МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 2002

УДК 532.527+532.595.013.12

© 2002 г. **А.В. КУЗНЕЦОВ, Н.В. НИКОЛАЕВА**

ОБТЕКАНИЕ ВИХРЯ ДВУХСЛОЙНЫМ ПОТОКОМ ТЯЖЕЛЫХ ЖИДКОСТЕЙ, РАЗДЕЛЕННЫМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНОЙ

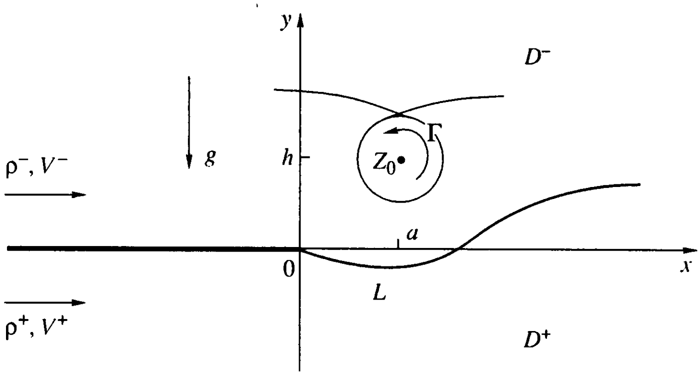
В линейном приближении решена задача обтекания вихря двухслойным потоком тяжелых невязких жидкостей с разными плотностями и скоростями на бесконечности при наличии полубесконечной пластины на границе раздела. Определены силы, действующие на вихрь и на пластину, форма границы раздела сред в зависимости от положения вихря, его интенсивности, числа Фруда, отношения плотностей и величин скоростей натекающих потоков.

Задачи о движении гидродинамических особенностей под поверхностью жидкости являются модельными задачами теории подводного крыла, основы которой были заложены М.В. Келдышем, Н.Е. Кочиным, М.А. Лаврентьевым, Л.И. Седовым, Л.Н. Сретенским и развиты их многочисленными последователями. Обобщением задач о течениях жидкости со свободными границами являются разнообразные задачи о взаимодействии потоков с разными полными давлениями. Ввиду большой трудности исследования таких течений в точной нелинейной постановке, широкое применение находят приближенные аналитические и численные методы. Обширный обзор литературы, посвященной линейной теории генерации поверхностных и внутренних волн на границе раздела сред, содержится в работе [1], а сведения о последних исследованиях по линейным и нелинейным задачам в [2, 3].

Задача о волнах на свободной поверхности жидкости, когда ее поверхность наполовину прикрыта плоской крышкой, впервые была рассмотрена в [4]. Результаты этой работы приведены в монографии [5], где рассмотрена также более общая задача о волнах на поверхности тяжелой жидкости в присутствии пластинки конечной длины, находящейся на поверхности жидкости. Для решения граничной задачи в линейной постановке используется метод Лапласа. В [6] решена задача о вдуве тонкой струи жидкости из щели в плоской стенке в равномерный поток другой жидкости с образованием за струей зоны постоянного давления. Для решения интегрального уравнения, к которому сводится краевая задача, применяется метод Винера–Хопфа. Этот метод использовался также в работах [7–9], в которых были рассмотрены стационарные и нестационарные задачи истечения тяжелой и капиллярной жидкости из-под полигонального щита.

Будем исследовать течение, схема которого изображена на фиг. 1. Ось x неподвижной системы координат xy совпадает с границей раздела невозмущенных потоков. Вихрь интенсивности Γ расположен в точке $z_0 = a + ih$ верхнего потока, параметры которого будем отмечать знаком минус, а нижнего знаком плюс; $\rho^\pm$ и $V^\pm$ – плотности и поступательные скорости потоков, g – ускорение силы тяжести, L – жидкая граница раздела. Возмущенные течения описываются комплексными потенциалами

$$W^\pm(z) = V^\pm z + w^\pm(z)$$



Фиг. 1. Схема течения

Предполагается, что интенсивность вихря и расстояние его от границы раздела сред таковы, что возмущения, вносимые вихрем, достаточно малы, и для определения потенциалов возмущений $w^{\pm}(z) = \varphi^{\pm}(x, y) + i\psi^{\pm}(x, y)$ можно использовать приближение линейной теории, то есть линеаризацию граничных условий и снос их на границу невозмущенного течения. Последнее означает, что краевая задача формулируется не для действительной области с частично неизвестной границей, а для расширенной области. В дополнительной области искомая функция является аналитическим продолжением за границу действительной области и, будучи регулярной там, удовлетворяет принципу максимума. Следовательно, при таких условиях применяемая в линейной теории замена действительной области фиктивной не приводит к нарушению точности линейного приближения.

