

УДК 532.527

© 2002 г. Б.В. ПАЛЬЦЕВ, Ю.Д. ШМЫГЛЕВСКИЙ

## О ПОДХОДЕ РАЗДЕЛЯЮЩИХ ЛИНИЙ ТОКА К ОБТЕКАЕМОМУ КОНТУРУ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Установлено существование аналитических решений уравнения Навье – Стокса, показывающих, что разделяющие линии тока в плоскопараллельном стационарном потоке вязкой несжимаемой жидкости могут подходить к обтекаемому контуру под любым углом, включая подход по нормали и по касательной. Выяснено также, что в одной точке обтекаемого контура могут пересекаться несколько разделяющих линий тока и их углы подхода к контуру также могут быть достаточно произвольными.

Ответ на вопрос о направлении подхода разделяющей линии тока к обтекаемому контуру лежит вне возможностей численного решения задач. В то же время расчеты течений вязкой жидкости создают представление о различных возможностях. Так, например, на рисунках работы [1] разделяющие линии тока подходят к контуру жесткой стенки либо по касательной, либо под малым углом. Интегрирование уравнений Навье – Стокса в [1] проведено на сетках, адаптированных к модулю градиента искомой функции, и выполнено с точностью, обеспечивающей правильность рисунков. В статье [2] по той же разностной схеме, что и в [1], получен подход разделяющих линий тока к стенке под конечным углом, отличным от нулевого. Неясность с точным значением такого угла всегда вызывает у авторов расчетов сомнения при вычерчивании иллюстраций.

Работа [3] посвящена аналитическому исследованию различных схем течений в окрестности точки прихода изолированной линии тока на обтекаемую поверхность в трехмерном случае. Приход поверхностей тока на стенку в [3] не рассматривается. Настоящая статья посвящена восполнению этого пробела в случае плоскопараллельных течений.

**1. Приближение Стокса.** В малой окрестности точки прихода линии тока на обтекаемый контур скорости малы, и приближение Стокса может быть отправным пунктом исследования. После построения необходимых примеров будет проведен переход к полному уравнению Навье – Стокса

$$\Delta\Delta\psi = D_y\psi D_x\Delta\psi - D_x\psi D_y\Delta\psi, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.1)$$

где  $\psi$  – функция тока,  $x, y$  – декартовы координаты,  $\Delta$  – оператор Лапласа. Число Рейнольдса здесь внесено множителем в функцию  $\psi$ .

В стоксовом приближении функция  $\psi$  подчиняется бигармоническому уравнению

$$\Delta\Delta\psi = 0 \quad (1.2)$$

Будем рассматривать течения при  $x > 0$  у прямолинейной стенки  $x = 0$  с условиями прилипания на ней:

$$\psi = D_x\psi = 0 \quad (1.3)$$

Какие-либо условия на контуре, окружающем начало координат, или на бесконечности рассматриваться не будут, поскольку цель работы – исследование типа течений в окрестности точки прихода линии тока на стенку. Решение этой задачи в полярных координатах  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\vartheta = \arctg(y/x)$  представим в виде, см. [4]

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} r^{m+1} \left\{ A_m \left[ \frac{m - (-1)^m}{m+1} \cos(m+1)\vartheta + \cos(m-1)\vartheta \right] + B_m \left[ \frac{m + (-1)^m}{m+1} \sin(m+1)\vartheta + \sin(m-1)\vartheta \right] \right\} \quad (1.4)$$

где  $A_m$  и  $B_m$  – произвольные постоянные. Каждое слагаемое этой суммы удовлетворяет уравнению (1.2) и условиям прилипания (1.3) при  $\vartheta = \pm \pi/2$ .

Слагаемые в сумме (1.4) получены методом разделения переменных при отыскании решения в виде  $\psi = r^\mu \Phi(\vartheta)$ . Для  $\Phi(\vartheta)$  возникает спектральная задача определения  $\Phi(\vartheta) \neq 0$ , являющегося решением краевой задачи

$$\left( \frac{d^2}{d\vartheta^2} + \mu^2 I \right) \left( \frac{d^2}{d\vartheta^2} + (\mu - 2)^2 I \right) \Phi(\vartheta) = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

$$\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \Phi'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Для общего случая произвольных углов, образуемых стенками, собственные значения и собственные функции такой задачи, а также вопросы разложения по собственным функциям изучались, например, в [5].

В декартовых координатах разложение (1.4) имеет вид

$$\psi = a_1 x^2 + a_2 x^3 + b_2 x^2 y + a_3 (x^4 - 3x^2 y^2) + b_3 x^3 y + a_4 (x^5 - 5x^3 y^2) + b_4 (x^4 y - x^2 y^3) + \dots \quad (1.5)$$

где  $a_m$  и  $b_m$  – произвольные постоянные.

Далее рассмотрим некоторые решения, извлеченные из этой суммы. Стоксово приближение обозначается через  $\psi^0$ .

Течения, в которых только одна линия тока имеет точку на обтекаемом контуре  $x = 0$ , определяются, например, функциями тока

$$\psi_1^0 = -x^2 y, \quad \psi_2^0 = x^2 (1.28x - y), \quad \psi_3^0 = x^2 (2x + x^2 y - y^3) \quad (1.6)$$

