

УДК 533.6.011.8

© 2002 г. А.И. ЕРОФЕЕВ, О.Г. ФРИДЛЕНДЕР

ПЕРЕНОС ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ В УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Исследованы профили макропараметров в сильной ударной волне, распространяющейся в однокомпонентном одноатомном газе. Взаимодействие молекул описывается моделью сфер переменного диаметра. Количественная информация о параметрах в ударной волне получена с помощью метода прямого статистического моделирования. На основе этих данных выявлены простые приближенные зависимости напряжения и теплового потока от скорости течения газа и обобщены линейные соотношения Ньютона и Фурье.

Ключевые слова: ударная волна, одноатомный газ, соотношения Ньютона и Фурье, статистическое моделирование.

В последние годы активно проводятся исследования с целью получения макроскопических уравнений, описывающих течения газа при не слишком малых локальных числах Кнудсена. Помимо работ, в которых развивается общий подход [1–3], в том же направлении особенно успешно проводились исследования плоской задачи Куэтта. Для газа из максвелловских молекул [4] или для модельного кинетического уравнения [5] возможно выразить напряжение как функцию только градиента скорости. На основе численного решения уравнения Больцмана для задачи Куэтта методом Монте-Карло было показано [6,7], что возможно обобщение закона Ньютона для напряжений и закона Фурье для теплового потока в газе с произвольным законом взаимодействия между молекулами. Относительная скорость движения плоских пластин в задаче Куэтта и отношение их температур принимались настолько большими, чтобы создать величину градиентов макропараметров, сходную с величиной градиентов этих макропараметров в сильных ударных волнах [6].

В этой связи представляло интерес проанализировать решение задачи о структуре ударной волны для выявления возможности существования зависимостей для напряжений и теплового потока, более общих, чем законы Ньютона и Фурье, справедливых для ударных волн бесконечно малой интенсивности. Или, в другой формулировке, возможно ли течение в ударной волне описывать макроскопическими уравнениями, полученными замыканием уравнений сохранения нелинейными зависимостями напряжения и теплового потока от локальных значений гидродинамических величин и их первых производных по координатам?

Количественному расчетно-теоретическому определению структуры ударной волны: профилей плотности, скорости, температуры посвящены сотни работ. Ниже будут обсуждаться лишь те работы, в которых исследовались процессы переноса импульса и энергии. Известно, что структура ударных волн малой интенсивности приближенно описывается уравнениями Навье-Стокса, но с увеличением числа Маха они не дают адекватного описания газодинамических профилей. Применение уравнений Барнетта и их обобщений [8] несколько улучшает положение, однако полученные с их помощью результаты при больших числах Маха также существенно отличаются от результатов численного решения уравнения Больцмана, особенно для максвелловских молекул. Отметим, что в работах, использующих уравнения Барнетта, отсутствует

сравнение величин напряжения и тепловых потоков, вычисленных при решении уравнения Больцмана, с этими величинами в приближении Барнетта, вычисленными по распределениям плотности, скорости и температуры, полученными в том же решении уравнения Больцмана.

Анализ напряжения и теплового потока в ударных волнах проведен в работах [9–16]. В [9] дано сравнение напряжения, рассчитанного методом прямого статистического моделирования, с напряжением, определенным на основе полученных профилей скорости и температуры по соотношению Ньютона. По-видимому, впервые в этой работе в задаче о структуре ударной волны количественно продемонстрирована погрешность соотношения Ньютона для напряжений. В [10] дан анализ зависимостей напряжения и теплового потока от плотности газа для различных моделей кинетического уравнения в сравнении с решениями методом прямого статистического моделирования. Наиболее полный анализ зависимостей напряжения, теплового потока и градиентов гидродинамических параметров от изменения плотности в ударной волне дан в [11, 12]. В частности, в этих работах установлена приближенная линейная зависимость поперечного напряжения от плотности газа. Наиболее полные данные о зависимостях плотности, скорости, температуры, напряжения и теплового потока от пространственной координаты для максвелловских молекул даны в [13].

Описание профилей гидродинамических параметров с помощью замыкания законов сохранения проведено в работе [14], в которой ставилась задача обобщения соотношений Ньютона и Фурье. Однако оказалось, что предложенные соотношения в ударной волне не выполняются. В [15] проведен анализ зависимости напряжения от скорости газа и показана приближенная пропорциональность теплового потока произведению напряжения на скорость потока. При анализе системы моментных уравнений в бесконечно удаленных от ударной волны точках было показано [16], что значение отношения теплового потока к произведению напряжения на скорость различно до и за ударной волной. Этот результат, видимо, послужил основанием для прекращения авторами дальнейших исследований в этом направлении.

В настоящей работе продолжен анализ, начатый в работах [9–15]. Исследуются процессы переноса в ударной волне при числах Маха $M \geq 1.5$.

