МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2002

УДК 532.527.031

 А.Г. ЯРМИЦКИЙ

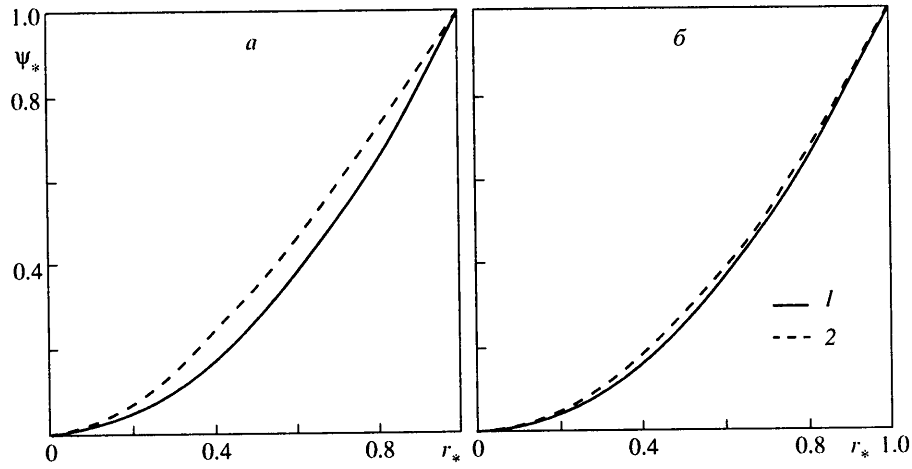
ИСТЕЧЕНИЕ ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ КРУГОВОЕ ОТВЕРСТИЕ В ДНЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА (МОДИФИКАЦИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СЛЁЗКИНА)

Исследовано установившееся осесимметричное винтовое течение несжимаемой идеальной жидкости в полубесконечном цилиндре, обусловленное наличием в его дне круглого отверстия. В отличие от аналогичной задачи Н.А. Слезкина на бесконечном удалении от дна поддерживаются постоянными осевая и угловая компоненты скорости квазитвердого вращения, а течение, индуцированное отверстием, однородно-винтовое по Жуковскому (вектор-вихрь абсолютного движения коллинеарен относительной скорости). Во вращающейся вместе с жидкостью системе координат это течение представлено в виде суперпозиции прямолинейно-поступательного потока в направлении дна и однородно-винтового течения Громеки – Бельтрами. Для решения задачи использовано понятие обобщенной функции тока. В качестве предельных случаев рассмотрены винтовой сток в дне полубесконечного цилиндра и винтовое истечение жидкости из полупространства через круговое отверстие на границе. Проведено сравнение с потенциальным течением.

Задача об истечении идеальной несжимаемой жидкости через круговое отверстие в дне полубесконечного цилиндра, порождающем однородно-винтовое движение Громеки – Бельтрами внутри этого цилиндра, рассмотрена в [1]. Сравнивая полученный результат с аналогичным при потенциальном истечении с тем же расходом, отметим их существенное различие: если при потенциальном истечении жидкости осевая скорость на бесконечном удалении от дна постоянна, то при течении Громеки – Бельтрами она зависит от расстояния точки до оси симметрии полуцилиндра и даже меняет знак [1]. Чтобы избежать этой перемены знаков, приходится вводить дополнительное ограничение на параметр, характеризующий напряженность винтового течения [2].

В отличие от [1] здесь предполагается, что без отверстия жидкость в цилиндре вращается равномерно, как твердое тело, а течение, обусловленное отверстием, однородно-винтовое по Жуковскому (вихревые линии абсолютного движения жидкости совпадают с линиями тока относительного движения). При таком допущении параметр, определяющий напряженность винтового течения, получает вполне конкретное физическое толкование: он пропорционален удвоенной угловой скорости вращения жидкости на бесконечности, квадрату радиуса цилиндра и обратно пропорционален объемному расходу. Результаты решения задачи также оказываются различными: распределение осевых скоростей на бесконечном удалении от дна, как и в случае потенциального истечения, однородное. Поэтому отпадает необходимость в дополнительном ограничении на значение напряженности [1].