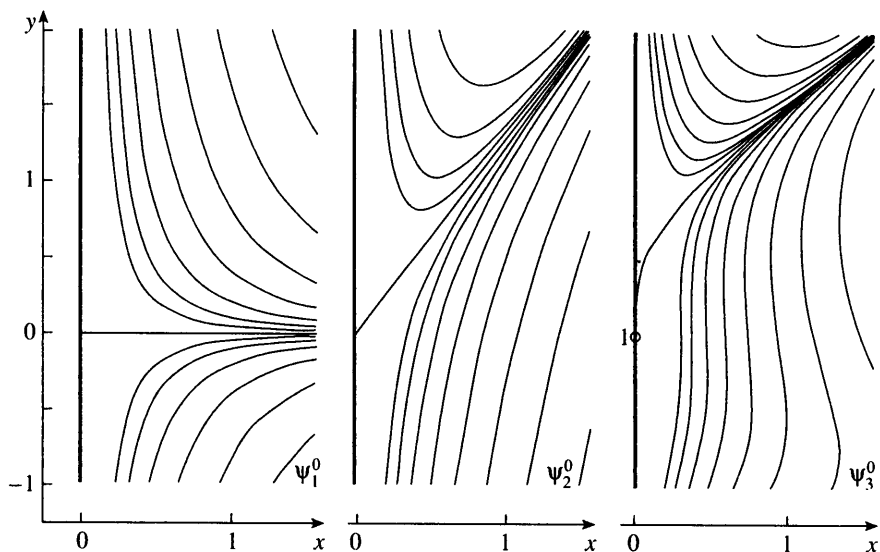
Картины линий тока изображены на фиг. 1. В первом случае разделяющая линия тока нормальна к  $x = 0$ . В течении с функцией тока  $\psi_2^0$  разделяющая линия тока  $x = y/1.28$  подходит к границе  $x = 0$  под углом, отличным от 0 и  $\pi$ . Для стоксова течения с функцией тока  $\psi_3^0$  единственная разделяющая линия тока  $\psi^0 = 0$ , расположенная в полуплоскости  $x > 0$ , является графиком функции

$$x = y^3 (1 + \sqrt{1 + y^4})^{-1}$$

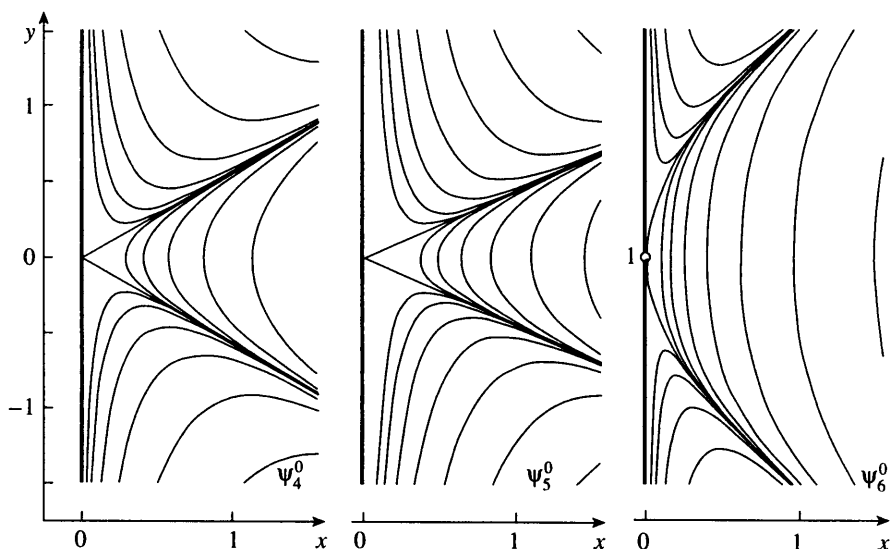
а потому имеет в начале координат касание с границей  $x = 0$ .

Течения, в которых по две разделяющие линии тока  $\psi^0 = 0$  пересекаются в точке на контуре  $x = 0$ , описываются, например, функциями тока

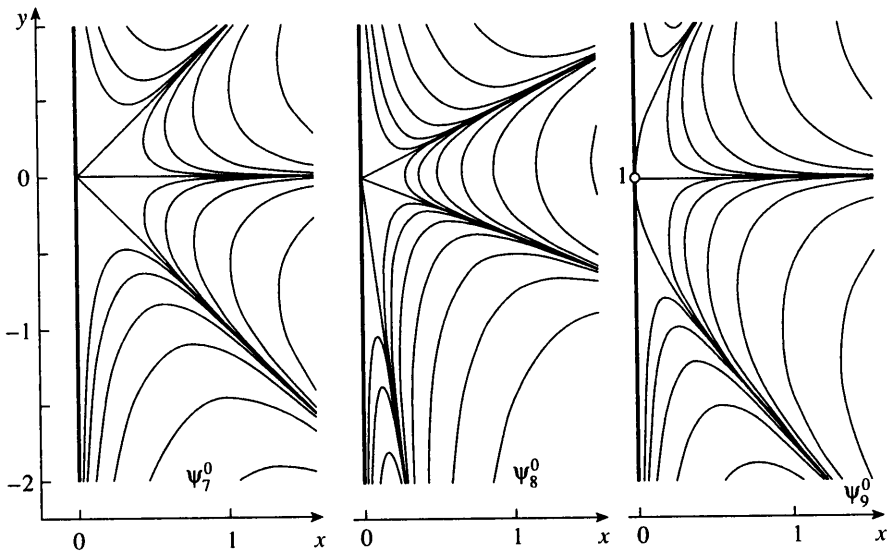
$$\psi_4^0 = x^2 (x^2 - 3y^2), \quad \psi_5^0 = x^3 (x^2 - 5y^2), \quad \psi_6^0 = x^2 (6x + x^2 - 3y^2) \quad (1.7)$$



Фиг. 1. Картины линий тока  $\psi_l^0 = C$ ,  $l = 1, 2, 3$  (формулы (1.6)) – случаи, когда только одна из линий тока ( $\psi_l^0 = 0$ ) имеет общую точку с обтекаемым контуром  $x = 0$ ,  $l$  – точка касания,  $C \in \{0, \pm 0.1 \cdot 2^k, k = -2, -1, \dots, 6\}$