1. Постановка задачи и метод решения. Рассматривается однокомпонентный одноатомный газ. Для определения значений макроскопических параметров в ударной волне вместо истинных степенных потенциалов можно использовать модель взаимодействия молекул, в которой зависимость сечения столкновения от относительной скорости молекул определяется как для степенного потенциала, а само столкновение проводится по модели упругих сфер [17, 18]. При численном исследовании ударная волна генерируется движущимся поршнем. При реализации метода прямого статистического моделирования используется алгоритм мажорантной частоты столкновений.

Размеры расчетной области выбирались таким образом, чтобы в областях течения газа до и после фронта волны имелись достаточно протяженные участки с соответствующими равновесными значениями параметров и функций распределения. Размер пространственной ячейки, одинаковый во всей области течения, определялся условием $h \leq \lambda_{\min}/4$, где λ_{\min} – минимальная средняя длина свободного пробега молекул в расчетной области (в большинстве расчетов полагалось $h = \lambda_{\min}/8$). Шаг по времени определялся соотношением $\Delta t = 0.25 h/U_{\infty}$, где U_{∞} – скорость газа в набегающем потоке; число моделирующих молекул в невозмущенном потоке $N_0 \geq 20$. Точность расчетов контролировалась анализом выполнения законов сохранения. Результирующая погрешность расчетов, включая статистическую, не превышала 0.1%. Количественные данные были получены при числах $1.5 \leq M \leq 50$ для трех значений показателя ω в законе зависимости коэффициента вязкости от температуры $\mu \propto T^{\omega}$, $\omega = 1; 0.7; 0.5$. Для $\omega = 1$ полученные данные уточняют результаты работы [14].

Помимо газодинамических параметров (плотность, скорость, температура) исследу-

довались компоненты тензора напряжений, тепловой поток и градиент скорости:

$$\rho = mn = m \int f(\xi) d\xi, \quad u_i = \frac{1}{n} \int \xi_i f(\xi) d\xi, \quad \frac{3}{2} kT = \frac{1}{n} \frac{m}{2} \int c^2 f(\xi) d\xi \quad (1.1)$$

$$P_{ij} = m \int c_i c_j f(\xi) d\xi, \quad p_{ij} = P_{ij} - \delta_{ij} p, \quad q_i = \frac{m}{2} \int c_i c^2 f(\xi) d\xi$$

Здесь k – постоянная Больцмана, m – масса молекул, $\mathbf{c} = \xi - \mathbf{u}$ – тепловая скорость молекул. При получении безразмерных величин плотность, температура и давление относились к их значениям в набегающем потоке: ρ_∞ , T_∞ , p_∞ . Скорость отнесена к $c_\infty = \sqrt{2kT_\infty / m}$. Напряжение p_{xx} и тепловой поток q_x отнесены соответственно к p_∞ и к $p_\infty c_\infty$. Координата x отнесена к средней длине свободного пробега молекул в невозмущенной области течения

$$\lambda_\infty = \frac{16 \mu_\infty}{5\pi \rho_\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2RT_\infty}} \left(1 - \frac{2}{3s}\right) \left(1 - \frac{1}{s}\right) \quad (1.2)$$

Параметр s определяет показатель степени в потенциале межмолекулярного взаимодействия $U(r) = cr^{-s}$, который связан с показателем ω соотношением $\omega = 1/2 + 2/s$. В безразмерных переменных скорость в невозмущенном потоке в системе координат, связанной с ударной волной, равна $u_1 = S$, где $S = \frac{U_\infty}{c_\infty}$ – скоростное отношение. Законы сохранения массы, импульса и энергии могут быть приведены к форме:

$$\rho u = S$$

$$T + \frac{up_{xx}}{S} - 2u \left(S + \frac{1}{2S} - u \right) = 0 \quad (1.3)$$