В качестве предельных случаев рассматриваются винтовой сток в центре дна цилиндра, винтовое истечение жидкости из полупространства через круглое отверстие на его границе, а также винтовой источник (сток) в верхнем полупространстве.



Доля расхода различных трубок тока в подпитке стока на дне кругового полубесконечного цилиндра через сечения $z_* = 1$ (*а*) и 2 (*б*): *1*, *2* – при потенциальном и винтовом истечениях жидкости

Найденные распределения скоростей дают возможность по известным значениям скорости и давлении на бесконечности с помощью интеграла Бернулли определять давление в любой точке течения.

1. Постановка задачи, основные уравнения и краевые условия. В дне полубесконечного кругового цилиндра имеется отверстие радиуса a, центр которого совпадает с центром основания цилиндра радиуса b. В отсутствие отверстия несжимаемая идеальная жидкость равномерно вращается, как твердое тело, с угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = \text{const}$.

Начало O цилиндрической системы координат r, φ, z, вращающейся вместе с жидкостью, выберем в центре отверстия; ось z направим внутрь цилиндра вдоль его оси симметрии.

Течение, индуцируемое отверстием, однородно-винтовое по Жуковскому, т.е.

$$\text{rot}\, \mathbf{V} + 2\mathbf{\Omega} = k\mathbf{V} \qquad (k = \text{const})$$

где $\mathbf{V}$ – относительная скорость.

Полагая

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{W} \tag{1.1}$$

и идентифицируя $2k^{-1}\mathbf{\Omega}$ с $\mathbf{W}$, получаем

$$\text{rot}\, \mathbf{v} = k\mathbf{v} \qquad (k = -2\Omega W^{-1})$$

т.е. относительно вращающейся системы координат течение жидкости представляет собой суперпозицию двух течений: прямолинейно-поступательного со скоростью $\mathbf{W} = \text{const}$ в направлении дна и однородно-винтового течения Громеки – Бельтрами со скоростью $\mathbf{v}$.

Обобщенная функция тока Ψ [3, 4] удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)\Psi = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.2}$$

где Δ – лапласиан, а компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$ выражаются через Ψ по формулам

$$v_r = k^{-1}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z} + \frac{\partial\Psi}{r\partial\varphi}, \quad v_\varphi = k^{-1}\frac{\partial^2\Psi}{r\partial\varphi\partial z} - \frac{\partial\Psi}{\partial r} \tag{1.3}$$

$$v_z = k^{-1}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + k^2\Psi\right)$$

Полагая возмущающее влияние отверстия с удалением от дна исчезающе малым, будем искать частное решение (1.2) в виде

$$\Psi = \Phi(r, \varphi)e^{-\eta z} \quad (\eta > 0) \tag{1.4}$$

В этом случае имеем

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \eta^2\Psi$$

и уравнение (1.2) сводится к двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta_{r,\varphi}\Psi + m^2\Psi = 0 \quad (m^2 = k^2 + \eta^2) \tag{1.5}$$

а выражения (1.2) и (1.3), соответствующие частному решению (1.4), принимают вид

$$\Delta_{r,\varphi}v_z + m^2 v_z = 0 \tag{1.6}$$

$$v_r = m^{-2}\left(k\frac{\partial v_z}{r\partial\varphi} - \eta\frac{\partial v_z}{\partial r}\right), \quad v_\varphi = -m^{-2}\left(\eta\frac{\partial v_z}{r\partial\varphi} + k\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \tag{1.7}$$

$$\Psi = m^{-2}kv_z$$

В рассматриваемой задаче естественно считать течение осесимметричным. В этом случае выражения (1.6) и (1.7) упрощаются

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial v_z}{r\partial r} + m^2 v_z = 0 \tag{1.8}$$

$$v_r = -m^{-2}\eta\frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad v_\varphi = -m^{-2}k\frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad \Psi = m^{-2}kv_z \tag{1.9}$$

Сформулируем краевые условия

$$v_r(b, z) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial v_z}{\partial r}(b, z) = 0 \tag{1.10}$$

$$v_z(0, z) < \infty \tag{1.11}$$

$$v_z(r, 0) = \begin{cases} W - W_0(r), & 0 < r < a \\ W, & a < r < b \end{cases} \tag{1.12}$$

$$v_z(r, \infty) = 0 \tag{1.13}$$

где $W_0(r)$ – скорость истечения.