Фиг. 2. Картины линий тока  $\psi_l^0 = C$ ,  $l = 4, 5, 6$  (формулы (1.7)) – случаи, когда по две линии тока ( $\psi_l^0 = 0$ ) пересекаются на контуре  $x = 0$ ,  $l$  – точка касания,  $C \in \{0, \pm 0.1 \cdot 4^k, k = -2, -1, \dots, 4\}$



Фиг. 3. Картины линий тока  $\psi_l^0 = C$ ,  $l = 7, 8, 9$  (формулы (1.8)) – случаи, когда по три линии тока ( $\psi_l^0 = 0$ ) пересекаются на контуре  $x = 0$ ,  $l$  – точка касания,  $C \in \{0, \pm 0.1 \cdot 4^k, k = -2, -1, \dots, 4\}$

Функции тока  $\psi_4^0$  и  $\psi_5^0$  определяют одинаковые схемы течений (фиг. 2). При этом в случае  $\psi_4^0$  две разделяющие линии тока образуют между собой и стенкой равные углы. Для функции  $\psi_6^0$  две разделяющие линии тока  $\psi^0 = 0$  являются частями

$$x = 3y^2(3 + \sqrt{9 + 3y^2})^{-1}, \pm y > 0$$

ветви гиперболы, которая касается контура  $x = 0$  при  $y = 0$ .

Течения, в которых по три линии тока  $\psi^0 = 0$  пересекаются в общей точке на контуре обтекаемой стенки, представим функциями, также извлеченными из суммы (1.5),

$$\psi_7^0 = x^2 y(x^2 - y^2), \quad \psi_8^0 = x^2(3x^3 + 2x^2 y - 15xy^2 - 2y^3)$$

$$\psi_9^0 = x^2 y(2x + x^2 - y^2) \quad (1.8)$$

Функции  $\psi_7^0$  и  $\psi_8^0$  определяют одинаковые схемы течений (фиг. 3) с прямыми разделяющими линиями тока. Углы между ними и контуром стенки в случае  $\psi_7^0$  одинаковы, а в случае  $\psi_8^0$  различны. Функция тока  $\psi_9^0$  определяет течение с прямой разделяющей линией тока  $y = 0$  и двумя гиперболическими, которые касаются контура  $x = 0$  при  $y = 0$ . Картины линий тока, аналогичные последней, могут возникать в меридиональной плоскости около экватора в сферическом течении Куэтта при определенных режимах вращения граничных сфер [6].

Во всех случаях (1.6)–(1.8) вектор скорости на верхней разделяющей линии тока направлен к началу координат. Приведенные в этих формулах функции удовлетворяют однородному уравнению (1.2) и однородным граничным условиям (1.3), поэтому изменение знака перед правыми частями равенств (1.6)–(1.8) меняет направление течения на противоположное.

Приведенные решения показывают, что в приближении Стокса разделяющие линии тока могут подходить к обтекаемому контуру под любым углом. При этом разделяющих линий тока, входящих в одну точку границы, может быть несколько.

**2. Течения, описываемые полным уравнением Навье – Стокса.** В этом разделе будет установлено существование решений уравнения Навье – Стокса (1.1), для которых в малой окрестности начала координат картины линий тока практически не отличаются от определяемых стоксовыми решениями (1.6)–(1.8).

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.1) с данными на контуре  $x = 0$ , совпадающими с данными Коши для полученных стоксовых решений:

$$D_x^k \psi|_{x=0} = 0, \quad k = 0, 1 \quad \text{и} \quad D_x^k \psi|_{x=0} = D_x^k \psi^0|_{x=0}, \quad k = 2, 3 \quad (2.1)$$

где  $\psi^0$  – любая из функций (1.6)–(1.8). Поскольку  $D_x^k \psi^0|_{x=0}$  являются многочленами переменной  $y$ , в силу теоремы Ковалевской (см., например, [7]) существует такая окрестность  $V$  (зависящая от данных (2.1) в каждом из случаев) точки  $(0, 0)$ , в которой существует аналитическое решение  $\psi = \psi(x, y)$  задачи Коши (1.1), (2.1) и это решение единственно в классе аналитических решений.

Искомое решение представим в виде суммы

$$\psi = \psi^0 + \varphi \quad (2.2)$$

где  $\psi^0$  – соответствующее стоксово приближение. Покажем, что в рассмотренных случаях добавок  $\varphi = \varphi(x, y)$  имеет при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  более высокий порядок малости, чем  $\psi^0(x, y)$ . Для точной формулировки соответствующего утверждения удобно использовать следующее понятие.

Пусть  $\psi(x, y)$  – аналитическая функция переменных  $x$  и  $y$  в некоторой окрестности точки  $(0, 0)$ . Через  $\text{ldeg } \psi$  будем обозначать наименьшую степень ненулевых одночленов (от  $x$  и  $y$ ), входящих в тейлоровское разложение функции  $\psi(x, y)$  в точке  $(0, 0)$ . Точно так же определяется  $\text{ldeg } f(y)$  функции  $f(y)$  одной переменной  $y$ , аналитической в окрестности точки  $y = 0$ .

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \text{ldeg}(u + v) &\geq \min(\text{ldeg } u + \text{ldeg } v) \\ \text{ldeg}(uv) &\geq \text{ldeg } u + \text{ldeg } v \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\text{ldeg } D_x u, \text{ldeg } D_y u \geq \text{ldeg } u - 1$$

Имеет место следующее утверждение.

*Лемма 1.* Если у стоксова решения  $\text{ldeg } \psi^0 = m \geq 2$ , то у добавка  $\varphi(x, y)$  к  $\psi^0$  в аналитическом решении задачи Коши (2.1) для уравнения Навье – Стокса (1.1)  $\text{ldeg } \varphi \geq 2m$ .

