

УДК 533.6.011

© 2002 г. А.В. КОЗЛОВ

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА ПРИ НЕРАВНОВЕСНОМ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМ ИСТЕЧЕНИИ ГАЗА В ВАКУУМ

С помощью численного метода прямого статистического моделирования анализируются процессы переноса при неравновесном истечении одноатомного газа в вакуум. Определены количественные зависимости макроскопических параметров (плотности, скорости, температуры, напряжения, теплового потока) от расстояния до источника. Установлена зависимость напряжения и теплового потока от составляющих тензора скоростей деформации и градиента температуры в случае газодинамического источника. Определены пределы применимости известного гиперзвукового приближения.

Сферический разлет газа в вакуум – один из наиболее простых и ярких примеров сильно неравновесных течений газа. Под неравновесностью здесь понимается неравновесность по поступательным степеням свободы. Изучение данного течения имеет большое значение в динамике разреженного газа. Оно моделирует течение на оси струи, истекающей из осесимметричного сопла. Обычно длина свободного пробега молекул у такого источника много меньше его размера (в случае стремления длины свободного пробега к нулю такой источник называют газодинамическим). При этом начальный участок течения может быть описан с помощью уравнений Эйлера идеального газа. В такой постановке решение начинается от звуковой линии, на которой имеется особенность. Вдали от источника для одноатомного газа асимптотическое поведение газодинамических параметров в приближении Эйлера следующее: $T \sim r^{-4/3}$, $V \rightarrow \text{const}$, $\rho \sim r^{-2}$. Число Маха при этом стремится к бесконечности.

Однако модель идеального газа неприменима вдали от источника. Вследствие уменьшения плотности газа длина свободного пробега молекул быстро возрастает с увеличением расстояния от источника и становится сравнимой с ним по величине. Течение принимает сильно неравновесный характер, и предположение о равенстве нулю напряжений и тепловых потоков, лежащее в основе уравнений Эйлера, перестает выполняться. С кинетической точки зрения неравновесность истечения газа в вакуум состоит в том, что разброс скоростей молекул в направлении средней скорости стабилизируется, а в поперечном направлении стремится к нулю при увеличении расстояний от источника.

В [1] в качестве математической модели применялись уравнения Навье – Стокса. В них, как известно, используется линейная связь между тензором напряжений и вектором потока тепла с одной стороны и тензором скоростей деформаций и градиентом температуры с другой (определяющие соотношения). В [1] показано, что уравнения Навье – Стокса также не дают корректного описания течения газа вдали от источника. Адекватным рассматриваемому течению является кинетическое уравнение Больцмана, которое дает замкнутое описание течения газа, но уже не в трехмерном физическом, а в шестимерном фазовом пространстве. Это уравнение и его модели

неоднократно численно решались для данной задачи 1970-х годах. В [2] использовалось численное решение уравнения Крука, однако расчет проводился при сравнительно больших длинах свободного пробега у источника, а размер расчетной области всего в несколько раз превосходил размер источника. Расчет истечения из сферического источника методом прямого статистического моделирования проводился в [3, 4]. Основное внимание было уделено получению критерия возникновения эффекта стабилизации температуры, а напряжения и потоки тепла при этом не рассматривались.

Наряду с численным исследованием изменения газодинамических параметров при решении уравнения Больцмана не прекращались попытки описать течение газа от газодинамического источника в вакуум с помощью макроскопических уравнений, то есть с помощью уравнений сохранения, пополненных теми или иными определяющими соотношениями для напряжений и тепловых потоков. В частности, в 1960-х годах было получено решение бесконечной цепочки макроскопических моментных уравнений, эквивалентных уравнению Больцмана, в гиперзвуковом приближении [5, 6]. Это приближение является асимптотически точным для маквелловских молекул, взаимодействующих с силой, обратно пропорциональной пятой степени расстояния между ними. В этом случае бесконечная цепочка моментных уравнений может быть оборвана и решена. Авторы [5, 6] показали, что решение указывает на существование предельного значения температуры, которое ранее наблюдалось в эксперименте. Было показано, что при удалении от источника ($r \rightarrow \infty$) и гиперзвуковом характере течения ($M \gg 1$) скорость и температура газа стремятся к постоянным величинам ($V \rightarrow \text{const}$, $T \rightarrow \text{const}$), а плотность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до источника ($\rho \sim r^{-2}$).