$$q_x - \frac{3}{2} up_{xx} + 4S(u_1 - u)(u - u_2) = 0$$

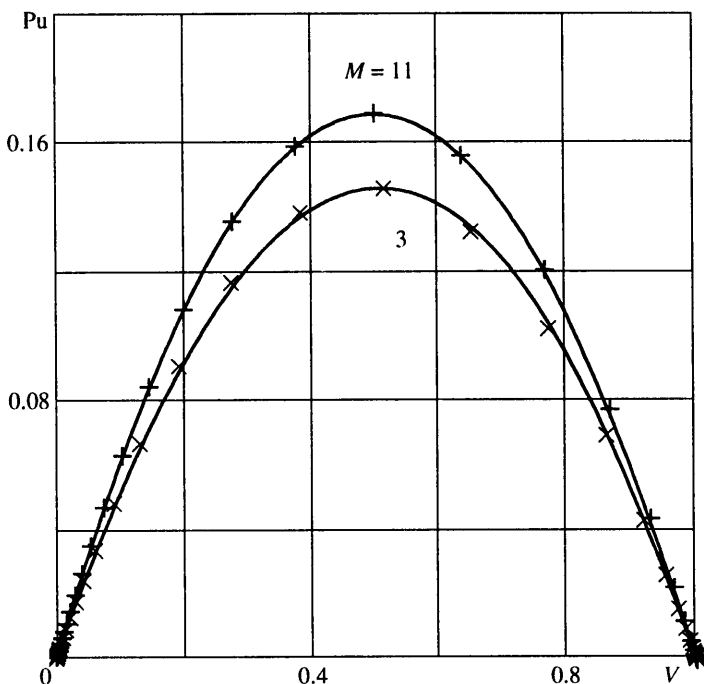
В (1.3) скорость за ударной волной u_2 определена соотношением Рэнкина–Гюгонио. Из законов сохранения следует, что, если установлена зависимость p_{xx} от u , то зависимости $q_x(u)$ и $T(u)$ определяются однозначно.

2. Результаты расчетов. Напряжение, тепловой поток, температура. Анализ результатов расчетов дал возможность установить следующую простую приближенную зависимость компоненты тензора напряжений p_{xx} от скорости u

$$up_{xx} = C(u_1 - u)(u - u_2) \quad (2.1)$$

где коэффициент C зависит от числа Маха и вида закона межмолекулярного взаимодействия. Структура правой части зависимости (2.1) естественна: при $u = u_1$ и $u = u_2$ необходимо ее обращение в нуль, поскольку в бесконечно удаленных от ударной волны точках напряжение также обращается в нуль (течение стремится к равномерному потоку). На фиг. 1 зависимость (2.1) показана символами для ударных волн при числах $M = 3$ и $M = 11$. Пунктирные линии – результаты численного расчета. Для удобства на фиг. 1 вместо скорости u использована нормированная скорость $V = (u_1 - u)/(u_1 - u_2)$, поскольку диапазон ее изменения один и тот же для ударных волн различной интенсивности, а величина up_{xx} отнесена к S^3 . В соответствии с соотношением (2.1) выражение up_{xx} достигает максимального значения при скорости u равной "средней" скорости

$$u_{av} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \frac{5}{8} S \left(1 + \frac{1}{2S^2} \right)$$



Фиг. 1. Зависимость приведенного напряжения $Pu = \nu p_{xx}/S^3$ от нормированной скорости $V = (u_1 - u)/(u_1 - u_2)$. Сплошная линия – расчет, символы – аппроксимация (2.1)

Вследствие закона сохранения энергии из параболической зависимости величины νp_{xx} от скорости следует параболическая же зависимость теплового потока от скорости. Более того, поскольку и тепловой поток, и произведение напряжения на скорость обращаются в нуль при $u = u_1$ и при $u = u_2$, то они должны быть пропорциональны друг другу (на что уже было указано в [16]). Постоянство этого отношения нарушается лишь в области, близкой к точке u_2 . Свойство параболической зависимости νp_{xx} от скорости тождественно отмеченной в [11, 12] пропорциональной зависимости поперечного напряжения от плотности газа в ударной волне.

Результаты, аналогичные приведенным на фиг. 1, получены и для газа, состоящего из твердых сферических молекул ($\omega = 0.5$) или молекул, потенциал взаимодействия которых пропорционален r^{-10} ($\omega = 0.7$). Величину параметра C при представлении результатов расчетов в форме (2.1) для удобства дальнейшего анализа следует аппроксимировать в аналитическом виде. Приведем приближенное выражение для величины C для случая максвелловских молекул ($\omega = 1$):

$$C(S) = \frac{40}{33} S \left(1 + \frac{1}{2S^2} - \frac{5}{21S^4} \right) \quad (2.2)$$

Это выражение дает правильное значение коэффициента C не только при значениях числа Маха, при которых проводились расчеты методом Монте-Карло, но также и при $M \rightarrow 1$ (по поводу этого значения см. [16]). Основное отличие для случая модели молекул в виде твердых сфер, $\omega = 0.5$, состоит в замене коэффициента $40/33$ в соотношении (2.2) на $40/32$. Следует отметить некоторое ухудшение качества аппроксимации (2.1) для газа из нематвелловских молекул в области за ударной волной. Из изложенного следует, что и сама функциональная зависимость (2.1), и ее параметр (2.2) слабо зависят от потенциала взаимодействия молекул. Параболическая

зависимость теплового потока от макроскопической скорости течения позволяет говорить о приближенной симметрии диссипативных процессов в ударной волне. Возможно также говорить о точке, где $u = u_{av}$, как о "центре ударной волны" (отметим, что эта точка была взята за начало отсчета в [14]).