*Доказательство.* Функция  $\varphi$  является аналитическим решением следующей задачи Коши:

$$\Delta \Delta \varphi = J(\Delta \psi^0, \psi^0) + J(\Delta \psi^0, \varphi) + J(\Delta \varphi, \psi^0) + J(\Delta \varphi, \varphi) \quad (2.4)$$

$$(x, y) \in V, \quad J(f, g) = f_x g_y - f_y g_x$$

$$D_x^k \varphi|_{x=0} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

Якобиан  $J(\Delta \psi^0, \psi^0)$  является известной аналитической функцией, и

$$\text{ldeg } J(\Delta \psi^0, \psi^0) \geq 2m - 4 \quad (2.6)$$

Решение задачи (2.4), (2.5) в окрестности точки  $(0, 0)$  представимо рядом Тейлора

$$\varphi = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} D_x^n \varphi|_{x=0} x^n \quad (2.7)$$

Производные  $D_x^n \varphi|_{x=0}$  при  $n \geq 4$  находятся из  $(n - 4)$  раза продифференцированного уравнения (2.4), вычисленного на сегменте  $\sigma = V \cap \{x = 0\}$  прямой  $x = 0$ :

$$D_x^{n-2} \omega|_{x=0} = -D_y^2(D_x^{n-4} \omega|_{x=0}) + L_n(\Delta \Psi^0, \Psi^0) + L_n(\Delta \Psi^0, \varphi) + L_n(\omega, \Psi^0) + L_n(\omega, \varphi) \quad (2.8)$$

$$D_x^n \varphi|_{x=0} = D_x^{n-2} \omega|_{x=0} - D_y^2(D_x^{n-2} \varphi|_{x=0}) \quad (2.9)$$

$$L_n(f, g) = \sum_{i=0}^{n-4} C_{n-4}^i J(D_x^i f, D_x^{n-4-i} g)|_{x=0}$$

$$\omega = \Delta \varphi, \quad C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

Случай  $n = 4$ . Поскольку  $(n - 4) = 0$ , в (2.8) в каждой сумме  $L_n$  имеется только по одному слагаемому. В силу граничных условий (2.5) третье, пятое слагаемые в правой части (2.8) и второе слагаемое в правой части (2.9) обращаются в нуль. Кроме того,

$$\omega|_{x=0} = D_x^1 \omega|_{x=0} = 0 \quad (2.10)$$

а потому обращаются в нуль первое и четвертое слагаемые. Тогда, используя (2.6), имеем

$$\text{ldeg}(D_x^2 \omega|_{x=0}) \geq 2m - 4$$

$$\text{ldeg}(D_x^4 \varphi|_{x=0}) \geq 2m - 4 \rightarrow \text{ldeg}\left(\frac{1}{4!} D_x^4 \varphi|_{x=0} x^4\right) \geq 2m \quad (2.11)$$

Дальше доказательство проводится по индукции. Предположим, что для некоторого  $(n - 1) \geq 4$  уже установлено, что неравенства

$$\text{ldeg}(D_x^{k-2} \omega|_{x=0}) \geq 2m - k, \quad \text{ldeg}(D_x^k \varphi|_{x=0}) \geq 2m - k \quad (2.12)$$

имеют место при всех  $k: 4 \leq k \leq (n - 1)$ . Покажем, что неравенства (2.12) остаются справедливыми и для  $k = n$ . Тогда по индукции неравенства (2.12) будут справедливы  $\forall k \geq 4$ , а потому аналогично (2.11)

$$\text{ldeg}\left(\frac{1}{n!} D_x^n \varphi|_{x=0} x^n\right) \geq 2m, \quad \forall n \geq 4 \quad (2.13)$$

откуда в силу представления (2.7) и будет следовать утверждение леммы 1.

Обратимся к (2.8). В силу гипотезы индукции при  $k = (n - 2) \leq (n - 1)$  имеем

$$\text{ldeg}(D_x^{n-4} \omega|_{x=0}) \geq 2m - n + 2 \rightarrow \text{ldeg}(D_y^2(D_x^{n-4} \omega|_{x=0})) \geq 2m - n$$

Далее, нетрудно видеть, что при  $0 \leq i \leq (n - 4)$

$$\text{ldeg} J(D_x^i \Delta \Psi^0, D_x^{n-4-i} \Psi^0)|_{x=0} \geq 2m - n \quad (2.14)$$

Установим, что при  $0 \leq i \leq (n - 4)$  и

$$\text{ldeg} J(D_x^i \omega, D_x^{n-4-i} \varphi)|_{x=0} \geq 4m - n > 2m - n \quad (2.15)$$

Действительно, в силу (2.10) и (2.5) можно считать, что первые неравенства (2.12) (для  $\omega$ ) выполняются для всех  $k: 2 \leq k \leq (n - 1)$ , а вторые неравенства (2.12) (для  $\varphi$ ) – для всех  $k: 0 \leq k \leq (n - 1)$ . Оценим минимальную степень каждого из множителей в выражении

$$J(D_x^i \omega, D_x^{n-4-i} \varphi)|_{x=0} = (D_x^{i+1} \omega|_{x=0}) D_y(D_x^{n-4-i} \varphi|_{x=0}) - D_y(D_x^i \omega|_{x=0})(D_x^{n-3-i} \varphi|_{x=0})$$

Поскольку  $(i + 1) \leq (n - 3)$ ,  $(n - 3 - i) \leq (n - 1)$ , можно воспользоваться неравенствами (2.12), которые дают, что

$$\text{ldeg}(D_x^{i+1}\omega|_{x=0}), \text{ldeg}(D_y(D_x^i\omega|_{x=0})) \geq 2m - i - 3$$

$$\text{ldeg}(D_y(D_x^{n-4-i}\varphi|_{x=0})), \text{ldeg}(D_x^{n-3-i}\varphi|_{x=0}) \geq 2m - n + 3 + i$$

С использованием свойств (2.3) это приводит к (2.15).