Настоящая работа выполнена с целью изучения процессов переноса в неравновесном течении сферического расширения одноатомного газа в вакуум. Особое внимание уделено определению количественного отличия величины теплового потока и напряжения от их значений в приближении Фурье – Ньютона и закономерностям изменения этих величин при истечении от газодинамического источника.

1. Постановка задачи и метод решения. При исследовании характеристик сферически симметричного разлета одноатомного газа в вакуум используется кинетическое уравнение Больцмана. В качестве модели взаимодействия молекул применяется модель псевдомаквелловских молекул, при этом полное сечение взаимодействия молекул обратно пропорционально их относительной скорости. Граничные условия для решения уравнения Больцмана ставятся на сферической поверхности радиуса r_1 , с которой вылетают молекулы, имеющие максвелловское распределение по скоростям. Функция распределения определяется параметрами ρ_1 , u_1 , T_1 (плотность, скорость и температура), причем $u_1 = \sqrt{(5/3)RT_1}$, т.е. массовая скорость равна скорости звука. Вводятся безразмерные переменные: расстояние $r_* = r/r_1$, плотность $\rho_* = \rho/\rho_1$, скорость $u_* = u/u_1$, температура $T_* = T/T_1$. Число Кнудсена определяется как $\text{Kn}_1 = \lambda_1/r_1$, где λ_1 – длина свободного пробега, соответствующая функции распределения вылетающих из источника молекул. Длина свободного пробега псевдомаквелловских молекул связана с коэффициентом вязкости соотношением $\lambda = 4\mu/(\pi r c)$.

Для решения уравнения Больцмана используется метод прямого статистического моделирования Монте-Карло. В этом методе реальные молекулы заменяются моделирующими частицами. Их число во много раз меньше, чем число молекул в реальном течении. Сечение столкновения этих частиц должно быть увеличено, чтобы моделировать правильное значение частоты столкновений молекул друг с другом. Реальный процесс движения молекул заменяется чередующимися этапами свободного движения частиц и взаимного их столкновения. Этот метод – вариант метода частиц в ячейках – был разработан в 1960-х годах Г. Бердом [7]. Метод имеет первый порядок аппроксимации.

В процессе моделирования для каждой ячейки проводится накопление статистических сумм, несущих информацию о плотности, скорости, температуре газа, напряжениях и тепловом потоке. Расчет течения проводится в пределах от $r = r_1$ до некоторого максимального радиуса r_{\max} . Расчетная область разбивается на сферические ячейки, размер которых пропорционален радиусу (длина свободного пробега при истечении в вакуум при степенном законе взаимодействия для максвелловских и более "жестких" молекул возрастает быстрее, чем радиус в первой степени). Размер первой ячейки (при $r = r_1$) равняется одной трети длины свободного пробега.

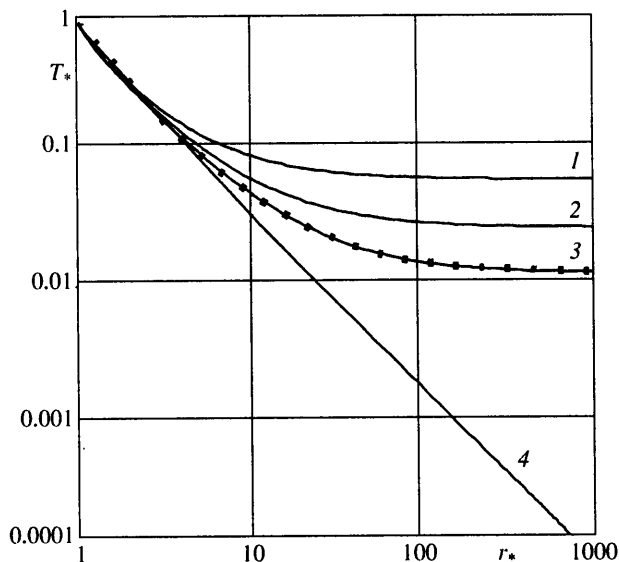
Шаг по времени (определяющий расстояние, на которое перелетит частица и количество столкновений в ячейке) в каждой ячейке свой, причем он возрастает пропорционально радиусу, на котором находится данная ячейка. Шаг по времени в первой ячейке Δt равняется времени, за которое частица с безразмерной скоростью $u_* = 2$ проходит расстояние, равное размеру первой ячейки. Очевидно, что при данном распределении размера ячеек и шага по времени при истечении в вакуум количество молекул, приходящееся в среднем на одну ячейку, будет приблизительно постоянным. Это приводит к тому, что величина статистической погрешности слабо зависит от расстояния до источника. Такой метод позволяет сильно сократить время расчета и затраты оперативной памяти. Для газодинамических параметров (плотность, скорость, температура) статистическая погрешность не превышала 0.05%, для напряжений и потоков тепла – 0.5%.