Из соотношения (2.1) и из закона сохранения импульса следует параболическая зависимость температуры от скорости потока. Эта зависимость позволяет приближенно определить значение M_{min} , при котором возникает немонотонность профиля температуры в дозвуковой части ударной волны. Значение $M_{min} \approx 3.9$ определяется из условия $u_2 = u_*$, где u_* является решением уравнения $T'_u(u_*) = 0$. На фиг. 2 показана зависимость $T(V)$ для максвелловских молекул при числах $M = 3$ и 11.

3. Градиент скорости и профили гидродинамических величин. Для определения связи напряжения с его ньютоновским приближением необходим анализ градиента скорости. Результаты расчетов показали, что профиль градиента скорости может быть хорошо аппроксимирован полиномом третьей степени от скорости

$$V' = \frac{dV}{dx} = V(1-V)a(1+bV) \quad (3.1)$$

Здесь V – нормированная скорость, а коэффициенты a и b зависят от M и ω . Для максвелловских молекул и молекул – упругих сфер величины коэффициентов a и b приведены в таблице.

M	2	3	4	5	11	50	Молекулы
a	1.04	1.2	1.26	1.29	1.295	1.3	Упр. сферы
b	-0.04	0.25	0.343	0.38	0.425	0.443	Упр. сферы
a	0.457	0.375	0.278	0.215	0.1	0.0216	ММ
b	0.094	0.548	0.953	1.245	1.463	1.602	ММ

Для максвелловских молекул при $M \geq 3$ коэффициенты a, b с погрешностью, меньшей 5%, аппроксимируются функциями

$$a = \left(\left(\frac{5}{6} M^2 \right)^{3/2} + \left(\frac{1}{7\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{30} M^2 - 1}{M} \right)^{-3} \right)^{-1/3}, \quad b = \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{M} \right) \frac{(M-1)^4}{15.29 + (M-1)^4}$$

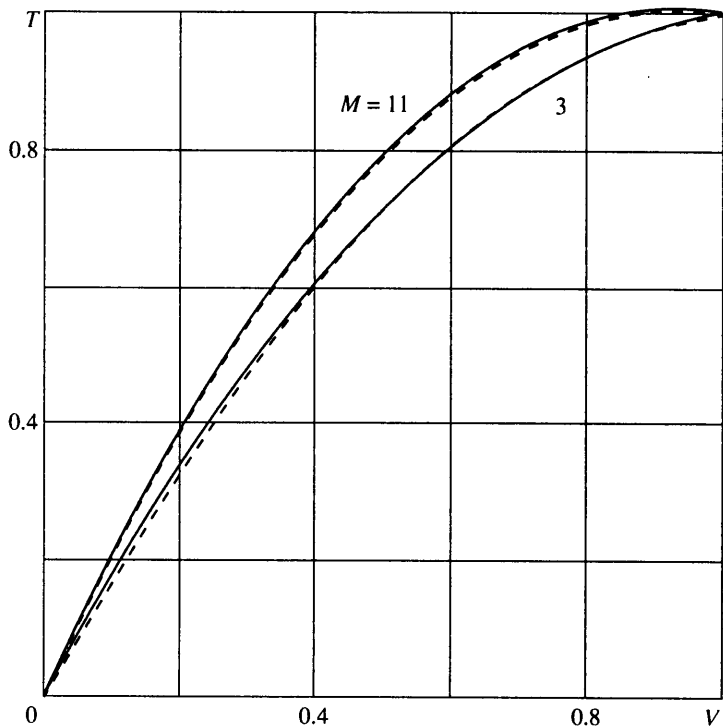
При $M \geq 1$ выражение для a принимает более простой вид: $a = S^{-1}$. На фиг. 3 приведена зависимость градиента скорости, отнесенного к произведению $V(1-V)$, от скорости V для случая максвелловских молекул и $M = 3; 11; 50$. Напомним, что координата x отнесена к длине свободного пробега в невозмущенном газе.

Интегрирование соотношения (3.1) позволяет определить зависимость координаты от скорости (а значит и профиль скорости) в элементарных функциях