Минимальные степени каждого из слагаемых во второй и третьей суммах  $L_n$  в правой части (2.8) оцениваются аналогично предыдущему величиной  $3m-n$  ( $> 2m-n$ ). Этот случай является промежуточным между случаями (2.14) и (2.15). Таким образом, в конечном итоге получаем первую оценку (2.12) для  $k = n$ .

Наконец, вторую оценку (2.12) для  $k = n$  получаем, обращаясь к (2.9), поскольку в силу гипотезы индукции

$$\text{ldeg}(D_x^{n-2}\varphi|_{x=0}) \geq 2m - n + 2 \rightarrow \text{ldeg}(D_y^2(D_x^{n-2}\varphi|_{x=0})) \geq 2m - n$$

Это завершает доказательство леммы 1.

Обратимся к решениям  $\psi_l = \psi_l^0 + \varphi_l$  задачи Коши (2.2) для уравнения Навье – Стокса (1.1) со стоксовыми приближениями  $\psi_l^0$ , определяемыми формулами (1.6)–(1.8). Имеем:

$$\text{ldeg } \psi_l^0 = 3, \quad l = 1, 2, 3, 6; \quad \text{ldeg } \psi_l^0 = 4, \quad l = 4, 9; \quad \text{ldeg } \psi_l^0 = 5, \quad l = 5, 7, 8$$

Поэтому, согласно лемме 1,

$$\text{ldeg } \varphi_l \geq \begin{cases} 6, & l = 1, 2, 3, 6 \\ 8, & l = 4, 9 \\ 10, & l = 5, 7, 8 \end{cases} \quad (2.16)$$

Таким образом, во всех рассмотренных случаях порядок малости добавка  $\varphi_l$  оказывается выше степени многочлена  $\psi_l^0$ .

Проведенные соответствующие вычисления дают следующие выражения для добавков  $\varphi_l$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &= -\frac{1}{30}x^5(y + O(r^4)), \quad \varphi_3 = x^5\left(\frac{1}{70}x^3 + O(r^5)\right) \\ \varphi_4 &= x^5\left(-\frac{3}{5}y^3 + \frac{1}{7}x^2y + O(r^7)\right), \quad \varphi_5 = x^7\left(-\frac{5}{7}y^3 + \frac{5}{42}x^2y + O(r^8)\right) \\ \varphi_6 &= x^5\left(-\frac{3}{5}y^3 + \frac{1}{7}x^2y + O(r^6)\right), \quad \varphi_7 = x^5\left(-\frac{1}{10}y^5 - \frac{2}{21}x^2y^3 - \frac{1}{63}x^4y + O(r^{10})\right) \\ \varphi_8 &= x^5\left(-\frac{2}{5}y^5 - 2xy^4 - \frac{127}{21}x^2y^3 + \frac{9}{7}x^3y^2 + \frac{127}{126}x^4y - \frac{1}{21}x^5 + O(r^{10})\right) \\ \varphi_9 &= x^5\left(-\frac{2}{35}x^2y + O(r^4)\right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Эти формулы находятся в согласии с оценками (2.16). При этом в (2.16) равенство достигается при всех  $l$ , за исключением  $l = 3$  и  $6$ , для которых  $\text{ldeg } \varphi_l$  оказывается равным не  $6$ , а  $8$ .

Изменение знака  $\psi^0$  на противоположный в силу нелинейности уравнения (1.1) меняет, естественно, величину  $\varphi$  более сложным образом.

**3. Оценка влияния добавка к стоксову приближению на поведение разделяющих линий тока.** Интуитивно ясно, что столь высокого порядка малости добавки  $\varphi_l$  к стоксовым приближениям  $\psi_l^0$  в полученных решениях  $\psi_l$  уравнения Навье – Стокса не должны в достаточно малых окрестностях точки  $(0, 0)$  изменять картины линий тока по сравнению с таковыми для стоксовых приближений. Как показывают картины линий тока, построенные по приближенным решениям  $\psi_l^*$  уравнения Навье – Стокса с добавками  $\varphi_l^*$ , полученными из выражений (2.17) удержанием лишь главных членов (и отбрасыванием членов  $O(r^p)$ , где  $p$  – соответствующие степени), это и действительно оказывается так. К примеру, в окрестности  $r < 1$  картины линий тока у подправленных таким образом соответствующих решений визуально неотличимы от картин линий тока для стоксовых приближений  $\psi_l^0$ , а потому картины линий тока для  $\psi_l^*$  не приводятся.

Тем не менее линии уровня аналитической функции от  $x, y$  (в данном случае это линии тока) в общем случае могут иметь точки излома или возврата. Если такая точка в рассмотренных примерах попадает в начало координат, то схема стокового течения в случае уравнения Навье – Стокса может разрушиться. Поэтому желательно показать, что разделяющие линии тока у точных решений  $\psi_l$  уравнения Навье – Стокса в малых окрестностях точки  $(0, 0)$  мало отличаются от разделяющих линий тока для стоксовых приближений  $\psi_l^0$ . Это устанавливается на основе следующего утверждения.