В начале вычислений в расчетной области отсутствуют частицы. На каждом шаге по времени вбрасываются частицы с координатой $r = r_1$, а частицы, получившие в результате перелетов и столкновений координату $r < r_1$ или $r > r_{\max}$, удаляются из расчетной области. При истечении из источника в вакуум частиц с указанной выше функцией распределения обратно в источник возвращается не более 3.5% от количества вбрасываемых частиц. После расчета достаточно большого количества шагов по времени устанавливается стационарное течение, и начинается накопление статистических данных для параметров течения в ячейках. Число шагов, по прохождении которых начинается сбор статистики, в несколько раз превосходит количество шагов, за которое частица с безразмерной скоростью $u_* = 1$, направленной по радиусу, долетает без столкновений от источника до последней ячейки.

При расчете сферически симметричного течения достаточно хранить в памяти компьютера для каждой частицы только расстояние до центра симметрии и две компоненты скорости: радиальную и нормальную, так как вследствие сферической симметрии все направления, перпендикулярные радиусу, можно считать равновероятными. В этом случае при расчете столкновения для направлений скоростей частиц принимается случайный азимутальный угол.

2. Результаты расчетов. На фиг. 1 сплошными кривыми представлены рассчитанные методом прямого статистического моделирования зависимости температуры газа от расстояния до центра симметрии источника при различных значениях числа Кн. Температура на некотором расстоянии от источника перестает убывать и стремится к предельному значению. При уменьшении числа Кн предельное значение температуры уменьшается. Скорость газа возрастает при удалении от источника и на расстоянии порядка 5 диаметров источника приближается к своему предельному значению. Разница предельных величин скорости при числах Кн = 0.01 и 0.02 не превышает 3%.

Зависимости безразмерных нормальных напряжений $p_{rr*} = p_{rr} / (\rho_1 RT_1)$ и безразмерного потока тепла $q_* = q_r / (\rho_1 (RT_1)^{3/2})$ от радиуса, полученные в расчетах при различных числах Кн, изображены на фиг. 2, 3. На источнике нормальные напряжения принимают отрицательные значения, далее напряжения возрастают, меняют знак при $r_* \approx 1.2$, достигают максимума и монотонно стремятся к нулю. Тепловой поток монотонно убывает с увеличением расстояния до источника.



Фиг. 1. Зависимость температуры газа от радиуса: 1 – $\text{Kn}_1 = 0.05$, 2 – 0.02, 3 – 0.01, 4 – изэнтропическое течение, точки – макроскопическая модель при $\text{Kn}_1 = 0.01$

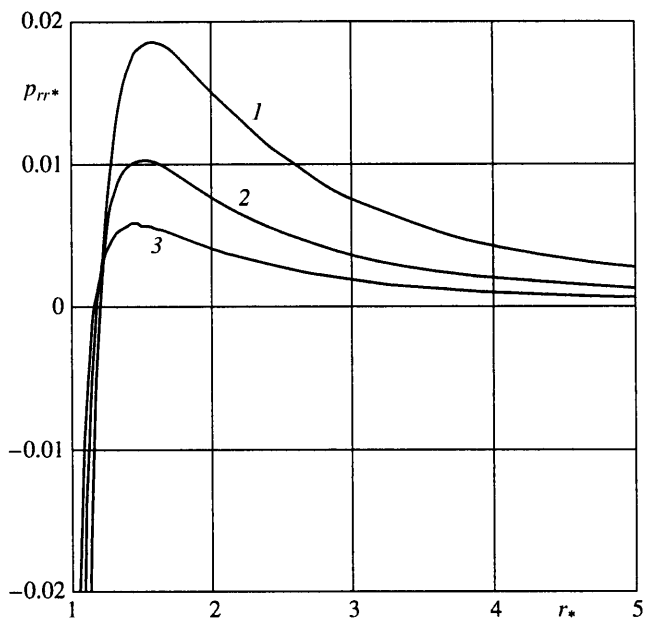
На фиг. 4, 5 представлены аналогичные зависимости, позволяющие проанализировать изменение напряжений и тепловых потоков вдали от источника. На больших расстояниях устанавливается асимптотическая зависимость: нормальные напряжения и поток тепла убывают обратно пропорционально квадрату радиуса. Там же показаны зависимости безразмерных нормальных напряжений $p_{rr}^N = p_{rr}^N / (\rho_1 RT_1)$ и безразмерного потока тепла $q_r^F = q_r^F / (\rho_1 (RT_1)^{3/2})$, рассчитанных по соотношениям Ньютона и Фурье на основе газодинамических величин u , T , полученных в расчете методом прямого статистического моделирования.

