МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 2002

УДК 532.529:536.25

© 2002 г. Л.Х. ИНГЕЛЬ

НЕСТАЦИОНАРНАЯ КОНВЕКЦИЯ В БИНАРНОЙ СМЕСИ У ПЛОСКОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Решена задача о развитии конвекции в бинарной смеси у бесконечной вертикальной пластины, на которой заданы постоянный (после включения в начальный момент) поток тепла и нулевой поток примеси. Отдельно рассмотрены случаи нейтральной и устойчивой плотностной стратификации среды. Найдено, что приток тепла в среду может приводить не к повышению, а к понижению ее температуры. Это можно интерпретировать в терминах эффективной отрицательной теплоемкости стратифицированной бинарной смеси.

Конвекции у вертикальных поверхностей посвящена обширная литература (важнейшие результаты можно найти, например, в [1]). В настоящей работе обращается внимание на некоторые особенности конвекции в двухкомпонентной среде (например, в соленой воде), где вклад в плотностную стратификацию вносят как температура, так и концентрация примеси.

1. Пусть x – горизонтальная координата, ось z направлена вертикально вверх. Рассматривается полуограниченный объем среды в области $x > 0$. Плотность среды ρ в обычно используемом приближении [1] линейно зависит от температуры T и концентрации примеси s

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0) + \beta(s - s_0)]$$

Здесь α – термический коэффициент расширения среды, коэффициент β определяет зависимость плотности среды от концентрации примеси. Индексом нуль обозначены постоянные (отсчетные) значения соответствующих величин. Предполагается, что заданы постоянные фоновые стратификации температуры и концентрации примеси

$$\rho_B(z) = \rho_0[1 + (-\alpha\gamma_T + \beta\gamma_s)z]$$

где постоянные градиенты $\gamma_T = dT_B/dz$, $\gamma_s = ds_B/dz$; индексом B обозначены фоновые значения величин (для отличия от рассматриваемых ниже возмущений, связанных с конвекцией).

Исследуется конвекция, вызываемая в такой среде постоянным (после включения в момент $t = 0$) потоком тепла от поверхности $x = 0$. Поскольку этот поток не зависит от вертикальной координаты z, будем искать и не зависящее от z решение. Обоснование и пределы применимости такого одномерного режима конвекции обсуждаются, например, в [1].

Система уравнений гидродинамики, переноса тепла и примеси в приближении Буссинеска без учета перекрестных кинетических эффектов (термодиффузии и диффузионной теплопроводности [2]) для данной геометрии задачи имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(\alpha T' - \beta s') = \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + gb \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \gamma_T w = \varkappa\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \gamma_s w = \chi\frac{\partial^2 s'}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

Здесь w – составляющая скорости вдоль вертикальной оси z (другие компоненты скорости в данной задаче отсутствуют), t – время; ν, $\varkappa$, χ – коэффициенты обмена; штрихом обозначены отклонения от фонового состояния, описанного выше

$$b = \alpha T' - \beta s' \tag{1.4}$$

безразмерная плавучесть, точнее, ее возмущение. Подчеркнем, что полная система уравнений гидротермодинамики и переноса примеси свелась к линейной системе (1.1) – (1.3) только за счет симметрии задачи, без каких-либо предположений о малости амплитуд возмущений.

Как известно, в задачах конвекции в бинарных смесях существенную роль может играть различие значений коэффициентов обмена для тепла и примеси [1–3]. Эти хорошо изученные эффекты "двойной" (или "дифференциальной") диффузии здесь не рассматриваются, так как предполагается равенство всех трех коэффициентов обмена. Такая модель характерна, например, для геофизических приложений, где нередко подразумеваются коэффициенты турбулентного обмена.

В качестве краевых условий предполагается, прежде всего, затухание возмущений вдали от вертикальной границы

$$w, T', s' \to 0, \quad x \to \infty \tag{1.5}$$

На границе $x = 0$ выполняется условие прилипания, заданы постоянный поток тепла и нулевой поток примеси

$$w = 0, \quad c\rho_0 \varkappa \frac{\partial T'}{\partial x} = -Q\eta(t), \quad \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad x = 0 \tag{1.6}$$

где c – теплоемкость среды, постоянная $Q > 0$, $\eta(t)$ – единичная функция Хевисайда. В начальный момент все возмущения отсутствуют.