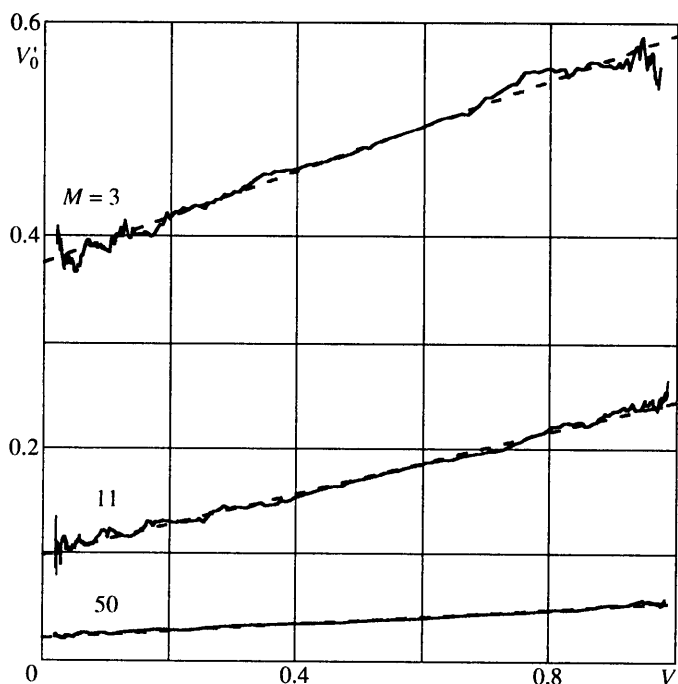
$$x = \frac{1}{a(1+b)} \left[(1+b) \ln \frac{V}{V_0} - \ln \frac{1-V}{1-V_0} - b \ln \frac{1+bV}{1+bV_0} \right] \quad (3.2)$$

Здесь за начало координат взята точка, в которой $u = u_{av}$, т.е. $V_0 = 0.5$. При $M \rightarrow 1$ коэффициент $b \rightarrow 0$ и профиль скорости стремится к известному симметричному профилю, соответствующему приближению Навье-Стокса с соотношениями Ньютона для напряжения и Фурье для теплового потока.

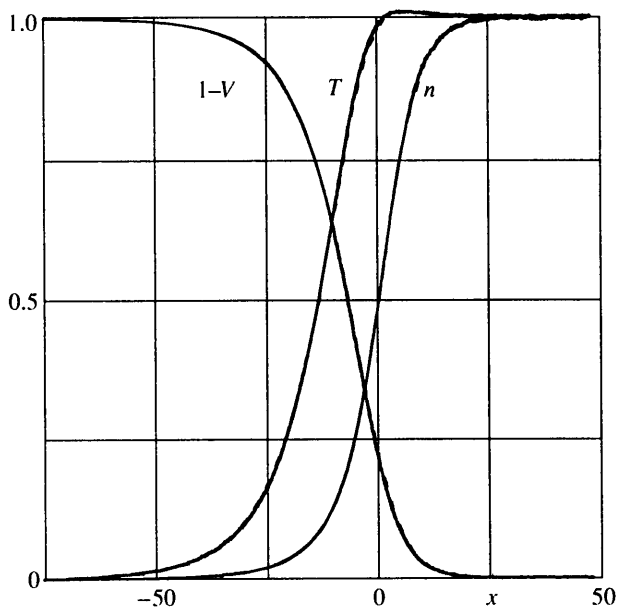
Напомним, что зависимость (2.1) дает возможность по профилю скорости определить профиль температуры. На фиг. 4 при $M = 11$ приведены нормированные профили газодинамических параметров для газа максвелловских молекул. Как видно, результаты, полученные с использованием соотношений (2.1) и (3.1), почти не отли-



Фиг. 2. Зависимость температуры T от нормированной скорости V . Сплошная линия – расчет, штриховая – параболическая аппроксимация



Фиг. 3. Зависимость приведенной производной $V'_0 = V'/V(1-V)$ от нормированной скорости V . Сплошная линия – расчет, штриховая – аппроксимация (3.1)



Фиг. 4. Профили газодинамических параметров. Сплошная линия – расчет, штриховая – аппроксимация на основе (3.2)

чаются от решения уравнения Больцмана. Это означает, что отклонения от параболической зависимости (2.1) слабо влияют на профили параметров в ударной волне. Аналогичные результаты получены и для молекул – упругих сфер.

Следует заметить также, что аппроксимация (3.1), так же как любая другая макроскопическая теория, не описывает дальнюю асимптотику макроскопических величин в ударной волне (см. [19, 20]).

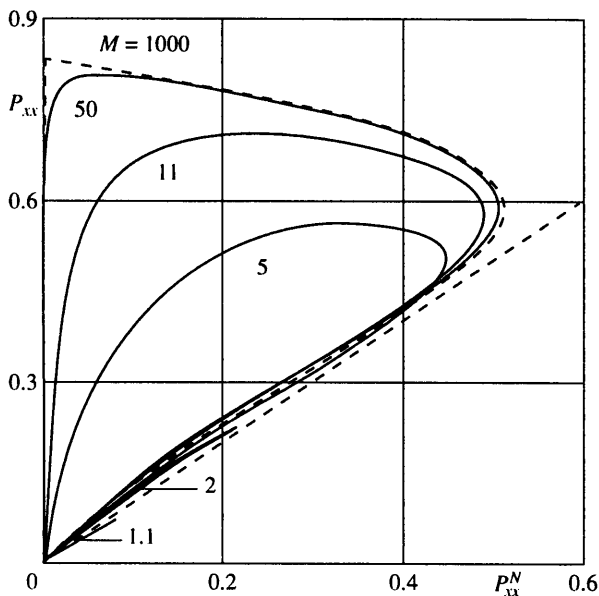
4. Обобщенные соотношения Ньютона и Фурье. Соотношения Ньютона для напряжения и Фурье для теплового потока