В сферических координатах в случае сферически симметричного течения нормальное напряжение по соотношениям Ньютона p_{rr}^N и поток тепла по соотношениям Фурье q_r^F выражаются следующим образом:

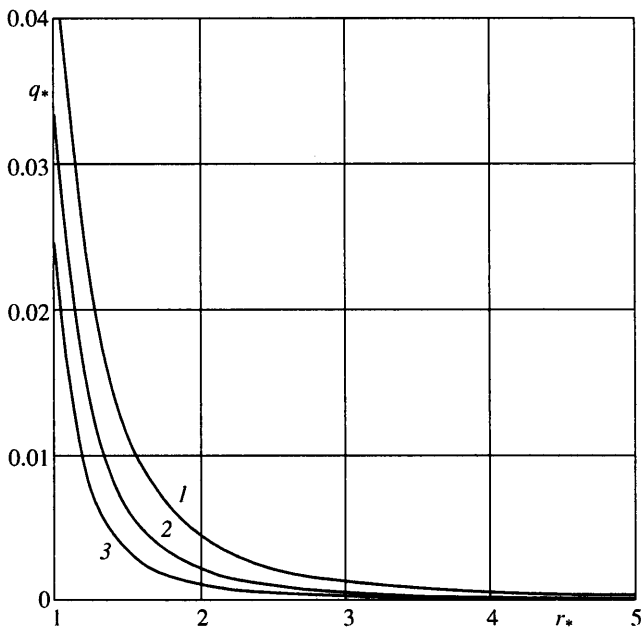
$$p_{rr}^N = -\frac{4\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) \quad (2.1)$$

$$q_r^F = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad (2.2)$$

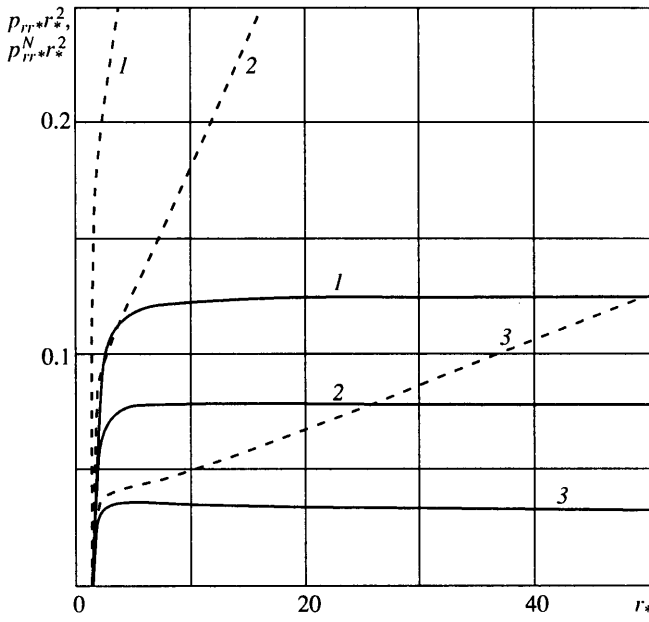
где μ и λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности, пропорциональные температуре. Видны значительные отличия истинных напряжений и потоков тепла от напряжений и потоков тепла, вычисленных по соотношениям Ньютона и Фурье (под истинными подразумеваются величины, полученные непосредственно в результате расчетов методом прямого статистического моделирования). На больших расстояниях от источника нормальные напряжения Ньютона в отличие от истинных нормальных напряжений убывают обратно пропорционально первой степени радиуса. Истинный поток тепла в пределе при увеличении радиуса в несколько раз превышает поток тепла, рассчитанный по приближению Фурье. Это дополнительно свидетельствует