2. Рассматривается сначала решение для частного случая, когда плотностная стратификация среды нейтральна (т.е. стратификации температуры и концентрации примеси компенсируют друг друга в поле плотности)

$$-\alpha\gamma_T + \beta\gamma_s = 0; \quad \rho_B(z) = \rho_0 = \text{const} \tag{2.1}$$

Линейная комбинация уравнений (1.2) и (1.3) с учетом (1.4) и (2.1) приводит к уравнению для b

$$\frac{\partial b}{\partial t} = K \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

где $K = \varkappa = \chi = \nu$. Граничные условия для b имеют вид

$$\frac{\partial b}{\partial x} = -\alpha q \eta(t), \quad x = 0 \tag{2.3}$$

$$b \to 0, \quad x \to \infty$$

где $q = Q/c\rho_0 K$. Переменная b, таким образом, является решением классической задачи диффузии с краевым условием второго рода. Это решение имеет вид [1]

$$b = 2\alpha q \sqrt{Kt}\, \text{i}\,\text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Kt}}\right)$$

где кратный интеграл вероятностей [4] определяется равенством

$$\text{i}^n \,\text{erfc}\,\zeta = \int\limits_{\zeta}^{\infty} \text{i}^{n-1}\,\text{erfc}\,\zeta' d\zeta', \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Решение уравнения (1.1) имеет вид [1]

$$w = 4\alpha g q\sqrt{Kt^3}\zeta\, \mathrm{i}^2\, \mathrm{erfc}\,\zeta \tag{2.4}$$

$$\zeta = x(4Kt)^{-1/2}$$

Уравнение для температурного возмущения (1.2) перепишем в виде

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} - \gamma_T w \tag{2.5}$$

где w выражается (2.4). Решение можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$T' = T_1 + T_2$$

где T_1 обусловлено неоднородностью краевых условий (1.6), а T_2 – наличием в уравнении (2.5) источника ($-\gamma_T w$). Первое слагаемое описывает нагрев среды непосредственно потоком тепла от вертикальной границы и отличается от b лишь отсутствием множителя α

$$T_1 = 2q\sqrt{Kt}\, \mathrm{i\,erfc}\,\zeta \tag{2.6}$$

Для слагаемого T_2 имеем начально-краевую задачу с источником ($-\gamma_T w$), нулевым потоком при $x = 0$ и затуханием решения при $x \to \infty$. Функция Грина для этой задачи (см., например, [5])

$$G(x, x', t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi K t}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4Kt}\right] + \exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4Kt}\right]\right\} \tag{2.7}$$

Решение приводится к виду

$$T_2(\zeta, t) = -4N_T^2 q\left(\frac{K}{\pi}t^5\right)^{1/2} \times \int_0^1 \int_0^\infty \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau}}\zeta'\, \mathrm{i}^2\mathrm{erfc}\left(\frac{\zeta'}{\sqrt{\tau}}\right)\left\{\exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta')^2}{1-\tau}\right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left[-\frac{(\zeta+\zeta')^2}{1-\tau}\right]\right\} d\zeta' d\tau$$

$$N_T^2 = \alpha g \gamma_T$$

Все возмущения (b, w, $T' = T_1 + T_2$) распространяются в область $x > 0$ с характерной скоростью диффузионных процессов – возмущенная область расширяется с увеличением t как $(Kt)^{1/2}$. Поскольку количество поступившего от вертикальной стенки тепла растет пропорционально времени, а область распространения тепла расширяется медленнее (пропорционально $t^{1/2}$), то амплитуды возмущений T_1 и b растут со временем как $t^{1/2}$. Возмущение плавучести является источником в уравнении для w, поэтому амплитуда последней возрастает пропорционально $t^{3/2}$.