Пусть  $u^0(x, y)$  – аналитическая функция в окрестности точки  $(0, 0)$  и

$$\text{ldeg} u^0 = m \geq 1 \quad (3.1)$$

Обозначим через  $p(x, y)$  главную часть  $u^0$ , т.е. однородный многочлен степени  $m$  такой, что  $\text{ldeg}(u^0(x, y) - p(x, y)) \geq m + 1$ . Пусть, кроме того,  $u(x, y)$  – также аналитическая функция в окрестности точки  $(0, 0)$ , удовлетворяющая условию

$$\text{ldeg}(u - u^0) = q \geq m + 1 \quad (3.2)$$

*Лемма 2.* Вдобавок к сформулированному выше предположим, что все корни  $\alpha_j$  тригонометрического многочлена

$$P(\vartheta) = p(\cos \vartheta, \sin \vartheta), \quad j = 1, \dots, 2s (\leq 2m), \quad -\pi < \alpha_j \leq \pi \quad (3.3)$$

простые, т.е.

$$P'(\alpha_j) \neq 0, \quad j = 1, \dots, 2s$$

Тогда каждая из кривых  $u^0(x, y) = 0$  и  $u(x, y) = 0$  в достаточно малой проколотой окрестности точки  $(0, 0)$  распадается на  $2s$  аналитических ветвей, имеющих в полярной системе координат представления

$$\vartheta = \vartheta_j^0(r) \text{ и } \vartheta = \vartheta_j(r), \quad 0 < r < \delta, \quad j = 1, \dots, 2s \quad (3.4)$$

соответственно, где  $\vartheta_j^0(r)$  и  $\vartheta_j(r)$  – аналитические функции радиуса  $r$ , представимые степенными рядами

$$\vartheta_j^0(r) = \alpha_j + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{j,k}^0 r^k \text{ и } \vartheta_j(r) = \alpha_j + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{j,k} r^k \quad (3.5)$$

При этом

$$\vartheta_j(r) - \vartheta_j^0(r) = O(r^{q-m}), \quad r \rightarrow 0 \quad (3.6)$$



*Доказательство.* Сначала заметим, что в силу однородности многочлена  $p(x, y)$  у многочлена  $P(\vartheta)$  наряду с корнем  $\alpha$  числа  $(\alpha + \pi)$  и  $(\alpha - \pi)$  также являются корнями этого многочлена, а потому число различных корней многочлена  $P(\vartheta)$  на сегменте  $(-\pi, \pi]$  четно.

Рассмотрим функцию

$$U^0(\vartheta, r) = r^{-m} u^0(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = P(\vartheta) + r^{-m} v^0(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \quad (3.7)$$

$$v^0(x, y) = u^0(x, y) - p(x, y) \quad (3.8)$$

Доопределим функцию  $r^{-m} u^0(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$  значением, равным 0 при  $r = 0$ . Так как из определения  $p(x, y)$  следует  $\text{ldeg} v^0 \geq m + 1$ , то так доопределенная функция  $r^{-m} u^0(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ , а вместе с ней и функция  $U^0(\vartheta, r)$  будут аналитическими функциями  $\vartheta$  и  $r$  в некоторой окрестности  $|\vartheta - \alpha_j| < \delta_{\vartheta, j}^1$ ,  $|r| < \delta_{r, j}^1$  для каждого  $j$ .

Кроме того,

$$\frac{\partial U^0}{\partial \vartheta}(\alpha_j, 0) = P'(\alpha_j) \neq 0$$

Поэтому в силу теоремы о неявных функциях (случай аналитических функций см., например, [8]) уравнение  $U^0(\vartheta, r) = 0$  имеет в достаточно малой окрестности  $|\vartheta - \alpha_j| < \delta_{\vartheta, j}$ ,  $|r| < \delta$ ,  $j = 1, \dots, 2s$ , единственное решение  $\vartheta = \vartheta_j^0(r)$ , где  $\vartheta_j^0(r)$  является аналитической функцией  $r$  и, следовательно, имеет место первое представление (3.5) для  $|r| < \delta$ . Поэтому уравнение  $u^0(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = r^m U^0(\vartheta, r) = 0$ ,  $r > 0$ , имеет  $2s$  различных (по модулю  $2\pi$ ) аналитических решений  $\vartheta = \vartheta_j^0(r)$ ,  $0 < r < \delta$ . Нетрудно показать (это будет следовать из дальнейшего), что других решений у последнего уравнения для достаточно малых  $\delta$  нет.

Аналогично, поскольку

$$\text{ldeg}(u(x, y) - p(x, y)) \geq \min[\text{ldeg}(u - u^0), \text{ldeg} v^0] \geq m + 1$$

точно такое же утверждение справедливо и относительно решений уравнения

$$u(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = 0$$

Итак, первое утверждение леммы 2 установлено.

Покажем справедливость оценки (3.6). Обозначим через  $K_r$  окружность  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ . Далее, поскольку  $P'(\alpha_j) \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, 2s$ , выберем такие непересекающиеся (по модулю  $2\pi$ ) окрестности  $|\vartheta - \alpha_j| < \delta_{\vartheta, j}$ , в которых

$$|P'(\vartheta)| \geq 2\beta > 0 \quad (3.9)$$

и  $P'(\vartheta)$  постоянного знака ( $\delta_{\vartheta, j}$  можем считать такими же, что и выше). Обозначим через  $\sigma_{r, j}$  окрестности на  $K_r$  для которых  $|\vartheta - \alpha_j| < \delta_{\vartheta, j}$ . Функция  $r^{-m} p(x, y)$  постоянна на каждом луче  $\vartheta = \text{const}$ ,  $r > 0$ . Поскольку

$$K_r \setminus \bigcup_{j=1}^{2s} \sigma_{r, j}$$

есть замкнутое множество и последняя функция непрерывна и не обращается в нуль на этом множестве, то существует постоянная  $\nu > 0$  такая, что

$$|r^{-m} p(x, y)| \geq 2\nu, \quad (x, y) \in K_r \setminus \bigcup_{j=1}^{2s} \sigma_{r, j}, \quad \forall r > 0$$

В силу того, что

$$|r^{-m}(u^0(x, y) - p(x, y))|, \quad |r^{-m}(u(x, y) - p(x, y))| \leq c_1 r, \quad 0 < r < \delta_1 < \delta$$