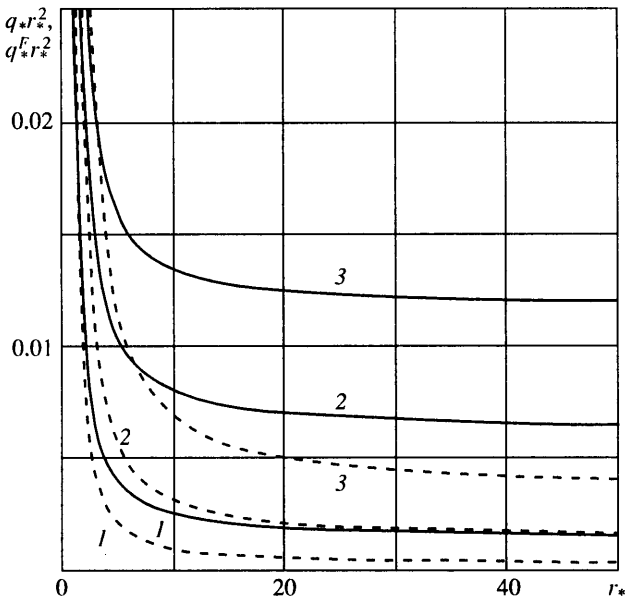
Фиг. 2. Зависимость нормальных напряжений от радиуса. Обозначения см. на фиг. 1



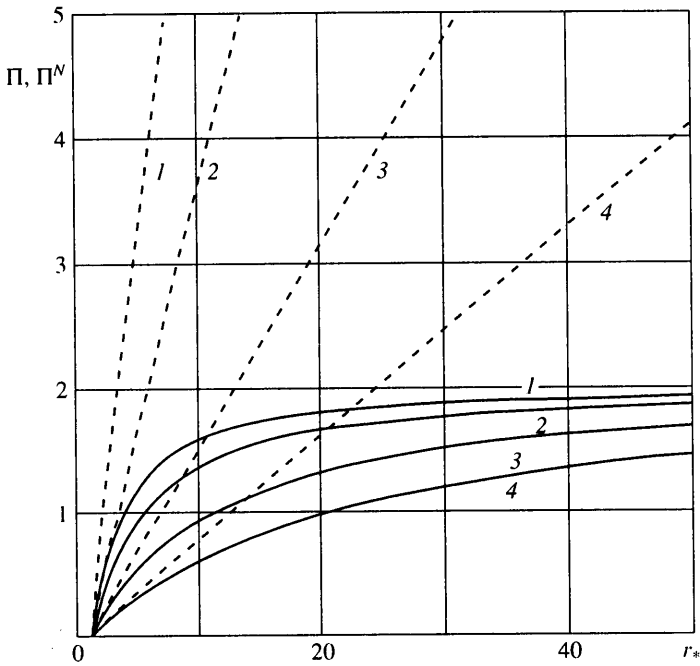
Фиг. 3. Зависимость потока тепла от радиуса. Обозначения см. на фиг. 1



Фиг. 4. Зависимость $p_{rr}^* r_*^2$ (сплошные кривые) и $p_{rr}^{N*} r_*^2$ (штриховые) от радиуса: 1 - $Kn_1 = 0.05$, 2 - 0.02, 3 - 0.01



Фиг. 5. Зависимость $q_* r_*^2$ (сплошные кривые) и $q_*^F r_*^2$ (штриховые) от радиуса. Обозначения см. на фиг. 4



Фиг. 6. Зависимость отношения истинных нормальных напряжений к давлению Π (сплошные кривые) и отношения нормальных напряжений Ньютона к давлению Π^N (штриховые) от радиуса: 1 – $\text{Kn}_1 = 0.1$, 2 – 0.05, 3 – 0.02, 4 – 0.01

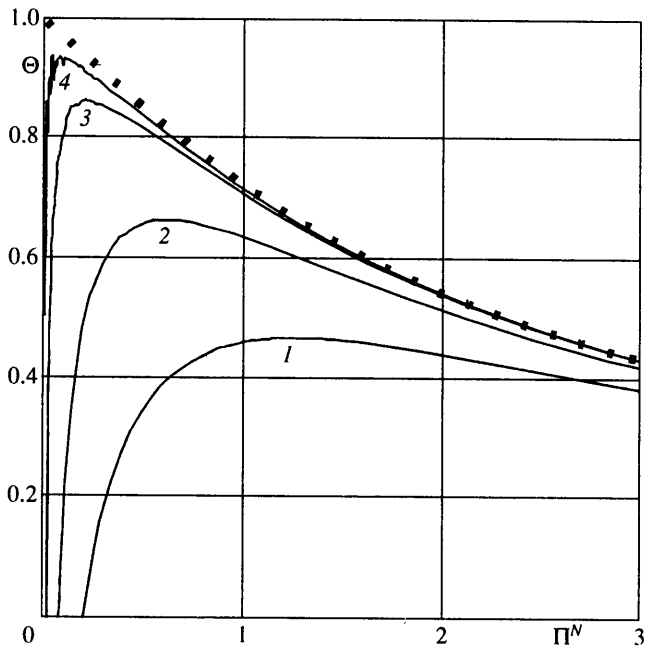
о сильной неравновесности течения и некорректности описания такого течения в рамках уравнений Навье – Стокса.