Основным в выражении для температурного возмущения со временем становится слагаемое T_2, растущее как $t^{5/2}$. В отличие от T_1 оно не связано непосредственно с потоком тепла от стенки $x = 0$, а описывает эффект притока тепла за счет возникающей конвекции. Существенно, что в зависимости от знака фоновой температурной стратификации слагаемое T_2 может быть как положительным, так и отрицательным (последнее – при $\gamma_T > 0$). Таким образом, при устойчивой температурной стратификации знак температурного отклика на нагрев от вертикальной стенки в данном случае отличается от "интуитивно ожидаемого" – среда становится не теплее, а холоднее! В известном смысле можно говорить об эффективной отрицательной теплоемкости двухкомпонентной среды [6].

Краевая задача для возмущения концентрации примеси аналогична задаче для T_2, так что решение совпадает с точностью до обозначений.

3. Выше рассмотрен частный случай, когда фоновая стратификация плотности нейтральна. Исследуем теперь случай устойчивой стратификации, когда вместо (2.1), фоновое состояние среды удовлетворяет условиям

$$-\alpha\gamma_T + \beta\gamma_s < 0, \quad \frac{d\rho_B(z)}{dz} < 0$$

Линейная комбинация уравнений (1.2) и (1.3) в этом случае вместо (2.2) дает

$$\frac{\partial b}{\partial t} = K\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - \alpha\Gamma w, \quad \Gamma = \gamma_T - \frac{\beta}{\alpha}\gamma_s > 0 \tag{3.1}$$

Рассматривается последнее уравнение совместно с (1.1). Эта система имеет стационарное решение, удовлетворяющее краевым условиям (1.5), (1.6), (2.3)

$$b_{(1)} = \alpha q\sqrt{\frac{2K}{N_\Gamma}}e^{-x'}\cos x' \tag{3.2}$$

$$w_{(1)} = \frac{q}{\Gamma}\sqrt{2KN_\Gamma}\, e^{-x'}\sin x' \tag{3.3}$$

$$N_\Gamma = (\alpha g\Gamma)^{1/2}, \quad L = \left(\frac{2K}{N_\Gamma}\right)^{1/2}, \quad x' = xL^{-1}$$

Чтобы удовлетворить и нулевым начальным условиям, следует взять суперпозицию решения (3.2), (3.3) и решения $b_{(2)}$, $w_{(2)}$ системы уравнений (1.1), (3.1) с краевыми условиями

$$\frac{\partial b_{(2)}}{\partial x} = 0, \quad w_{(2)} = 0, \quad x = 0, \quad t > 0$$

$$b_{(2)} \to 0, \quad w_{(2)} \to 0, \quad x \to \infty$$

$$b_{(2)} = -b_{(1)}, \quad w_{(2)} = -w_{(1)}, \quad t = 0$$

Решение $b_{(2)}$, $w_{(2)}$ должно затухать со временем, поскольку представляет собой отклик устойчиво стратифицированной диссипативной среды на финитное начальное возмущение. Таким образом, решение для b и w с течением времени приближается к стационарному решению (3.2), (3.3).

Уравнение для температурного возмущения (1.2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} - \gamma_T w_{(1)} - \gamma_T w_{(2)}$$

Его решение можно представить в виде суммы трех слагаемых. Одно из них обусловлено неоднородностью краевого условия при $x = 0$ и совпадает с T_1 (выражение (2.6)). Два других связаны с источниками в правой части ($-\gamma_T w_{(1)}$ и $-\gamma_T w_{(2)}$). Второй из этих источников затухает со временем, так что на достаточно больших временных интервалах основной вклад вносит первый, стационарный источник. Соответствующее ему температурное возмущение можно выразить аналогично T_2 с помощью функции Грина (2.7). Но если интересоваться асимптотикой решения на бо́льших временах, то можно избежать громоздких вычислений. Дело в том, что стационарный источник $-\gamma_T w_{(1)}$ сосредоточен в пристеночной области толщиной порядка L, а возмущенная область неограниченно расширяется как $\sqrt{Kt}$. В задачах такого рода на больши́х временных интервалах существенна лишь интегральная интенсивность источника. В данном случае она равна

$$-\gamma_T \int_0^\infty w_{(1)}(x)dx = -qK\frac{\gamma_T}{\Gamma} = -qK\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\frac{\gamma_s}{\gamma_T}\right)^{-1} \tag{3.4}$$