$$p_{xx}^N = -\frac{4}{3}\mu \frac{du}{dx}, \quad q_x^F = -\lambda_T \frac{dT}{dx} \quad (4.1)$$

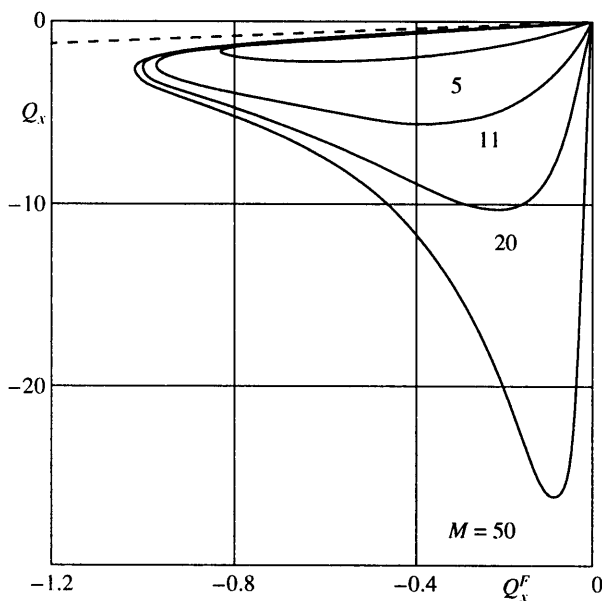
выполняются только для бесконечно слабой ударной волны ($M \rightarrow 1$). Полученные в п. 2, 3 результаты позволяют для произвольного значения числа M замкнуть уравнения сохранения соотношениями, обобщающими соотношения (4.1). Построенные таким образом уравнения дадут возможность приближенно определять макроскопические параметры в ударных волнах, решая не кинетическое уравнение Больцмана, а уравнения сплошной среды. Для удобства воспользуемся не результатами расчетов непосредственно, а их аппроксимацией (2.1), (3.1). Полученные из решения кинетического уравнения зависимости $p_{xx}, q_x, p_{xx}^N, q_x^F, p, T$ от координаты x и числа Маха M задают параметрически искомые соотношения. Сначала проанализируем свойства зависимостей

$$\frac{p_{xx}}{p} = F_p \left(\frac{p_{xx}^N}{p}, M \right), \quad \frac{q_x}{pc} = F_q \left(\frac{q_x^F}{pc}, M \right), \quad c = \sqrt{2 \frac{k}{m} T} \quad (4.2)$$

Эти функции изображены на фиг. 5, 6. Значения напряжения p_{xx} (фиг. 5), близкие к биссектрисе, соответствуют дозвуковой области течения, а близкие к оси ординат – сверхзвуковой. В дозвуковой области течения при любом числе M напряжение близко

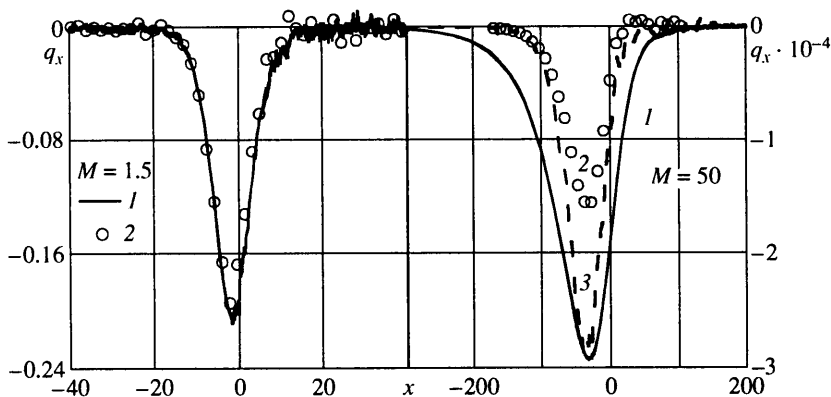


Фиг. 5. Зависимость расчетных относительных значений напряжений $P_{xx} = p_{xx}/\rho$ от относительных напряжений по Ньютону $P_{xx}^N = p_{xx}^N / \rho$