Анализ отношения истинных напряжений к давлению $\Pi = p_{rr}/p$ при увеличении радиуса показывает, что это отношение стремится к 2 (фиг. 6). Это соответствует стремлению к нулю скоростей молекул в поперечном направлении при сохранении разброса скоростей в продольном направлении или, иными словами, стремлению к нулю поперечной температуры при стабилизации продольной температуры [5, 6]. Величина отношения вязких напряжений в ньютоновском приближении к давлению $\Pi^N = p_{rr}^N/p$ стремится вдали от источника к бесконечности. Это отношение при произвольном расстоянии от источника является мерой неравновесности и одновременно может служить независимой переменной.

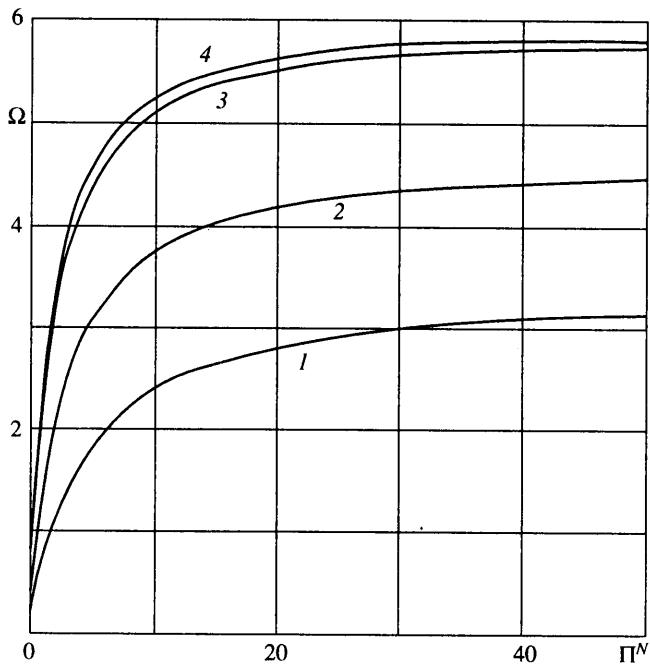
На фиг. 7 приведены отношения истинного напряжения к напряжению, рассчитанному по приближению Ньютона (2.1) $\Theta = p_{rr}/p_{rr}^N$, в зависимости от указанной независимой переменной. На фиг. 8 приведено отношение истинного теплового потока к потоку тепла, рассчитанному по приближению Фурье (2.2) $\Omega = q_r/q_r^F$.

Основная особенность этих зависимостей состоит в следующем. При уменьшении числа Kn , рассчитанного по значениям параметров на источнике (локальное число Kn при этом изменяется от своего значения на источнике до бесконечности при удалении от источника), обнаруживаются предельные кривые, дающие зависимости P и Q , определяемые следующим образом

$$p_{rr} = p_{rr}^N P\left(\frac{p_{rr}^N}{p}\right), \quad q_r = q_r^F Q\left(\frac{p_{rr}^N}{p}\right) \quad (2.3)$$



Фиг. 7. Зависимость отношения истинных нормальных напряжений к нормальным напряжениям: 1 – $K\pi_1 = 0.1$, 2 – 0.05, 3 – 0.02, 4 – 0.01, точки – зависимость P



Фиг. 8. Зависимость отношения истинного теплового потока к тепло- вому потоку Фурье от отношения нормальных напряжений Ньютона к давлению. Обозначения см. на фиг. 6

Отметим, что при уменьшении p_{rr}^N / p предельные кривые стремятся к единице. Это показывает, что вблизи источника выполняются соотношения Ньютона и Фурье. При этом сами значения напряжения и теплового потока стремятся к нулю.