Последнее условие в силу (1.4) выполняется автоматически.

Таким образом, задача сводится к нахождению частного решения (1.8), удовлетворяющего краевым условиям (1.10)–(1.13).

Как и при винтовом течении Громеки – Бельтрами, интеграл Бернулли

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}(v_r^2+v_\varphi^2+(v_z-W)^2)=C, \quad C=\mathrm{const} \tag{1.14}$$

(p – модифицированное давление [5], ρ – плотность) имеет место во всей области течения [3].

Зная скорость $W = Q/(\pi b^2)$ и модифицированное давление p_∞ на бесконечном удалении от отверстия ($z \to \infty$), найдем значение $C = p_\infty/\rho + \frac{1}{2}W^2$. Тогда выражение (1.14) позволит определить давление в любой точке области, ограниченной цилиндром.

2. Метод решения. Распределение скоростей. Частные случаи. Решение (1.8), удовлетворяющее условиям (1.10)–(1.13), ищем в виде

$$v_z(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(m_n r)\exp(-\eta_n z) \tag{2.1}$$

где $m_n = j_{1,n}/b$, $\eta_n = \sqrt{m_n^2 - k^2}$, $j_{1,n}$ – положительные нули бесселевой функции $J_1(x)$ и C_n – коэффициенты, подлежащие определению из условия (1.12).

На дне цилиндра ($z = 0$) получаем ряд Дини – Бесселя

$$v_z(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(j_{1,n} r_*), \quad r_*=\frac{r}{b}$$

коэффициенты которого определяются по известным формулам [6, 7]

$$C_n=\frac{2}{J_0^2(j_{1,n})}\int_0^1 v_z(r_*,0)J_0(j_{1,n}r_*)r_*dr_*$$

С учетом (1.12)

$$C_n=\frac{2}{J_0^2(j_{1,n})}\left[\int_0^\chi (W-W_0(r_*))J_0(j_{1,n}r_*)r_*dr_*+W\int_\chi^1 J_0(j_{1,n}r_*)r_*dr_*\right]=$$

$$=-\frac{2}{J_0^2(j_{1,n})}\int_0^\chi W_0(r_*)J_0(j_{1,n}r_*)r_*dr_* \quad \left(\chi=\frac{a}{b}\right)$$

так как

$$\int_0^1 J_0(j_{1,n}r_*)r_*dr_*=0$$

В частном случае $W_0(r_*) = W_0 = \mathrm{const}$

$$C_n=-\frac{2W_0}{j_{1,n}J_0^2(j_{1,n})}\chi J_1(\chi j_{1,n})$$

В силу (1.1) и (2.1)

$$V_{*z}=-W_*-2\chi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\chi j_{1,n})}{j_{1,n}J_0^2(j_{1,n})}J_0(j_{1,n}r_*)\exp(-\lambda_n z_*)$$

$$z_*=\frac{z}{b}, \quad k_*=kb, \quad W_*=\frac{W}{W_0}, \quad \lambda_n=\sqrt{j_{1,n}^2-k_*^2}$$

Остальные компоненты вектора скорости найдем согласно (1.9)

$$V_{*r} = -2\chi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\chi j_{1,n})}{j_{1,n}^2 J_0^2(j_{1,n})} J_1(j_{1,n} r_*) \lambda_n \exp(-\lambda_n z_*)$$

$$V_{*\varphi} = -2\chi k_* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\chi j_{1,n})}{j_{1,n}^2 J_0^2(j_{1,n})} J_1(j_{1,n} r_*) \exp(-\lambda_n z_*)$$

Все компоненты скорости отнесены к скорости истечения W_0 $(0 \leqslant r_* \leqslant 1,$ $0 \leqslant z_* < \infty)$. Так как $j_{1,n}^2 - k_*^2 > 0$, то на k_* должно быть наложено ограничение $k_* < j_{1,1} \approx 3.8317$.