получаем с использованием неравенства треугольника, что

$$|r^{-m}u^0(x, y)| \geq |r^{-m}p(x, y)| - |r^{-m}(u^0(x, y) - p(x, y))| \geq 2v - c_1 r \geq v > 0$$

$$|r^{-m}u(x, y)| \geq v > 0$$

$$(x, y) \in K_r \setminus \bigcup_{j=1}^{2s} \sigma_{r,j}, \quad 0 < r < \delta_1$$

если  $\delta_1$  достаточно мало. Таким образом, в достаточно малой окрестности точки  $(0, 0)$  ветви (3.4), (3.5) лежат в секторах

$$|\vartheta - \alpha_j| < \delta_{\vartheta,j}, \quad r > 0$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} U^0(\vartheta, r) = P'(\vartheta) + r^{-m+1}(-v_x^0(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \sin \vartheta + v_y^0(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \cos \vartheta)$$

можем оценить в секторах

$$|\vartheta - \alpha_j| < \delta_{\vartheta,j}, \quad 0 < r < \delta_2,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \vartheta} U^0(\vartheta, r) \right| \geq |P'(\vartheta)| - r^{-m+1}(|v_x^0(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)| +$$

$$+ |v_y^0(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)|) \geq 2\beta - c_2 r \geq \beta > 0 \quad (3.10)$$

при достаточно малом  $\delta_2$ , поскольку  $\text{ldeg} v_x^0, \text{ldeg} v_y^0 \geq m$ . Более того, в каждом из таких секторов  $\partial U^0(\vartheta, r) / \partial \vartheta$  имеет постоянный знак. Поэтому, используя формулу Ньютона–Лейбница, можем оценить в окрестностях

$$|\vartheta - \alpha_j| < \delta_{\vartheta,j}, \quad 0 < r < \delta_2$$

$$|U^0(\vartheta, r)| = |U^0(\vartheta, r) - U^0(\vartheta_j^0(r), r)| = \left| \int_{\vartheta_j^0(r)}^{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \xi} U^0(\xi, r) d\xi \right| \geq \beta |\vartheta - \vartheta_j^0(r)| \quad (3.11)$$

Обозначим

$$v(x, y) = u(x, y) - u^0(x, y)$$

$$U(\vartheta, r) = r^{-m}u(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = U^0(\vartheta, r) - r^{-m}v(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$$

В силу (3.2)  $\text{ldeg} v = q$ , а потому для  $|\vartheta - \alpha_j| < \delta_{\vartheta,j}$ ,  $0 < r < \delta_3$  можем, используя (3.11), оценить

$$|U(\vartheta, r)| \geq |U^0(\vartheta, r)| - r^{-m}|v(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)| \geq \beta |\vartheta - \vartheta_j^0(r)| - c_3 r^{q-m} \quad (3.12)$$

где  $c_3$  – некоторая постоянная,  $\delta_3 > 0$  – достаточно малое. Поэтому при достаточно малых  $r$ , если

$$\beta |\vartheta - \vartheta_j^0(r)| > c_3 r^{q-m}, \quad |\vartheta - \alpha_j| < \delta_{\vartheta,j}$$

имеет место

$$|u(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)| > 0$$

Следовательно, при достаточно малых  $r$  справедлива оценка  $|\vartheta_j(r) - \vartheta_j^0(r)| \leq \leq (c_3/\beta)r^{q-m}$ , что доказывает (3.6). Итак, лемма 2 установлена.

Применим эту лемму к вышеприведенным стоксовым решениям  $\psi_l^0$  и к производимым ими, согласно алгоритму разд. 2, решениям  $\psi_l$  уравнения Навье – Стокса,  $l = 1, 2, \dots, 9$ . В качестве функций  $u^0$  и  $u$ , фигурирующих в лемме 2, возьмем функции  $u_l^0 = x^{-2}\psi_l^0$  и  $u_l = x^{-2}\psi_l$  для всех  $l \neq 5$ , а для  $l = 5$  возьмем  $u_5^0 = x^{-3}\psi_5^0$  и  $u_5 = x^{-3}\psi_5$  соответственно. Из формул (2.17) следует, что  $u_l$  будут также аналитическими функциями переменных  $x$  и  $y$ .

В случае  $l = 1, 2, 4, 5, 7$  и  $8$  функции  $u_l^0$  сами являются однородными многочленами степеней:  $1$  – для  $l = 1$  и  $2$ ,  $2$  – для  $l = 4$  и  $5$ ,  $3$  – для  $l = 7$  и  $8$ . Поэтому для таких  $l$  выполняется равенство  $p_l(x, y) = u_l^0(x, y)$ , причем, как нетрудно проверить, корни  $\alpha_{l,j}$  тригонометрических многочленов  $P_l = p_l(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$  являются простыми и отличными от  $\pm \pi/2$ , а потому аналитическими ветвями уравнений  $u_l^0(x, y) = 0$  будут прямые  $\vartheta = \vartheta_{l,j}^0(r) \equiv \alpha_{l,j}$ ,  $r > 0$ . Числа  $(q_l - m_l)$ , где  $m_l$  и  $q_l$  соответствуют числам  $m$  и  $q$  в лемме 2 (см. (3.1) и (3.2)), будут равны следующим значениям:  $3$  – для  $l = 1$  и  $2$ ,  $4$  – для  $l = 4, 5$  – для  $l = 5, 7$  и  $8$ . В силу (3.6) разделяющие линии тока для решений  $\psi_l$  уравнения Навье – Стокса представляются в полярной системе координат уравнениями  $\vartheta = \vartheta_{l,j}(r) = \alpha_{l,j} + O(r^{q_l - m_l})$  и потому имеют высокий порядок касания с соответствующими разделяющими линиями – прямыми для стоксовых решений  $\psi_l^0(x, y)$  в полуплоскости  $x > 0$ .

