МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 2002

УДК 532.527 : 532.59

 А.С. САВИН

УСТАНОВЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН, ВЫЗЫВАЕМЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В ПЛОСКОМ ПОТОКЕ

Предложен способ прямого доказательства существования установившихся режимов в классических задачах о малых волнах на поверхности плоского потока идеальной весомой жидкости бесконечной глубины, возникающих при равномерном движении в его толще гидродинамической особенности и при работе погруженного пульсирующего источника.

Генерация малых волн на свободной поверхности плоского потока идеальной весомой жидкости бесконечной глубины гидродинамическими особенностями привлекала внимание многих исследователей. Например, в [1] изучено обтекание диполя равномерным потоком со свободной границей, в [2] рассмотрен случай обтекания особенности произвольного порядка, в [3] решена задача о возбуждении поверхностных волн неподвижным пульсирующим источником. Все эти работы выполнены в предположении существования установившихся волновых режимов: при обтекании особенностей равномерным потоком считается, что на свободной поверхности устанавливается стационарная волна, решение задачи о пульсирующем источнике ищется в виде расходящихся волн, имеющих частоту пульсаций источника. В тех же предположениях рассматривалась генерация поверхностных волн равномерно движущимися [4, 5] и колеблющимися [6] телами.

В настоящей статье физическая корректность таких допущений подтверждается непосредственным нахождением устанавливающихся волновых режимов как пределов в бесконечном будущем решений задач о генерации поверхностных волн гидродинамическими особенностями, возникающими в некоторый момент времени в изначально неподвижной жидкости. Основная сложность такого подхода к плоским потокам связана с тем, что решения эволюционных задач в любой конечный момент времени стремятся к нулю при неограниченном удалении от особенности, в то время как решения, соответствующие установившимся режимам, таким свойством не обладают. Однако соответствующие предельные переходы весьма просто могут быть осуществлены в рамках теории обобщенных функций.

1. Горизонтально движущаяся особенность постоянной интенсивности. Пусть комплексный потенциал плоского потока имеет вид $W = Cq + W_1$, где $q = \ln(z - z_0)$ при $n = 0$, $q = (z - z_0)^{-n}$ при $n = 1, 2, \ldots$, функция W_1 аналитична в окрестности точки z_0, тогда в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ локализована гидродинамическая особенность порядка n и интенсивности C. Такие особенности интерпретируются как вихри, источники, диполи и т.д. и широко используются при описании возмущений жидкости неоднородностями различной природы. Если точечная гидродинамическая особенность порядка n переменной интенсивности $C = C(t)$ движется по закону $z_0 = z_0(t) = x_0(t) + iy_0(t)$ в изначально неподвижной и занимавшей всю полуплоскость $y < 0$ весомой идеальной жидкости, то отклонение свободной поверхности от ее равновесного положения $y = 0$ можно записать в виде [7]

$$S(x,t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{2(\delta_{0n} - n)}{i^n n!}\int\limits_0^\infty \lambda^n \int\limits_{-\infty}^t C(\tau)\exp(i\lambda[x - z_0(\tau)])\cos[\sqrt{g\lambda}(\tau - t)]d\tau d\lambda\right\} \tag{1.1}$$

где δ_{0n} – символ Кронекера.

Пусть в момент времени $t = 0$ в неподвижной жидкости мгновенно возникает точечная гидродинамическая особенность конечной интенсивности $C = \mathrm{const}$ при $t > 0$ и сразу же начинает двигаться параллельно невозмущенной свободной поверхности с постоянной скоростью $-V$. Выясним, какой профиль свободной поверхности устанавливается в системе координат, движущейся вместе с особенностью, при $t \to +\infty$. Если в системе координат $\{x', y'\}$, где особенность покоится, она локализована в точке z_0', то в неподвижной системе координат $\{x, y\}$ ее закон движения определяется соотношением $z_0(t) = z_0' - Vt$. С учетом этого и связи между координатами произвольной точки в подвижной $\{x', y'\}$ и покоящейся $\{x, y\}$ системах: $x = x' - Vt$, $y = y'$ из формулы (1.1) получим выражение для профиля свободной поверхности в системе координат, сопровождающей особенность по оси x

$$S(x',t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{2(\delta_{0n} - n)C}{i^n n! V}\int\limits_0^\infty \lambda^n \exp[i\lambda(x' - z_0')]\int\limits_{-Vt}^0 \exp(i\lambda\xi)\cos(\xi\sqrt{\nu\lambda})d\xi d\lambda\right\} \tag{1.2}$$