Зависимости P и Q аппроксимируются дробно-рациональными выражениями

$$P = \frac{p_{rr}}{p_{rr}^N} = \left(1 + \frac{p_{rr}^N}{p} \right) \left(1 + 1.25 \frac{p_{rr}^N}{p} + 0.5 \left(\frac{p_{rr}^N}{p} \right)^2 \right)^{-1} \quad (2.4)$$

$$Q = \frac{q_r}{q_r^N} = \left(1 + 3.6 \frac{p_{rr}^N}{p} \right) \left(1 + 0.6 \frac{p_{rr}^N}{p} \right)^{-1} \quad (2.5)$$

3. Гиперзвуковое приближение. Ниже будет установлена связь соотношений (2.3) с гиперзвуковым приближением [5, 6]. Это приближение было развито на основе разложения моментных уравнений по степеням S^{-1} ($S = u / \sqrt{2RT}$ – скоростное отношение). Гиперзвуковое приближение представляет собой замкнутую систему уравнений, позволяющую предсказать зависимость величины продольной и поперечной температур от расстояния до центра симметрии вдали от источника. В частности, в [5, 6] показано, что при сферическом расширении продольная температура стабилизируется, а поперечная убывает обратно пропорционально радиусу. Под продольной и поперечной температурами, как обычно, понимаются следующие моменты функции распределения молекул по скоростям $f(\mathbf{r}, \xi)$

$$T_{\parallel} = \frac{1}{\rho} P_{rr} = \frac{1}{n} \int (\xi_r - u)^2 f d\xi, \quad T_{\perp} = \frac{1}{2n} \int (\xi_{\theta}^2 + \xi_{\phi}^2) f d\xi \quad (3.1)$$

Для модельного релаксационного кинетического уравнения Гуревича – Ландау – Бхатнагара – Гросса – Крука с частотой столкновений $\nu = An = p/\mu$ система уравнений гиперзвукового приближения имеет следующий вид (уравнения (2.8а), (2.8б) из [6]; их относительная погрешность имеет порядок S^{-1})

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (r^2 (p_{rr} + p)) &= \frac{Anr^2}{u} (RpT - p_{rr} - p) \\ r \frac{d}{dr} (RT) &= \frac{2}{3} \left(\frac{p_{rr} + p}{\rho} - 3RT \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $R = k/m$ – газовая постоянная. Эта система уравнений не является следствием законов сохранения, при ее выводе использованы моментные уравнения иного типа.

Покажем возможность получения зависимостей (2.3), исходя из уравнений (3.2). Как следствие этой системы получим уравнение для введенной выше величины Π

$$\frac{3}{2} (\Pi - 2)(\Pi + 1) + r\Pi' + \frac{Anr}{u} \Pi = 0 \quad (3.3)$$

Введем новую безразмерную независимую переменную

$$t = \frac{8ur}{3An_1 r_1^2} \quad (3.4)$$

Учитывая, что для максвелловских молекул, вязкость которых пропорциональна температуре, $A = mRT_1 / \mu_1$, и на больших расстояниях от источника концентрация убывает обратно пропорционально квадрату радиуса, а скорость одноатомного идеального газа в гиперзвуковом пределе в 2 раза превышает скорость звука на

источнике, то есть $2nr^2 = n_1 r_1^2$, преобразуем уравнение (3.3) к виду

$$\frac{3}{2}(\Pi - 2)(\Pi + 1) + t\Pi' + \frac{4}{3} \frac{\Pi}{t} = 0 \quad (3.5)$$

На больших расстояниях от источника скорость стабилизируется и $du/dr \ll ur$, поэтому производной скорости в выражении (2.1) для напряжения можно пренебречь и считать, что $p_{rr}^N \approx 4\mu u/(3r)$. Тогда отношение напряжений Ньютона к давлению

$$\frac{p_{rr}^N}{p} \approx \frac{8\mu_1 ur}{3r^2 \rho_1 RT_1} \quad (3.6)$$

Сравнение выражений (3.4) и (3.6) показывает, что вдали от источника $t = p_{rr}^N / p$. Поэтому уравнение (3.5) определяет зависимость отношения p_{rr}/p от переменной p_{rr}^N / p в гиперзвуковом приближении.

Используем соотношение (3.5) для расчета плотности, скорости и температуры в сферически симметричном истечении, начиная со звуковой линии. Система законов сохранения массы, импульса и энергии для сферически симметричного течения газа записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \rho u r^2 &= J \\ \frac{\partial}{\partial r}(\rho u^2 + p + p_{rr}) + \frac{2\rho u^2 + 3p_{rr}}{r} &= 0 \\ \left(q_r + p_{rr}u + \frac{5}{2}\rho u + \frac{\rho u^3}{2} \right) r^2 &= E \end{aligned} \quad (3.7)$$

где J, E – постоянные, определяющие потоки массы и энергии.