Выразим скорости W и W_0 через объемный расход Q

$$-W = \frac{Q}{\pi b^2}; \quad -W_0 = \frac{Q}{\pi a^2}$$

и найдем обезразмеренную функцию тока ψ_*, отнесенную к величине $\psi_0 = Q/(2\pi)$ $(Q < 0)$

$$\psi_* = r_*^2 - 2\chi^{-2} k_*^{-1} r_* V_{*\varphi} = r_*^2 + 4\chi^{-1} r_* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\chi j_{1,n})}{j_{1,n}^2 J_0^2(j_{1,n})} J_1(j_{1,n} r_*) \exp(-\lambda_n z_*) \tag{2.2}$$

$k = 2\Omega\pi b^2/Q$

В предельном случае $a \to 0$ $(\chi \to 0)$ получаем безразмерную функцию тока винтового стока, симметричного относительно оси полубесконечного цилиндра

$$\psi_* = r_*^2 + r_* \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_*) \exp(-\lambda_n z_*), \quad c_n(r_*) = 2\frac{J_1(j_{1,n} r_*)}{j_{1,n} J_0^2(j_{1,n})} \tag{2.3}$$

На оси симметрии $\psi_*(0, z_*) = 0$, на боковой поверхности цилиндра $\psi_*(1, z_*) = 1$ и на дне

$$\psi_*(r_*, 0) = r_* \left(r_* + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_*) \right)$$

Поскольку [7]

$$r_* = -\sum_{n=1}^{\infty} J_0(j_{1,n}) c_n(r_*), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - J_0(j_{1,n})) c_n(r_*) = r_*^{-1}$$

то $\psi_*(r_*, 0) = 1$.

Как частный случай, при $k_* = 0$, а следовательно, и $\Omega = 0$, $\lambda_n = j_{1,n}$, из (2.2) получаем функцию тока потенциального истечения жидкости через круглое отверстие в дне полубесконечного цилиндра

$$\psi_* = r_*^2 + 2\chi^{-1} r_* \sum_{n=1}^{\infty} j_{1,n}^{-1} c_n(\chi) J_1(j_{1,n} r_*) \exp(-j_{1,n} z_*)$$

Обезразмеренные компоненты скорости

$$V_{*r} = \frac{1}{2}\chi^2 \frac{\partial \psi_*}{r_* \partial z_*}; \quad V_{*\varphi} = -\frac{1}{2}\chi^2 \frac{k_*(\psi_* - r_*^2)}{r_*}; \quad V_{*z} = -\frac{1}{2}\chi^2 \frac{\partial \psi_*}{r_* \partial r_*}$$

принимают в этом случае вид

$$V_{*r}=-\chi\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\chi)J_1(j_{1,n}r_*)\exp(-j_{1,n}z_*);\quad V_{*\varphi}=0$$

$$V_{*z}=-\chi^2-\chi\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\chi)J_0(j_{1,n}r_*)\exp(-j_{1,n}z_*)$$

что полностью соответствует результатам [1], записанным в безразмерной форме.

Полагая $k_*=0$ в (2.3), найдем выражение для функции тока потенциального осесимметричного стока в полубесконечном цилиндре

$$\psi_*=r_*^2+r_*\sum_{n=1}^{\infty}c_n(r_*)\exp(-j_{1,n}z_*)$$

Как видно из графиков на фигуре (при расчетах принималось $k_*=0.6j_{1,1}$ и 0), различие между безразмерными значениями функции тока при винтовом (по Жуковскому) и потенциальном истечении жидкости практически стирается уже на расстоянии диаметра от дна. Вблизи же дна это различие существенно: трубки тока с одинаковым расходом (за исключением ограниченной цилиндрической поверхностью) в закрученном потоке тоньше, чем в потенциальном. При одной и той же площади поперечного сечения трубки тока (не совпадающей с боковой поверхностью цилиндра) расход через него больше в закрученном потоке. Поэтому если при открытом донном отверстии желательно сбрасывать больше жидкости из приосевой зоны цилиндра, то предпочтительней сильнее закручивать поток.