$$\xi = V(\tau - t), \quad \nu = gV^{-2}$$

При $t \to +\infty$ внутренний интеграл в правой части равенства (1.2) можно рассматривать как преобразование Фурье F функции $\theta(-\xi)\cos a\xi$, вычисленное при $a = \sqrt{\nu\lambda}$. Здесь $\theta(x) = 0$ при $x < 0$, $\theta(x) = 1$ при $x > 0$. Используя формулу Сохоцкого [8], фурье-образу этой функции, приведенному в [9], можно придать вид

$$F[\theta(-\xi)\cos(\xi\sqrt{\nu\lambda})] = \pi\delta(\lambda - \nu) - \frac{i}{\lambda - \nu}$$

где δ – дельта-функция. Теперь из формулы (1.2) следует, что в системе координат, связанной с особенностью, при $t \to +\infty$ устанавливается стационарный профиль свободной поверхности

$$S(x') = \mathrm{Re}\left\{\frac{2(\delta_{0n} - n)C}{i^n n! V}\left[\pi\nu^n \exp[i\nu(x' - z_0')] - i\int\limits_0^\infty \frac{\lambda^n \exp[i\lambda(x' - z_0')]}{\lambda - \nu}d\lambda\right]\right\} \tag{1.3}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Можно показать, что выражение (1.3) тождественно решению [2] стационарной задачи обтекания неподвижной особенности равномерным потоком. В частности, для случая движения цилиндра радиуса R со скоростью $-V$ на постоянной глубине h в дипольном приближении ($C = VR^2$, $n = 1$) из формулы (1.3) найдем

$$S(x') = 2R^2\left\{\int\limits_0^\infty \frac{\lambda\exp(-\lambda h)\cos(\lambda x')}{\lambda - \nu}d\lambda - \pi\nu\exp(-\nu h)\sin(\nu x')\right\}$$

что полностью совпадает с решением стационарной задачи [1].

Поскольку движущееся в жидкости тело гидродинамически эквивалентно некоторой системе особенностей, в приближении малых волн результирующая поверхностная волна складывается из волн, создаваемых отдельными особенностями. Отсюда следует, что при длительном равномерном движении из состояния покоя достаточно глубоко погруженного тела профиль свободной поверхности жидкости принимает вид сопровождающей его волны постоянной формы, которая может быть найдена из решения стационарной задачи.

Обычно при постановке стационарной задачи назначается условие затухания возмущений вверх по потоку, решение (1.3) получено без этого допущения, но обладает таким свойством. Это означает, что условие затухания гравитационных волн вверх по потоку следует из основных уравнений гидродинамики.

2. Неподвижный пульсирующий источник. Пусть в момент времени $t = 0$ под свободной поверхностью неподвижной бесконечно глубокой жидкости начинает свою работу точечный источник, локализованный в точке $z_0 = -ih$, $h > 0$. Считая, что интенсивность источника при $t > 0$ меняется по гармоническому закону $C(t) = (Q/2\pi)\cos\omega t$, выясним, какой волновой режим установится на поверхности жидкости при $t \to +\infty$. Используя новую переменную $\xi = t - \tau$, запишем формулу (1.1) при $n = 0$ в виде

$$S(x,t) = \frac{Q}{\pi}\mathrm{Re}\left\{\exp(-i\omega t)\int_0^\infty \exp(-h\lambda)\cos(x\lambda)\int_0^t \exp(i\omega\xi)\cos(\xi\sqrt{g\lambda})\,d\xi\, d\lambda\right\} \tag{2.1}$$

При $t \to +\infty$ внутренний интеграл в правой части равенства (2.1) можно рассматривать как преобразование Фурье F функции $\theta(\xi)\cos(\xi\sqrt{g\lambda})$. С учетом того, что [9]

$$F[\theta(\xi)\cos(\xi\sqrt{g\lambda})] = \frac{i\omega}{(\omega + i0)^2 - g\lambda}$$

придадим выражению (2.1) вид

$$S(x,t) = -\frac{Q\omega}{\pi g}\mathrm{Re}\left\{i\exp(-i\omega t)\int_0^\infty \frac{\exp(-h\lambda)\cos(x\lambda)d\lambda}{(\lambda-\sigma)-i0}\right\}, \quad \sigma = \frac{\omega^2}{g}$$