Определение функций $w^{\pm}(z)$ для рассматриваемой задачи сводится к решению граничной задачи для плоскости с краевыми условиями (1)–(4) на линии $y = 0$

$$\psi^{\pm}(x) = 0, \quad y = \mp 0, \quad x < 0 \tag{1}$$

$$\beta\frac{\partial\varphi^+}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\varphi^-}{\partial x} = \delta\eta(x), \quad \beta\frac{\partial\psi^-}{\partial x} = \frac{\partial\psi^+}{\partial x}, \quad x > 0 \tag{2}$$

$$\eta(x) = -\frac{1}{V^{\pm}}\psi^{\pm}(x), \quad x > 0 \tag{3}$$

$$\beta = \frac{V^+}{V^-}, \quad \gamma = \frac{\rho^-}{\rho^+}, \quad \mathrm{Fr} = \frac{(V^-)^2}{gl}, \quad \delta = \frac{V^-(\gamma - 1)}{l\,\mathrm{Fr}}, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 1 \tag{4}$$

Уравнение (1) выражает условие непротекания на пластинке, уравнения (2)–(3) – динамическое и кинематическое условия на жидкой границе раздела сред L, уравнение которой $y = \eta(x)$; l – характерная длина.

Положим $w^{\pm} = w_m^{\pm} + w_s^{\pm}$, где $w_m^{\pm} = \varphi_m^{\pm} + i\psi_m^{\pm}$ – потенциалы течений невесомых жидкостей, вызванных вихрем в точке z_0, а $w_s^{\pm} = \varphi_s^{\pm} + i\psi_s^{\pm}$ – добавочные регулярные слагаемые, обусловленные влиянием силы тяжести. Соответствующие граничные условия для $w_m^{\pm}(z)$ записываются формулами (1)–(2), в которых $\delta = 0$.

Введем функции $w_0^{\pm}(z) = \varphi_0^{\pm} + i\psi_0^{\pm}$, регулярные в областях $D^{\pm}$, такие что

$$w_0^+(z) = w_m^+(z), \quad w_0^-(z) = w_m^-(z) - \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z - z_0)$$

Для определения производных $dw_0^{\pm}/dz$ можно использовать их представление либо по формуле Шварца, восстанавливающей аналитическую в полуплоскости функцию по граничному значению ее действительной или мнимой части, либо формулой Келдыша–Седова, дающей решение смешанной краевой задачи. В последнем случае используется представление в классе функций, ограниченных в точке $z = 0$.

Исходя из этих формул, найдем

$$\frac{\partial\psi_0^{\pm}}{\partial x} = \pm A\frac{\partial\varphi_0^{\pm}}{\partial x} + Q^{\pm}(x), \quad x > 0$$

$$Q^{\pm}(x) = -\frac{\sqrt{x}}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial\psi_0^{\pm}/\partial t}{\sqrt{-t}(t-x)}dt, \quad Au = \frac{\sqrt{x}}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{u(t)dt}{\sqrt{t}(t-x)}$$

Здесь A – сингулярный оператор, имеющий обратный оператор

$$Bu = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{u(t)dt}{t-x}, \quad x > 0$$

такой, что если $Au = f(x)$, то $u(x) = Bf + b$, где b – произвольная постоянная. Используя эти формулы, можно найти граничные значения искомых функций на всей оси и функции целиком в соответствующих областях. В результате получим

$$\left(\frac{dw_m^-}{dz}, \quad \frac{dw_m^+}{dz}\right) = \frac{\Gamma}{4\pi i}(1, k_2)\left[(1-k_1, 1)\left(\frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z-\bar{z}_0}\right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{z}(1+k_1, 1)\left(\frac{1}{(z-z_0)\sqrt{z_0}} + \frac{1}{(z-\bar{z}_0)\sqrt{\bar{z}_0}}\right)\right], \quad z \in \begin{pmatrix} D^- \\ D^+ \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$k_1 = \frac{\gamma - \beta^2}{\gamma + \beta^2}, \quad k_2 = (1+k_1)\beta, \quad \bar{z}_0 = a - ih$$

Коэффициент k_1 изменяется в пределах от -1 ($\gamma \to 0$ (твердая стенка) или $\beta \to \infty$) до 1 ($\gamma \to \infty$ (линия L – свободная граница с постоянным давлением на ней) или $\beta \to 0$). В случае однородного потока ($\beta = 1$, $\gamma = 1$) формулы (5) совпадают друг с другом и дают точное решение нелинейной задачи о течении от вихря вблизи кромки полубесконечной пластины [10].

