аккомодации трансляционной α_t и ротационной α_r , составляющих энергии

$$\alpha_t = \frac{E_t^- - E_t^+}{E_t^- - E_{st}}, \quad \alpha_r = \frac{E_r^- - E_r^+}{E_r^- - E_{sr}} \quad (12)$$

Здесь E_t^\pm – трансляционные составляющие потоков энергии падающих и отраженных от стенки молекул, E_r^\pm – ротационные составляющие потоков энергии падающих и отраженных молекул, E_{st} и E_{sr} – трансляционная и ротационная составляющие потока энергии отраженных молекул при условии, если бы газ находился при полном равновесии со стенкой ($q = 1$), т.е. когда $T_{mt} = T_{mr} = T_s$. Такая постановка граничных условий несколько отличается от используемой в [5].

Используя (11), получим граничные условия для моментов b_i^\pm в виде

$$B_1[\gamma_0^+ - (1-q)\gamma_0^-] + B_2[\delta_0^+ - (1-q)\delta_0^-] = qv_m \quad (13)$$

$$B_1[\gamma_1^+ - (1-q)\gamma_1^-] + B_2[\delta_1^+ - (1-q)\delta_1^-] = q\tau_{mt} \quad (14)$$

$$B_1[\gamma_2^+ - (1-q)\gamma_2^-] + B_2[\delta_2^+ - (1-q)\delta_2^-] = q\tau_{mr} \quad (15)$$

$$B_1[\gamma_3^+ - (1-q)\gamma_3^-] + B_2[\delta_3^+ + (1-q)\delta_3^-] = (2-q)a_1 g_r \quad (16)$$

Из соотношений (12)–(16) находим выражения для коэффициентов B_1, B_2 :

$$B_1 = B_1^* a_1 g_r \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad B_1^* = \frac{1}{\Delta_{01}} \left[\frac{5}{4} \frac{(2-\alpha_t)}{\alpha_t} - \frac{(2-\alpha_r)}{\alpha_r} \right] \times \\ \times [\delta_3^+ + (1-q)\delta_3^-] + \frac{(2-q)}{\Delta_{01}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\delta_r - \delta_t) \quad (17)$$

$$B_2 = B_2^* a_1 g_r \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad B_2^* = -\frac{1}{\Delta_{01}} \left[\frac{5}{4} \frac{(2-\alpha_t)}{\alpha_t} - \frac{(2-\alpha_r)}{\alpha_r} \right] \times \\ \times [\gamma_3^+ + (1-q)\gamma_3^-] - \frac{(2-q)}{\Delta_{01}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\gamma_r - \gamma_t) \quad (18)$$

$$\gamma_t = \left[\frac{1}{\alpha_t} (\gamma_0^+ + \frac{3}{2} \gamma_1^+ + \frac{5\sqrt{\pi}}{8} \gamma_3^+) + \left(1 - \frac{1}{\alpha_t} \right) \left(\gamma_0^- + \frac{3}{2} \gamma_1^- - \frac{5\sqrt{\pi}}{8} \gamma_3^- \right) \right]$$

$$\gamma_r = \left[\frac{1}{\alpha_r} (\gamma_0^+ + \frac{1}{2} \gamma_1^+ + \gamma_2^+ + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \gamma_3^+) + \left(1 - \frac{1}{\alpha_r} \right) \left(\gamma_0^- + \frac{1}{2} \gamma_1^- + \gamma_2^- - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \gamma_3^- \right) \right]$$

$$\delta_t = \left[\frac{1}{\alpha_t} (\delta_0^+ + \frac{3}{2} \delta_1^+ + \frac{5\sqrt{\pi}}{8} \delta_3^+) + \left(1 - \frac{1}{\alpha_t} \right) \left(\delta_0^- + \frac{3}{2} \delta_1^- - \frac{5\sqrt{\pi}}{8} \delta_3^- \right) \right]$$

$$\delta_r = \left[\frac{1}{\alpha_r} (\delta_0^+ + \frac{1}{2} \delta_1^+ + \delta_2^+ + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \delta_3^+) + \left(1 - \frac{1}{\alpha_r} \right) \left(\delta_0^- + \frac{1}{2} \delta_1^- + \delta_2^- - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \delta_3^- \right) \right]$$

$$\Delta_{01} = \{ [\gamma_3^+ + (1-q)\gamma_3^-] (\delta_r - \delta_t) - [\delta_3^+ + (1-q)\delta_3^-] (\gamma_r - \gamma_t) \}$$

Используя решение (10), находим компоненты тензора напряжений $P_{rr}^{(Kn)}$ и $P_{r\theta}^{(Kn)}$

$$P_{rr}^{(Kn)} = C_p \frac{2\mu_e^2}{R\rho_e} g_r \quad (19)$$

$$P_{r\theta}^{(Kn)} = -C_p \frac{\mu_e^2}{R\rho_e} \frac{\partial g_r}{\partial \theta} \quad (20)$$

$$C_p = \frac{1}{Pr} [0.55141B_1^* + 0.12507B_2^*]$$

Отсюда видно, что газокинетический коэффициент C_p через B_1^* и B_2^* зависит от коэффициента аккомодации тангенциального импульса q , коэффициентов аккомодации трансляционной α_t и ротационной α_r , составляющих энергии.