Положив $u = \lambda - \sigma$ и воспользовавшись формулой Сохоцкого [8]

$$\frac{1}{u - i0} = i\pi\delta(u) + \frac{1}{u}$$

получим, вернувшись к старой переменной

$$S(x,t) = \frac{Q\omega}{g}\left[\exp(-h\sigma)\cos(\omega t)\cos(\sigma x) - \frac{\sin(\omega t)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\exp(-h\lambda)\cos(x\lambda)d\lambda}{\lambda - \sigma}\right] \tag{2.2}$$

Преобразуем сингулярный интеграл, содержащийся в правой части равенства (2.2), с помощью приема [1]. Проинтегрируем функцию $(\xi - \sigma)^{-1}\exp[(ix - h)\xi)]$ комплексной переменной $\xi = \lambda + i\eta$ по замкнутому контуру, состоящему из отрезка $[0, \sigma - \rho]$ вещественной оси, полуокружности радиуса ρ, с центром в точке σ, лежащей при $x > 0$ в верхней полуплоскости, а при $x < 0$ – в нижней, отрезка $[\sigma + \rho, R]$ вещественной оси, четверти окружности радиуса R, с центром в начале координат, лежащей при $x > 0$ в верхней полуплоскости, при $x < 0$ – в нижней, и замыкающего контур отрезка мнимой оси. При таком выборе контура рассматриваемый интеграл будет равен нулю. Переходя к пределам $\rho \to +0$, $R \to +\infty$ и воспользовавшись леммой Жордана, найдем выражение для интеграла от рассматриваемой функции по вещественной полуоси $\lambda > 0$, понимаемого в смысле главного значения, не содержащее особенностей в подынтегральном выражении. Поскольку действительная часть этого интеграла совпадает с интегралом в правой части равенства (2.2), получим

$$S(x,t) = \frac{Q\omega}{g}\left\{\exp(-h\sigma)\cos(\sigma x \pm \omega t) - \frac{\sin(\omega t)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\exp(-|x|\eta)[\eta\cos(h\eta) - \sigma\sin(h\eta)]d\eta}{\eta^2 + \sigma^2}\right\}$$

где знак "плюс" следует брать при $x < 0$, знак "минус" при $x > 0$, что соответствует установлению суперпозиции стоячей и двух бегущих волн, распространяющихся в разных направлениях [3].

Заключение. Предложенный способ нахождения установившихся малых волн, вызываемых гидродинамическими особенностями, может быть полезен и в более сложных случаях. Например, рассмотрев равномерное движение со скоростью V точечного источника, пульсирующего с частотой ω, под свободной поверхностью бесконечно глубокой жидкости, можно показать, что в системе координат, сопутствующей источнику, устанавливается суперпозиция стоячих и бегущих волн. При этом если $g/(\omega V) > 4$, то образуется четыре бегущие волны, две из которых распространяются в одном направлении, остальные – в противоположном; если $g/(\omega V) < 4$, то образуется только две бегущие волны, распространяющиеся в направлении, противоположном направлению движения источника. Этот результат аналогичен полученному в [10] для случая движения точки пульсирующего давления по свободной поверхности потока значительно более сложным способом.

Автор искренне благодарен А.А. Бармину за внимание к работе и обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 99-01-00277).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. М. Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. *Келдыш М.В.* Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости // М.В. Келдыш. Избр. тр. Механика. М.: Наука, 1985. С. 100–103.
3. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
4. *Келдыш М.В., Лаврентьев М.А.* О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости // М.В. Келдыш. Избр. тр. Механика. М.: Наука, 1985. С. 120–151.
5. *Кочин Н.Е.* О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел // Кочин Н.Е. Собр. соч. М.; Л.: Изд. АН СССР, 1949. Т. 2. С. 105–182.
6. *Кочин Н.Е.* Плоская задача об установившихся колебаниях тел под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости // Кочин Н.Е. Собр. соч. М.; Л.: Изд. АН СССР, 1949. Т. 2. С. 244–276.
7. *Савин А.С.* Нестационарный вариант метода М.В. Келдыша в задаче о точечной особенности под свободной поверхностью // Докл. РАН. 1999. Т. 365. № 5. С. 628–629.
8. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
9. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
10. *Debnath L., Rosenblat S.* The ultimate approach to the steady state in the generation of waves on a running stream // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1969. V. 22. Pt 2. P. 221–233.

Москва

Поступила в редакцию
15.XI.2001