Формулы (5) получены при условии $dw_m^{\pm}/dz(\infty) = 0$. При этом

$$\frac{dw_m^{\pm}}{dz}(0) = \begin{pmatrix} k_2 \\ 1-k_1 \end{pmatrix}\frac{\Gamma h}{2\pi(a^2+h^2)}$$

Граничные условия для определения функции $w_s^{\pm}(z)$ записываются, очевидно, теми же формулами (1)–(3), в которых теперь под $\varphi^{\pm}$ и $\psi^{\pm}$ следует подразумевать $\varphi_s^{\pm}$ и $\psi_s^{\pm}$. В этом смысле и будем ссылаться в дальнейшем на эти и другие формулы.

По формуле Шварца имеем

$$\frac{dw_s^{\pm}}{dz} = \mp\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\partial\psi_s^{\pm}}{dt}\frac{dt}{t-z} + \frac{\partial\varphi_s^{\pm}}{dx}(-\infty), \quad z \in (D^+, D^-) \tag{6}$$

Отсюда

$$\frac{\partial\psi_s^{\pm}}{\partial x}(x) = \pm A\frac{\partial\varphi_s^{\pm}}{\partial x}(x), \quad x > 0$$

Тогда из (3) получим соотношение

$$\frac{\partial\varphi_s^+}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi_s^-}{\partial x}=b$$

с помощью которого найдем из (2) $\eta(x)$, а из (4) и (7) – выражение для $\partial\psi_s^+/\partial x$

$$\eta(x)=\frac{1}{\beta\delta}[(\beta^2+\gamma)r(x)-b\gamma] \tag{7}$$

$$\frac{\partial\psi_s^+}{\partial x}=\nu\frac{dr}{dx}-\frac{\partial\psi_m^+}{\partial x};\quad r(x)=\frac{\partial\varphi_s^+}{\partial x},\quad \nu=\frac{\mathrm{Fr}\,l(\beta^2+\gamma)}{1-\gamma} \tag{8}$$

Используя (8), получим из (6) интегро-дифференциальное уравнение относительно $r(x)$:

$$r(x)=\nu Br'(x)+f(x)+r(-\infty),\qquad f(x)=-\frac{\Gamma k_2}{2\pi}\frac{h}{(x-a)^2+h^2} \tag{9}$$

Воспользуемся общим решением уравнения типа (9), полученным в [7] методом Винера–Хопфа [11]. Применяя двухстороннее преобразование Фурье, сведем уравнение к задаче Римана для плоскости $\alpha=\xi+i\tau$ с условием на вещественной оси в виде

$$(1-\nu|\alpha|)R^+(\alpha)+R^-(\alpha)=F^+(\alpha)-\frac{r(-\infty)}{i\alpha}(1-\nu_1|\alpha|) \tag{10}$$

$$(R^+(\alpha),\ F^+(\alpha))=\int_0^\infty (r(x),\ f(x))e^{i\alpha x}dx$$

$$R^-(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} r_1(x)e^{i\alpha x}dx$$

$$r_1(x)=r(x)-f(x)\quad (x<0),\qquad \nu_1=\frac{\nu r(0)}{r(-\infty)}$$

Здесь значки + и – указывают на аналитичность функции соответственно в верхней или нижней полуплоскости.