Для того чтобы совершить предельный переход $\chi\to 0$ при конечном a и $b\to\infty$, перепишем (2.2) в виде

$$\psi=\psi_0\left[\left(\frac{r}{b}\right)^2+4\frac{r}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_n^{-1}J_1(m_na)}{j_{1,n}J_1^2(j_{1,n})b}J_1(m_nr)\exp(-\eta_nz)\right]$$

Неограниченно увеличивая b и полагая $2[j_{1,n}J_0^2(j_{1,n})b]^{-1}=dm$, получим функцию тока в случае истечения жидкости через круглое отверстие в безграничной плоскости

$$\psi=\frac{2\psi_0}{a}r\int_k^{\infty}m^{-1}J_1(ma)J_1(mr)\exp(-\sqrt{m^2-k^2}z)dm$$

при этом параметр k произволен.

Совершая теперь предельный переход по параметру $a\to 0$, найдем функцию тока винтового осесимметричного стока в верхнем полупространстве ($z\geqslant 0$)

$$\psi=\psi_0r\int_k^{\infty}\exp(-\sqrt{m^2-k^2}z)J_1(mr)dm\qquad(2.4)$$

Если потребовать, чтобы течение от винтового источника (стока) при $z\to\infty$ оставалось не просто ограниченным, как это предполагалось в [2], а исчезало, как в случае потенциального источника (стока), то выражение (2.4) будет совпадать с соответствующим выражением для функции тока в [2].

И наконец, полагая в (2.4) $k=0$, получаем известное выражение для функции тока потенциального осесимметричного источника ($Q>0$) или стока ($Q<0$) [2]

$$\psi=\frac{Q}{2\pi}r\int_0^{\infty}\exp(-mz)J_1(mr)dm=\frac{Q}{2\pi}\left(1-\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)\quad(z\geqslant 0)$$

Заключение. Найдены распределения скоростей, а также выражение для функции тока осесимметричного винтового (по Жуковскому) течения в полубесконечном круговом цилиндре при наличии круглого отверстия в дне. Закрутка потока оказывает существенное влияние на характер течения в цилиндре. В рассматриваемой постановке отпадет необходимость в дополнительном ограничении, накладываемом на параметр напряженности винтового течения: $k_* = 2.405$ [1]. Последний удается также выразить через физические и геометрические параметры: угловую скорость вращения жидкости вдали от дна, расход и радиус цилиндра. Получены предельные случаи: винтовой сток в центре основания цилиндра и винтовое течение жидкости в верхнем полупространстве при наличии на его границе кругового отверстия или осесимметричного винтового источника (стока). Проведено сравнение с потенциальным истечением. Показано, что доля расхода в подпитке стока от различных трубок тока (за исключением поверхности самого цилиндра) в закрученном потоке выше, чем в потенциальном. Поэтому если желательно сливать больше жидкости из приосевой зоны, то поток целесообразно сильнее закручивать.

Работа частично поддержана грантом № APU 051115 Международной Соросовской программы поддержки образования в области точных наук.

Автор признателен рецензенту за указание на более четкую формулировку постановки задачи и научному редактору В.А. Алексину за кропотливое редактирование рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Слёзкин Н.А.* Истечение идеальной несжимаемой жидкости через круглое отверстие в дне полубесконечного цилиндра при винтовом движении частиц // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1986. № 4. С. 59–64.
2. *Васильев О.Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958. 144 с.
3. *Ярмицкий А.Г.* Спиральные волны в трехмерных винтовых течениях вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 5. С. 25–29.
4. *Ярмицкий А.Г.* Обобщение классических задач гидромеханики вихревых течений. Мариуполь: Изд. Приазов. техн. ун-та, 1997. 102 с.
5. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
6. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 767 с.
7. *Толстов Г.П.* Ряды Фурье. М.: Наука, 1980. 381 с.

Мариуполь

Поступила в редакцию
24.V.2001