В частности, при полной аккомодации ($q = \alpha_t = \alpha_r = 1$), используя табличные данные [9], для метана ($Pr = 0.75$) $C_p = 0.211$, для аммиака ($Pr = 0.93$) $C_p = 0.170$, для водяного пара ($Pr = 1.0$) $C_p = 0.158$.

Воспользовавшись определением коэффициента аккомодации энергии [7]

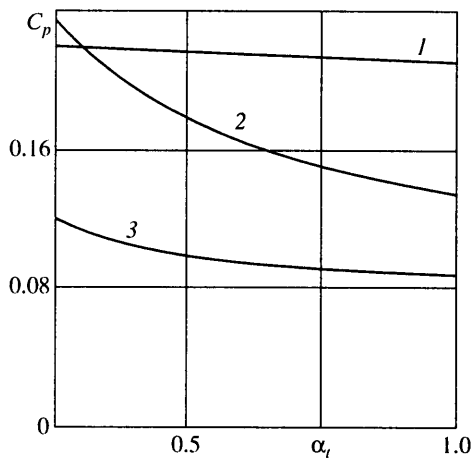
$$\alpha_e = \frac{E^- - E^+}{E^- - E_s}$$

и используя выражение (12), находим уравнение связи α_e с α_t и α_r в виде

$$\alpha_e = \frac{\alpha_t + \zeta \alpha_r}{1 + \zeta}, \quad \zeta = \frac{E_r^- - E_{sr}}{E_t^- - E_{st}}$$

Если формально положить $\alpha_t = \alpha_r$, то последние совпадают с коэффициентом аккомодации энергии α_e . Вычисляя потоки $E_t^-, E_{sr}, E_r^-, E_{sr}$ с помощью полученной функции распределения, можно показать, что для многоатомного газа $\zeta = 3\zeta_0/5$, причем расчеты дают $\zeta_0 \approx 1.11$. Таким образом, по известным экспериментальным данным α_e и α_t можно определить α_r .

Согласно [10], $\alpha_r < \alpha_t$. Поэтому на фигуре представлены графики зависимости коэффициента C_p ($Pr = 0.75$) от α_t при заданном α_r . В случае $\alpha_t = \alpha_r = \alpha_e$ коэффициент C_p практически остается постоянным (кривая 1), т.е. фактически не зависит от α_e . Аналогичное имеет место и в случае одноатомного газа. В то же время, чем больше происходит обмен ротационной составляющей энергии молекулы газа с поверхностью (большие α_r), тем сильнее изменяется C_p в зависимости от α_t (см. кривые 2 и 3). Анализ формул (17), (18) показывает, что при $\alpha_t \rightarrow 0$ и $\alpha_r \rightarrow 0$ коэффициент C_p остается конечным. Для других многоатомных газов (другие Pr) зависимость C_p от α_t качественно будет такой же.



Зависимости коэффициента скачка тензора напряжений C_p многоатомного газа с вращательными степенями свободы ($Pr = 0.75$ при $q = 1$) от коэффициента аккомодации энергии α_c (1), от коэффициента аккомодации трансляционной составляющей энергии α_r при $\alpha_c = 0.3$ (2) и от коэффициента аккомодации трансляционной составляющей энергии α_r при $\alpha_c = 0.05$ (3)

В то же время для простого газа ($Pr = 2/3$) [1] газокинетический коэффициент $C_p = 0.747$. Существенное различие коэффициентов C_p для многоатомных и одноатомных газов свидетельствует о значительном вкладе внутренних (вращательных) степеней свободы в указанный коэффициент.

Заключение. Получен газокинетический коэффициент C_p , характеризующий разрыв гидродинамических компонент тензора напряжений на границе раздела многоатомный газ – конденсированная фаза. Расчеты выполнены на базе кинетической модели, в которой учитывались вращательные степени свободы молекул газа. Показано, что C_p является функцией q , α_r , α_c , Pr .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. К теории термофореза жидких нелетучих аэрозольных частиц // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8. Вып. 23. С. 1438–1441.
2. Яламов Ю.И., Санасарян А.С. О движении крупных капель, твердых частиц и газовых пузырьков в неоднородных по температуре газах и жидкостях в режиме со скольжением // Журн. техн. физики. 1975. Т. 45. № 10. С. 2152–2158.
3. Жданов В.М., Алиевский М.Я. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 335 с.
4. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. О скольжении и скачках макропараметров многоатомного газа с вращательными степенями свободы на слабо искривленной сферической поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 5. С. 194–202.
5. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. О скачке температуры на границе двухатомного газа и плоской поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 4. С. 163–170.
6. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
7. Баранцев Р.Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975. 343 с.
8. Ларина И.Н., Рыков В.А. О граничных условиях для газов на поверхности тела // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 141–148.
9. Физические величины. Справочник / Под ред. И.С. Григорьева и Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
10. Marsden D.J. Measurement of energy transfer in gas-solid surface interactions using electron beam excited emission of light // Rarefied Gas Dynamics. Proc. 4th Intern. Symp. N. Y.; L.: Acad. Press, 1966. V. 2. P. 566–583.