Граничное условие (10) содержит постоянные $r(-\infty)$ и $r(0)$, которые дают нетривиальное решение однородной (при $f(x)=0$) задачи и приводят к дополнительным возмущениям потоков, не нарушающим граничные условия. Задание $r(-\infty)$ может, очевидно, быть включено в постановку задачи, а значение $r(0)$ остается неопределенным. Однако из уравнения (10) видно, что при $r(0)=r(-\infty)$ дополнительные возмущения сводятся к наложению на весь поток однородного поступательного течения. Поэтому, ограничиваясь в дальнейшем этим случаем, будем считать $r(0)=r(-\infty)=0$. Тогда решение уравнения (9) может быть представлено формулой

$$r(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\frac{G^+(\xi)}{K^+(\xi)}d\xi \tag{11}$$

в которой $G^+(\xi)$ – предельное значение функции при $\alpha=\xi+i0$

$$G^+(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F^+(t)dt}{K_1^-(t)(t-\alpha)} \tag{12}$$

$$K^+(\xi)=(1-\nu^2\xi^2)K_1^+(\xi),\qquad K_1^\pm(\xi)=\frac{1}{\sqrt{1+\nu|\xi|}}e^{\mp J(\xi)}$$

$$J(\xi)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{\nu\xi}\frac{\ln u\,du}{u^2-1}$$

Примем далее h, ρ^-, V^- за характерные значения длины, плотности и скорости. Записав функцию $f(x)$ в безразмерном виде, найдем

$$F^+(\xi) = -\frac{\Gamma k_2}{2\pi} e^{ia\xi}\left(\pi e^{-|\xi|} - \int_a^\infty \frac{e^{-i\xi t}}{t^2+1}dt\right)$$

Дальнейшие преобразования связаны с приведением интеграла (11) и подынтегральных функций в (11) к виду, удобному для вычисления и выделения в явном аналитическом виде слагаемых, описывающих асимптотическое поведение функции $r(x)$ при $x \to \infty$.

Введем функцию $g(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + k^2}$, $k > 0$, которая является регулярной в плоскости α, если провести разрез по мнимой оси от точки ik до $i\infty$ и от $-i\infty$ до $-ik$. Тогда $\lim g(\alpha) = |\alpha|$ при $\alpha = \xi + i0$ и $k \to 0$.

Деформируя контур интегрирования в (12) так, чтобы он охватывал мнимую положительную полуось, и переходя к пределу при $\alpha \to \xi$, получим

$$G^+(\xi) = G_1(\xi) + G_2(\xi), \quad G_1(\xi) = F^+(\xi)K_1^+(\xi)(1+\nu|\xi|) \tag{13}$$

$$G_2(\xi) = \frac{\nu}{\pi}\int_0^\infty F^+(it)K_1^+(it)\frac{t\,dt}{t+i\xi}$$

В соответствии с разложением (13) представим $r(x)$ в виде суммы $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$ и, применяя контурное интегрирование в (11), найдем

$$r_1(x) = -\frac{\Gamma k_2}{2\pi}\mu[2\pi e^{-\mu}\sin(\mu x_1)U(x_1) - J_2(x_1) - 2J_3(x_1) + J_4(x_1)] \tag{14}$$

$$J_2(x) = \int_0^\infty e^{-t|x|}\frac{t\cos t - \mu\sin t}{t^2+\mu^2}dt, \quad J_3(x) = \int_a^\infty \frac{\sin(\mu(t+x))}{t^2+1}dt$$

$$J_4(x) = \frac{1}{\pi}\int_a^\infty\int_0^\infty \frac{te^{-(\tau+x)t}}{(\mu^2+t^2)(\tau^2+1)}dt\,d\tau$$

$$r_2(x) = r_{2\,\mathrm{as}}(x) + r_{2\,\mathrm{cont}}(x), \quad \mu = 1/\nu, \quad x_1 = x - a$$

$$r_{2\,\mathrm{as}}(x) = \frac{\sqrt{2}\nu}{\pi}\left(A_1\cos\left(\frac{\pi}{8}+\mu x\right) + \nu A_2\sin\left(\frac{\pi}{8}+\mu x\right)\right)$$

$$A_k = \int_0^\infty \frac{t^k F^+(it)e^{J_1(t)}}{(1+\nu^2t^2)^{5/4}}dt, \quad k = 1, 2$$

$$r_{2\,\mathrm{cont}}(x) = -\frac{\mu}{\pi}\int_0^\infty \frac{\tau R(\tau)}{(\mu^2+\tau^2)^{5/4}}e^{J_1(\tau)-x\tau}d\tau$$

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{tF^+(it)}{(\mu^2+t^2)^{1/4}(t+\tau)}e^{J_1(t)}dt, \quad J_1(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\nu t}\frac{\ln s}{s^2+1}ds$$

Здесь $U(x)$ – единичная функция.