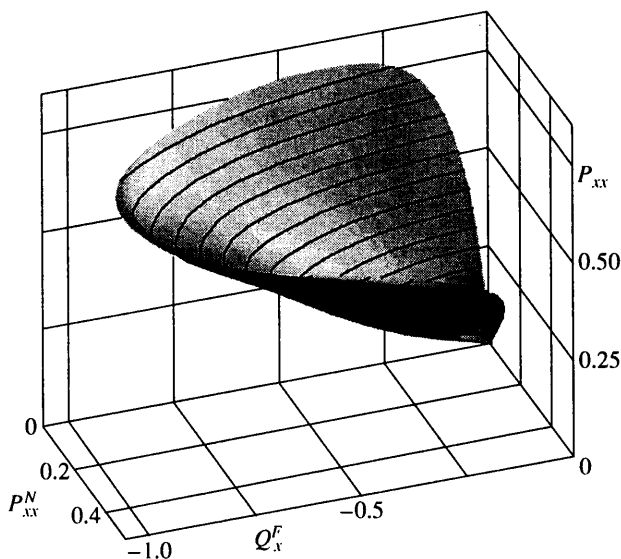


Фиг. 6. Зависимость расчетных относительных значений теплового потока $Q_x = q_x/\rho c$ от относительного теплового потока по Фурье $Q_x^F = q_x^F / \rho c$

к ньютонову напряжению. Это, по-видимому, означает, что оно соответствует гильбертову нормальному решению. Однако сильное отличие напряжения от ньютонова в сверхзвуковой области может означать, что, если они и соответствуют нормальному решению, то, по-видимому, не гильбертова типа. Проведенный детальный анализ зависимостей для теплового потока (фиг. 6) показал, что близость значений теплового



Фиг. 7. Профили тепловых потоков: 1 – расчет; приближения: 2 – Навье-Стокса, 3 – Барнетта



Фиг. 8. Обобщение ньютоновских соотношений для напряжений – зависимость P_{xx}^N от P_{xx}^N и Q_x^F . Определение величин дано в подписях к фиг. 5 и 6

потока к значениям в приближении Фурье существует только в слабых ударных волнах. В сильных ударных волнах их отличие велико. (Свойства профилей макроскопических параметров и функции распределения молекул по скоростям для ударной волны бесконечной интенсивности можно найти в [21].)

На фиг. 7 приведены профили теплового потока для слабой и сильной ударных волн. Тепловые потоки, соответствующие соотношению Фурье или приближению Барнетта, вычислены по профилям скорости и температуры, полученным при численном решении. Из результатов, представленных на фиг. 7, видно, что и ньютоново соотношение и барнеттово приближение (второе приближение асимптотического ряда нормального решения кинетического уравнения) не описывают должным образом процесс теплопередачи в сильной ударной волне. Приведенные на фиг. 5, 6 зависимости для напряжения и теплового потока как функции ньютонова напряжения и потока тепла по Фурье не локальны, а зависят от числа М. Локальными свойствами

обладают зависимости напряжения и теплового потока только от значений гидродинамических величин и их градиентов:

$$\frac{p_{xx}}{p} = P\left(\frac{p_{xx}^N}{p}, \frac{q_x^F}{pc}\right), \quad \frac{q_x}{pc} = Q\left(\frac{p_{xx}^N}{p}, \frac{q_x^F}{pc}\right) \quad (4.3)$$

Первое из этих соотношений для максвелловских молекул представлено на фиг. 8. Оно демонстрирует однозначную зависимость относительного напряжения от своих аргументов. Эти функциональные связи являются обобщением соотношения Ньютона для напряжений и соотношения Фурье для теплового потока на случай больших градиентов газодинамических параметров, имеющих место в сильных ударных волнах.

Заключение. Анализ профилей макропараметров в сильной ударной волне, распространяющейся в однокомпонентном одноатомном газе, позволил выявить простые приближенные соотношения между скоростью течения газа, ее градиентом, напряжением и тепловым потоком. Установлено, что тепловой поток и температура являются полиномами второй степени, а производная от скорости полиномом третьей степени от скорости газа в ударной волне. Три независимых коэффициента этих полиномов являются функциями от числа Маха набегающего потока и вида межмолекулярного взаимодействия. Упомянутые зависимости позволяют приближенно описать профили газодинамических параметров в сильных ударных волнах в элементарных функциях.

В случае сильных ударных волн профиль температуры имеет максимум в дозвуковой области течения, тогда как в слабых ударных волнах температура изменяется монотонно. Определено значение $M_{\min} \approx 3.9$, при котором возникает немонотонность профиля температуры.