Физический смысл этого результата вполне понятен. Например, при устойчивой температурной стратификации ($\gamma_T > 0$) восходящая конвективная струя у вертикальной стенки поднимает снизу вверх более холодные объемы среды и тем самым играет роль некоторого стока тепла (3.4). Этому эффекту должна способствовать неустойчивая стратификация концентрации примеси ($\gamma_s > 0$), что отражено в выражении (3.4) (напомним, что допустимые значения градиентов γ_T и γ_s ограничены условием $\Gamma > 0$).

Непосредственный приток тепла в среду от вертикальной поверхности за счет теплопроводности равен qK (с точностью до множителя $c\rho_0$). Чтобы получить суммарный эффективный стационарный приток тепла в пристеночный слой среды, последнюю величину надо сложить с (3.4). Получаем

$$Q_{eff} = -qKP, \quad P = \frac{\beta\gamma_s(\alpha\gamma_T)^{-1}}{1-\beta\gamma_s(\alpha\gamma_T)^{-1}}$$

Это означает, что асимптотика поля температуры на больши́х интервалах времени в данном случае описывается выражением типа (2.6), в котором, однако, величину q следует заменить на

$$q_{eff} = -qP \tag{3.5}$$

При $q > 0$, $\Gamma > 0$, $\gamma_s > 0$ и устойчивой температурной стратификации ($\gamma_T > 0$) правая часть (3.5) отрицательна. Это означает, что эффект охлаждения среды восходящей конвективной струей в данном случае сильнее, чем непосредственный нагрев среды за счет теплопроводности от стенки. В итоге заданный поток тепла от стенки, как и выше в п. 3, приводит не к повышению, а к понижению температуры среды.

Краевая задача для возмущения концентрации примеси и в этом случае аналогична задаче для температуры, но с нулевым потоком на границе $x = 0$. Поэтому основную роль играет эффективный источник примеси $-\gamma_s w_{(1)}$.

Заключение. Основные особенности конвекции в бинарных смесях обычно связывают со следующими факторами. Во-первых, концентрация примеси может вносить существенный вклад в стратификацию плотности и тем самым влиять на конвекцию. Во-вторых, имеются специфические эффекты, связанные с различием значений коэффициентов обмена для тепла и примеси (двойная или дифференциальная диффузия). В-третьих, к заметным эффектам может приводить различие типов краевых условий для тепла и примеси.

Из найденных выше решений видно, что имеются и другие существенные особенности конвекции в двухкомпонентных средах. И при одинаковой плотностной стратификации, равных значениях коэффициентов обмена, одинаковых типах краевых условий решения могут качественно отличаться от аналогичных решений в однокомпонентных средах. Прежде всего, даже при сколь угодно устойчивой плотностной стратификации температурные возмущения не заключены в ограниченной области размерами порядка $(K/N)^{1/2}$, где N – частота Брента–Вяйсяля [3] (как в однокомпонентной среде), а распространяются на расстояния порядка $(Kt)^{1/2}$. При этом амплитуда температурных возмущений может быстро нарастать (в то время как в аналогичных задачах для однокомпонентной среды она остается ограниченной или растет значительно медленнее). Наконец, знак возникающего температурного возмущения может быть противоположен интуитивно ожидаемому – поток тепла от вертикальной стенки может приводить не к повышению, а к понижению температуры двухкомпонентной среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 02-05-64203) и МНТЦ (проект G-553).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р. и др.* Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. М.: Мир, 1991. Кн. 1. 678 с.; Кн. 2. 528 с.
2. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
5. *Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д. и др.* Химическая гидродинамика. Справ. пособие. М.: Бюро Квантум, 1996. 336 с.
6. *Ингель Л.Х.* "Отрицательная теплоемкость" стратифицированных жидкостей // Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 72. № 10. С. 753–757.

Обнинск

Поступила в редакцию
23.VII.2001

E-mail: lingel@obninsk.com