Так как при $a \to \infty$ $F^+(it) = 0$, то $G_2(\xi) = 0$ и, следовательно, $r_2(x) = 0$. Таким образом, в этом случае $r(x) = r_1(x)$ и определяется по формуле (14), в которой $J_3(x_1) = J_4(x_1) = 0$. При $\beta = 1$ она совпадает с соответствующей формулой из работы [12], в которой решена задача о движении вихря в двухслойной тяжелой жидкости.

Уравнение линии раздела сред (7) в безразмерных переменных примет вид

$$\eta(x) = -\frac{\nu}{\beta}r(x), \quad x > 0$$

Заметим, что значения $r(x)$ и $\eta(x)$ прямо пропорциональны величине циркуляции Г.

Уравнение линии раздела сред для случая невесомых жидкостей можно определить из (4), если воспользоваться уравнениями (5). При этом

$$\eta(x) = -\frac{\Gamma(1+k_1)\sqrt{q+a}}{2\sqrt{2}\pi q}\int_0^x \frac{\sqrt{t}(2a-q-t)}{1+(t-a)^2}dt \quad (q=\sqrt{1+a^2})$$

Сопротивление X и подъемная сила Y вихря вычисляются по формуле Чаплыгина

$$R = Y + iX = -\frac{\rho^-}{2}\oint\left(\frac{dW^-}{dz}\right)^2 dz = -i\pi\rho^- \operatorname*{Res}_{z=z_0}\left[\left(\frac{dW^-}{dz}\right)^2\right]$$

Здесь интеграл вычисляется по любому замкнутому контуру, охватывающему вихрь и не пересекающему границу раздела сред.

Относя X и Y к скоростному напору $\rho^-(V^-)^2h/2$, найдем коэффициенты сопротивления c_x и подъемной силы c_y, которые запишем в виде

$$c_x = c_{xm} + c_{xs}, \quad c_y = c_{ym} + c_{ys}$$

$$c_{xm} = \frac{\Gamma^2(1+k_1)}{4\pi}\frac{q+a}{q^2}$$

$$c_{ym} = -2\Gamma\left[1+\frac{\Gamma}{8\pi}\left(1-k_1-(1+k_1)\frac{1+aq}{q^2}\right)\right]$$

$$\begin{pmatrix} c_{xs} \\ c_{ys}\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}\Gamma}{\pi\beta}\int_0^\infty \begin{pmatrix}\sqrt{q-a}-(t-a)\sqrt{q+a} \\ (t-a)\sqrt{q-a}+\sqrt{q+a}\end{pmatrix}\frac{r(t)dt}{\sqrt{t}(1+(t-a)^2)}$$

Заметим, что функции $c_{xm}(a)$ и $c_{ym}(a)$ имеют экстремум в точке $a = 1/\sqrt{3}$. При $a \to -\infty$ $c_x = 0$, $c_y = -2\Gamma(\Gamma/(4\pi) + 1)$. При $a \to \infty$ приходим к формулам

$$c_x = \Gamma^2(1+k_1)\mu e^{-2\mu}$$

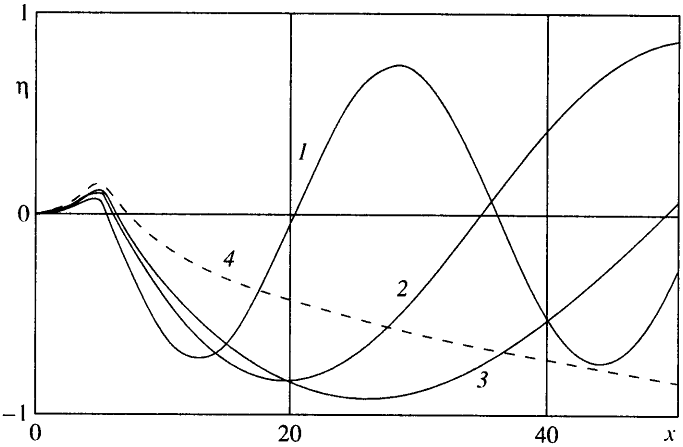
$$c_y = 2\Gamma\left(\frac{\Gamma k_1}{4\pi} - \frac{\Gamma(1+k_1)}{2\pi}\mu e^{-2\mu}\operatorname{Ei}(2\mu) - 1\right)$$

совпадающим при $\beta = 1$ с формулами, приведенными в [12].