Очевидно, что эта система не замкнута, для замыкания нужно добавить еще два соотношения. На больших расстояниях от источника, где столкновения редки, поток тепла убывает обратно пропорционально не менее чем второй степени радиуса. Если число Kn на источнике достаточно мало, то поток тепла тоже мал по сравнению с другими членами в уравнении сохранения энергии во всем поле течения. В этом случае потоком тепла можно в первом приближении пренебречь и положить $q_r = 0$. В качестве второго замыкающего соотношения возьмем соотношение (3.5), полученное из гиперзвукового приближения.

В результате численного решения этой системы получена зависимость $p_{rr} = p_{rr}^N P(p_{rr}^N / p)$ вне особой точки $p_{rr}^N = 0$ с погрешностью, не большей погрешности расчетов методом Монте-Карло. Эта зависимость совпала с предельной кривой, полученной на основе расчетов истинных полей течения методом прямого статистического моделирования (фиг. 7, точки). Таким образом, развитое в [5, 6] гиперзвуковое приближение позволяет устанавливать соотношение (2.3) для напряжения, но не дает никакой информации о тепловом потоке.

Результаты расчетов температуры по той же системе уравнений при $Kn_1 = 0.01$ показаны на фиг. 1 точками. Наблюдается хорошее соответствие с расчетами методом прямого статистического моделирования. Этот факт подтверждает справедливость гиперзвукового приближения.

4. Макроскопическая модель течения от газодинамического источника. Законы сохранения (3.7) вместе с предельными кривыми (2.3) – (2.5) являются макроскопической моделью течения от газодинамического источника, то есть источника с бесконечно малым числом Kn на нем. Использование этой модели для расчета сферического течения газа при малом, но конечном числе Kn ($Kn_1 = 0.1$) приводит

к малому отличию решения этой модели от решения уравнения Больцмана методом Монте-Карло. Это отличие менее 5% даже для столь чувствительной величины, как предельное значение температуры. Таким образом, существует возможность макроскопического описания неравновесного истечения газа в вакуум из газодинамического сферического источника, начиная от звуковой линии, при использовании макроскопических зависимостей (2.3), позволяющих замкнуть систему законов сохранения массы, импульса и энергии (3.7).

Заключение. С помощью численного метода прямого статистического моделирования исследованы процессы переноса при неравновесном истечении газа в вакуум. Определены количественные зависимости макроскопических параметров (плотности, скорости, температуры, напряжения, теплового потока) от расстояния до источника. Установлены связи между истинными напряжениями p_{rr} и ньютоновскими p_{rr}^N , а также тепловым потоком q_r и потоком тепла по Фурье q_r^F в зависимости от значений числа Кн на источнике. Подтверждена справедливость гиперзвукового приближения для p_{rr} . Установлена возможность описания неравновесного истечения газа в вакуум из сферического газодинамического источника методами механики сплошной среды при числе Кн $\rightarrow 0$ на источнике.

Автор благодарит В.И. Власова, С.Л. Горелова, В.Н. Гусева, А.И. Ерофеева и С.В. Русакова за ценные советы и замечания при создании численного алгоритма и изучении аналитических моделей истечения разреженного газа из сферического источника в вакуум. Особую признательность автор выражает О.Г. Фридлиндеру за неоценимую помощь при проведении исследования и подготовке статьи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 99-01-00154, 01-01-06088) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (№ 00-15-96069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gusev V.N., Zhabkova A.V. The flow of a viscous heat-conducting compressible fluid into a constant pressure medium. // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 6th Intern. Symp. / Ed. L. Trilling and H.Y. Wachman. N.Y.; L.: Acad. press, 1969. V. 1. P. 847–862.
2. Шахов Е.М. Установившееся течение разреженного газа от сферического источника или стока. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 2. С. 58–66.
3. Bird G.A. Breakdown of translational and rotational equilibrium in gaseous expansion // AIAA Journal. 1970. V. 8. № 11. P. 1998–2003.
4. Chatwani A.U., Fiebig M. Spherical source expansion of diatomic gas // Phys. Fluids. 1980. V. 23. № 3. P. 646–647.
5. Hamel B.B., Willis D.R. Kinetic theory of source flow expansion with application to the free jet // Phys. Fluids. 1966. V. 9. № 5. P. 829–841.
6. Edwards R.H., Cheng H.K. Steady expansion of a gas into a vacuum // AIAA Journal. 1966. V. 4. № 2. P. 558–561.
7. Берд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981. 319 с.

Москва
E-mail:vinigus@tsagi.rssi.ru

Поступила в редакцию
16.VIII.2001