Ни приближение Навье-Стокса, ни приближение Барнетта не описывают процесс переноса импульса и энергии в сильных ударных волнах. Тем не менее напряжение и тепловой поток могут быть выражены как функции только от локальных значений газодинамических величин и их градиентов. Эти функциональные связи являются обобщением соотношения Ньютона для напряжений и соотношения Фурье для теплового потока на случай больших градиентов газодинамических параметров в сильных ударных волнах.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 99-01-00154) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (№ 00-15-96069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eu B.C.* Theory of nonlinear transport processes in a dilute gaseous mixture // *J. Chem. Phys.* 1981. V. 74. № 11. P. 6376–6387.
2. *Eu B.C., Ohr Y.G.* Generalized hydrodynamics, bulk viscosity, and sound wave absorption and dispersion in dilute rigid molecular gases // *Phys. Fluids.* 2001. V. 13. № 3. P. 744–753.
3. *Slemrod M.* Constitutive relations for monatomic gases based on a generalized rational approximation to the sum of the Chapman-Enskog expansion // *Arch. Rat. Mech. and Analysis.* 1999. V. 150. № 1. P. 1–22.
4. *Макашев Н.К., Носик В.И.* Стационарное течение Куэтта (с теплопередачей) газа максвелловских молекул // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 5. С. 1077–1081.
5. *Brey J.J., Santos A., Dufty J.W.* Heat and momentum transport far from equilibrium // *Phys. Rev. A.* 1987. V. 36. № 6. P. 2842–2849.
6. *Erofeev A.I., Friedlander O.G.* Macroscopic relations in rarefied shear flows // *Rarefied Gas Dynamics: Proc. 22nd Intern. Symp. / Eds T.J. Bartel, M.A. Gallis. Melville, N.Y. AIP V. 585, 2001. P. 164–168.*
7. *Montanero J.M., Santos A., Garzo V.* Monte Carlo simulation of nonlinear Couette flow in dilute gas // *Phys. Fluids.* 2000. V. 12. № 11. P. 3060–3073.
8. *Бузыкин О.Г., Галкин В.С., Ерофеев А.И., Носик В.И.* Макроскопическая модель структуры сильной ударной волны // Изв. РАН. МЖТ. 1999. № 4. С. 125–135.

9. *Bird G.A.* Aspects of the structure of strong shock waves // *Phys. Fluids*. 1970. V. 13. № 5. P. 1172–1177.
10. *Segal B.M., Ferziger J.H.* Shock-wave structure using nonlinear model Boltzmann equations // *Phys. Fluids*. 1972. V. 15. № 7. P. 1233–1247.
11. *Hicks B.L., Yen Sh.-M., Reilly B.J.* The internal structure of shock waves // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 53. Pt 1. P. 85–111.
12. *Yen Ch.-M., Ng W.* Shock-wave structure and intermolecular collision laws // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 65. Pt. 1. P. 127–144.
13. *Nanbu K., Watanabe Y.* Analysis of the internal structure of shock waves by means of the exact direct-simulation method // *Rep. Inst. High Speed Mech.: Tohoku Univ.* 1984. V. 48. 75 p.
14. *Baganoff D., Nathenson M.* Constitutive relations for stress and heat flux in a shock wave // *Phys. Fluids*. 1970. V. 13. № 3. P. 596–607.
15. *Nathenson M., Baganoff D.* Constitutive relations associated with the Mott-Smith distribution function // *Phys. Fluids*. 1973. V. 16. № 12. P. 2110–2115.
16. *Elliott J.P., Baganoff D.* Solution of the Boltzmann equation at the upstream and downstream singular points in a shock wave // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 65. Pt 3. P. 603–624.
17. *Muntz E.P., Erwin D.A., Pham-Van-Diep G.C.* A review of the kinetic detail required for accurate predictions of normal shock waves // *Rarefied Gas Dynamics: Proc. 17th Intern. Symp.* / Ed. A.E. Beylich. Weinheim etc.: VCH, 1991. P. 198–206.
18. *Gimelshein S.F., Ivanov M.S., Rogazinsky S.V.* Investigation of shock wave structures by majorant cell and free cell schemes of DSMC // *Rarefied Gas Dynamics: Proc. 17th Intern. Symp.* / Ed. A.E. Beylich. Weinheim etc.: VCH, 1991. P. 717–726.
19. *Любарский Г.Я.* К кинетической теории ударных волн // *ЖЭТФ*. 1961. V. 40. № 4. С. 1050–1057.
20. *Narasimha R.* Asymptotic solutions for the distribution function in non-equilibrium flows. Pt. 1. The weak shock // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 34. Pt. 1. P. 1–24.
21. *Takata S., Aoki K., Cercignani C.* The velocity distribution function in an infinitely strong shock wave // *Phys. Fluids*. 2000. V. 12. № 8. P. 2116–2127.

Москва
E-mail: O. Friedlander@g23.relcom.ru

Поступила в редакцию
23.III.2001