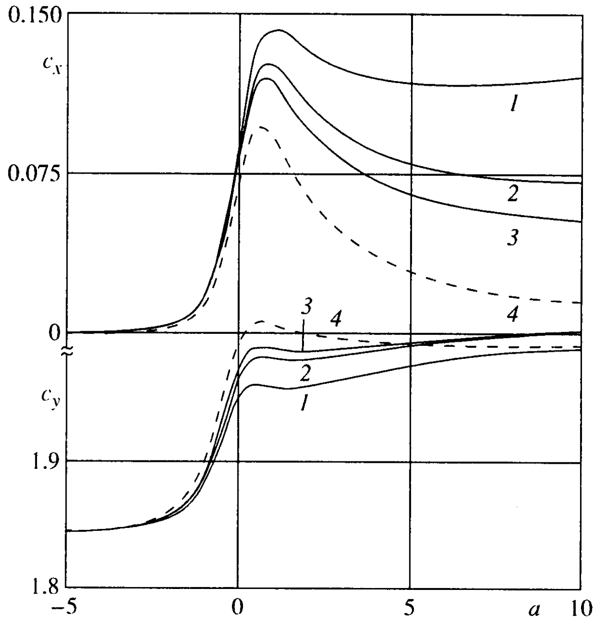
Некоторые результаты расчетов представлены ниже. Зависимость $\eta(x)$ для $a = 5$ показана на фиг. 2. При $\mathrm{Fr} \neq \infty$ $\eta(x)$ асимптотически представляет собой волну, длина которой равна $2\pi\nu$. С ростом числа Фруда длина волны и амплитуда возрастают. При $\mathrm{Fr} \to \infty$ форма границы раздела стремится при $x \to \infty$ к параболе $\eta(x) = c\sqrt{x}$, $c = \Gamma(1+k_1)\sqrt{q+a}/(\sqrt{2}\pi q)$.

На фиг. 3 показана зависимость c_x и c_y от положения вихря для ряда значений числа Фруда, а на фиг. 4 – зависимость c_x и c_y от числа Фруда для $a = \infty$. Влияние числа Fr существенно сказывается в случае, когда вихрь располагается над жидкой границей раздела. При малых Fr, не превышающих некоторых критических значений, коэффициент c_x с ростом Fr увеличивается, а c_y уменьшается. При числах Фруда, больших критических, характер поведения c_x и c_y меняется на противоположный. Изменение положения вихря наиболее существенно сказывается в окрестности значения $a = 0$, а именно когда вихрь располагается над пластинкой вблизи ее кромки.

На фиг. 5 показано распределение коэффициента давления $c_p(x) = 2(p - p_0)/(\rho^-(V^-)^2)$ по жидкой границе раздела сред при $a = 5$.



Фиг. 2. Линии раздела сред $y = \eta(x)$ для $a = 5$; $\beta = 0.6$; $\gamma = 0.32$; $\Gamma = -1$ и $\mathrm{Fr} = 5$; 10; 15; ∞ (кривые *1*–*4*)

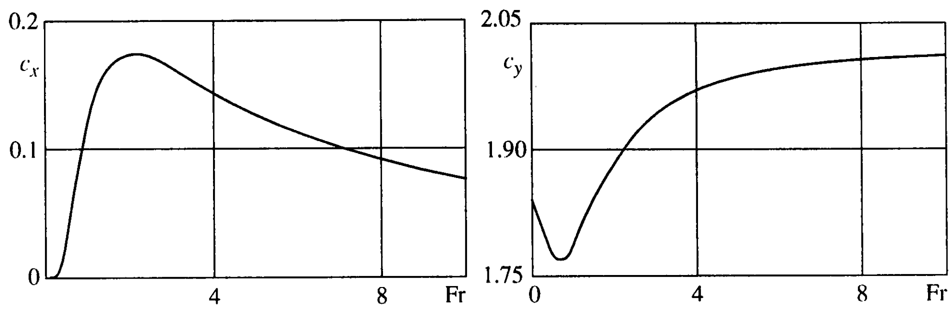


Фиг. 3. Зависимость коэффициентов c_x и c_y от положения вихря a. Линиям *1*–*4* соответствуют значения $\beta = 0.6$; $\gamma = 0.32$; $\Gamma = -1$; $\mathrm{Fr} = 5$; 10; 15; ∞

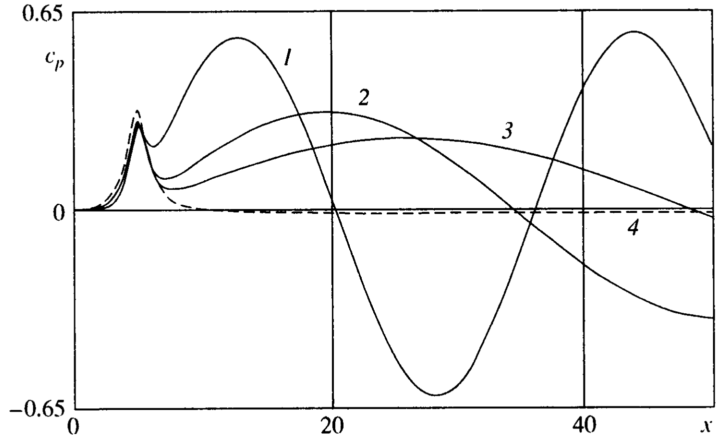
Аналогично решается задача, когда вихрь находится в нижней, более плотной жидкости. Приведем без вывода основные формулы. Пусть теперь $z_0 = a - ih$, $h > 0$. Символом звездочка будем отмечать соответствующие величины для этого случая. Тогда

$$\left(\frac{dw_m^{+*}}{dz},\ \frac{dw_m^{-*}}{dz}\right) = \frac{\Gamma}{4\pi i}\left(1,\ \frac{k_2}{\gamma}\right)\left[(1+k_1,\ 1)\left(\frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z-\bar{z}_0}\right) + \right.$$

$$\left. + (1-k_1,\ 1)\sqrt{z}\left(\frac{1}{(z-z_0)\sqrt{z_0}} + \frac{1}{(z-\bar{z}_0)\sqrt{\bar{z}_0}}\right)\right], \quad z \in (D^+, D^-)$$



Фиг. 4. Зависимость коэффициентов c_x и c_y от числа Фруда Fr при $a \to \infty$ и $\beta = 0.6$; $\gamma = 0.32$; $\Gamma = -1$



Фиг. 5. Распределение давления по границе раздела сред $c_p(x)$ для $a = 5$; $\beta = 0.6$; $\gamma = 0.32$; $\Gamma = -1$ и Fr = 5; 10; 15; ∞ (кривые 1–4)

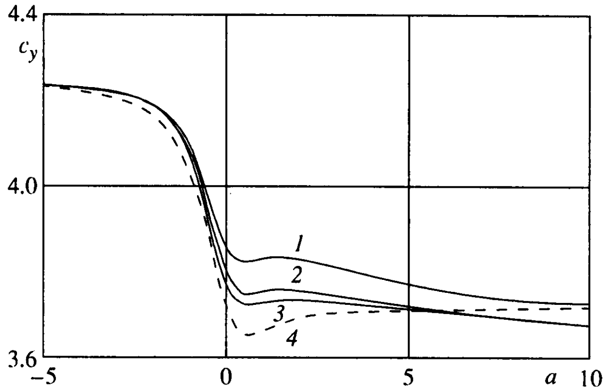
$$(f^*(x), r^*(x), \eta^*(x)) = \frac{\beta}{\gamma}(f(x), r(x), \eta(x))$$

$$c^*_{xm} = \frac{1-k_1}{1+k_1} c_{xm}, \quad c^*_{ym} = -\frac{2\Gamma}{\gamma}\left[\beta + \frac{\Gamma}{8\pi}\left((1-k_1)\frac{1+aq}{q^2} - 1 - k_1\right)\right]$$

$$(c^*_{xs}, c^*_{ys}) = \frac{\beta^2}{\gamma^2}(c_{xs}, -c_{ys})$$

На фиг. 6 приведена зависимость коэффициента c^*_y от положения вихря. Коэффициент подъемной силы достигает теперь наибольшего значения, когда вихрь находится под пластиной, причем величина его почти не зависит от числа Fr и при $a < -5$ почти не зависит от a. При $a > 0$ характер зависимости c^*_y от Fr по сравнению с предыдущим также меняется на противоположный.

Заключение. В линейной постановке решена задача об обтекании вихря двухслойным потоком тяжелых жидкостей с разными полными давлениями. Выявлены качественные особенности и получены количественные оценки влияния опреде-



Фиг. 6. Зависимость коэффициента $c_y(a)$ для случая, когда вихрь находится в точке $z_0 = a - ih$ ($h > 0$) для $\beta = 0.6$; $\gamma = 0.32$; $\Gamma = -1$ и $\mathrm{Fr} = 5$; 10; 15; ∞ (линии 1–4)

ляющих параметров на гидродинамику течений. Коэффициенты гидродинамического сопротивления c_x и подъемной силы c_y, действующей на вихрь, существенно зависят от его расстояния до кромки пластины по горизонтали a при $-5 < a < 15$. При перемещении вихря в направлении потока эти коэффициенты изменяются со значительным градиентом непосредственно вблизи кромки пластины и достигают экстремальных значений вблизи точки $a = 1/\sqrt{3}$.

Распределение давления $c_p(x) = 2(p - p_0)/(\rho^-(V^-)^2)$ по границе раздела L, так же как и сама граница раздела, представляют собой при $x \to \infty$ волны с длиной $2\pi\nu$, пропорциональной числу Фруда; амплитуда давления уменьшается с увеличением Fr, амплитуда L увеличивается. Характер распределения давления по пластине $c_p^{\pm}(x)$ качественно такой же, как в случае невесомых жидкостей.

Точность линейного приближения и область применимости косвенно оценивались путем сравнения решений линейной и нелинейной задач об обтекании вихря потоком невесомой жидкости вблизи свободной поверхности, частично прикрытой плоской крышкой [13]. Возможны три случая этой задачи: течение с одной критической точкой в потоке и с одной или двумя критическими точками на пластине. Наименьшей погрешность линейного приближения будет в первом случае. В статье [13] численно определена зависимость $\Gamma^* = |\Gamma(a)|$ такая, что при $|\Gamma| < \Gamma^*$ имеет место первый случай. Погрешность линейной теории возрастает при приближении вихря к кромке пластины и при увеличении абсолютной величины безразмерной циркуляции. Если вихрь находится в небольшой (порядка 2–3 характерных длин) окрестности точки $z = 0$, то наилучшее соответствие имеет место при $|\Gamma| < 1$. При этом погрешность в определении коэффициентов c_x и c_y не превышает 3%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Степанянц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В.* Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 21. С. 92–179.
2. *Горлов С.И.* Решение линейных задач о равномерном движении контура в многослойной тяжелой жидкости // Моделирование, вычисления, проектирование в условиях неопределенности – 2000: Тр. Междунар. науч. конф. Уфа; Уфим. авиац. ин-т, 2000. С. 161–169.
3. *Горлов С.И.* Генерация нелинейных волн контуром, совершающим поступательное движение под границей раздела двух жидких сред // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 126–136.

4. *Friedrichs K.O., Lewy H.* The dock problem // Communs Pure Appl. Math. 1948. V. 1. № 2. P. 135–148.
5. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
6. *Ackerberg R.C.* On a non-linear theory of thin jets. Pt 2. A linear theory for small injection angles // J. Fluid Mech. 1968. V. 33. Pt 2. P. 261–272.
7. *Котляр Л.М.* Истечение тяжелой жидкости из-под щита // Труды семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1969. Вып. 6. С. 88–93.
8. *Котляр Л.М.* Истечение тяжелой идеальной жидкости из-под щита // Труды семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. Вып. 7. С. 160–167.
9. *Котляр Л.М., Кузнецов А.В.* О неустановившемся истечении идеальной жидкости из-под прямолинейного щита // Труды семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1973. Вып. 10. С. 67–72.
10. *Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю.* Отрывные и кавитационные течения. М.: Наука, 1990. 382 с.
11. *Noble B.* Methods based on the Wiener–Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. L. etc.: Pergamon Press, 1958; Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
12. *Войткунский Я.И.* Обтекание гидродинамических особенностей, расположенных над поверхностью раздела жидкостей различной плотности // Инж. журн. 1963. Т. 3. Вып. 2. С. 262–270.
13. *Сержантова Н.В.* Нелинейная задача о вихре вблизи свободной поверхности, частично прикрытой плоской стенкой Казань: Казан. ун-т, 1999. 13 с. Деп. в ВИНИТИ 09.03.99, № 691-В99.

Казань
E-mail: Arkadii.Kuznetsov@ksu.ru

Поступила в редакцию
24.V.2000