Обратимся теперь к несколько более тонким случаям решений  $\psi_l^0$  и  $\psi_l$  для  $l = 3, 6$  и  $9$ . В этих случаях разделяющие линии тока для стоксовых решений  $\psi_l^0$  имеют касания с контуром  $x = 0$  в точке  $(0, 0)$ . Рассмотрим только случай  $l = 3$ , поскольку случаи  $l = 6$  и  $9$  изучаются аналогично. В этом случае

$$u_3^0 = 2x + x^2y - y^3, \quad p_3(x, y) = 2x, \quad P(\vartheta) = 2 \cos \vartheta$$

корни  $P(\vartheta)$  равны  $\alpha_+ = \pi/2$ ,  $\alpha_- = -\pi/2$  и они простые (здесь использована индексация корней  $P(\vartheta)$ , отличная от использованной в лемме 2). Итак,  $m_3 = 1$  и, как следует из (2.17),  $q_3 = 6$ , а потому  $q_3 - m_3 = 5$ . В полуплоскостях  $\pm x > 0$  кривая  $u_3^0(x, y) = 0$  имеет соответственно ветви  $x = y^3(1 + \sqrt{1 + y^4})^{-1}$ ,  $\pm y > 0$ , исходящие из точки  $(0, 0)$ . Опишем представления для этих ветвей в полярной системе.

Считая полярный угол  $\vartheta$  определенным условием  $-\pi < \vartheta \leq \pi$ , получаем для функций  $\vartheta_{\pm}^0(r)$  в представлениях  $\vartheta = \vartheta_{\pm}^0(r)$ ,  $0 < r < \delta$ , этих ветвей в полярной системе следующие уравнения:

$$\operatorname{tg}(\pm\pi/2 - \vartheta_{\pm}^0(r)) = \frac{x}{y} = \frac{y^2}{1 + \sqrt{1 + y^4}} = \frac{r^2 \cos^2(\pm\pi/2 - \vartheta_{\pm}^0(r))}{1 + \sqrt{1 + r^4 \cos^4(\pm\pi/2 - \vartheta_{\pm}^0(r))}}$$

Поскольку  $\pm(\pi/2) - \vartheta_{\pm}^0(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ , эти уравнения с обозначением  $\eta = \pm(\pi/2) - \vartheta_{\pm}^0(r)$  можно переписать единообразно:

$$\Phi(\eta, r) = 0 \tag{3.13}$$

где

$$\Phi(\eta, r) = \eta - \operatorname{arctg}[r^2(\cos^2 \eta)(1 + \sqrt{1 + r^4 \cos^4 \eta})^{-1}]$$

Функция  $\Phi(\eta, r)$  является аналитической функцией  $\eta$  и  $r$  в достаточно малой окрестности точки  $(\eta, r) = (0, 0)$ . Кроме того,  $\Phi(0, 0) = 0$ , а  $(\partial\Phi/\partial\eta)(0, 0) = 1 \neq 0$ . Поэтому в силу теоремы о неявных функциях уравнение (3.13) имеет в достаточно малой окрестности точки  $(0, 0)$  единственное и притом аналитическое решение  $\eta = \eta(r)$ , где

$$\eta(r) = r^2 - \sum_{l=3}^{\infty} \gamma_l^0 r^l, \quad 0 < r < \delta$$

а  $\delta > 0$  достаточно малое. В результате это приводит к следующим степенным разложениям для функций  $\vartheta_{\pm}^0(r)$ :

$$\vartheta_{\pm}^0(r) = \pm \frac{\pi}{2} - r^2 + \sum_{l=3}^{\infty} \gamma_l^0 r^l, \quad 0 < r < \delta \quad (3.14)$$

В силу леммы 2 аналитические ветви уравнения  $u_3(x, y) = 0$ , соответствующего решению  $\psi_3(x, y)$  уравнения Навье – Стокса, имеют в полярной системе представления  $\vartheta = \vartheta_{\pm}(r)$ , причем

$$\vartheta_{\pm}(r) - \vartheta_{\pm}^0(r) = O(r^{q_3 - m_3}) = O(r^5), \quad r \rightarrow 0 \quad (3.15)$$

Поэтому и

$$\vartheta_{\pm}(r) = \pm \pi/2 - r^2(1 + O(r)), \quad r \rightarrow 0 \quad (3.16)$$

Таким образом, из (3.15) следует, что в точке  $(0, 0)$  кривые  $\vartheta = \vartheta_{+}(r)$  имеют касание с кривыми  $\vartheta = \vartheta_{\pm}^0(r)$  существенно более высокого порядка, чем порядок касания кривых  $\vartheta = \vartheta_{\pm}^0(r)$  с границей  $x = 0$ . Из (3.16) вытекает также, что разделяющая линия тока  $\vartheta = \vartheta_{+}(r)$  для решения уравнения Навье – Стокса  $\psi_3(x, y)$  остается в достаточно малой окрестности точки  $(0, 0)$  в полуплоскости  $x > 0$ , а кривая  $\vartheta = \vartheta_{-}(r)$  – в полуплоскости  $x < 0$  и потому не появляется в полуплоскости  $x > 0$ .

**4. Пример течения с пучком произвольного числа разделяющих линий тока.** Извлечем из суммы (1.4) стоксовы решения  $\psi^0$ , имеющие в полярной системе координат выражения

$$\psi^0 = 2r^{n+1} \cos \vartheta \cos n\vartheta, \quad n = 2k + 1 \geq 3, \quad k \in \mathbf{N}$$

$$\psi^0 = 2r^{n+1} \cos \vartheta \sin n\vartheta, \quad n = 2l \geq 4, \quad l \in \mathbf{N}$$

Решения  $\psi^0(x, y)$  являются однородными многочленами переменных  $x$  и  $y$

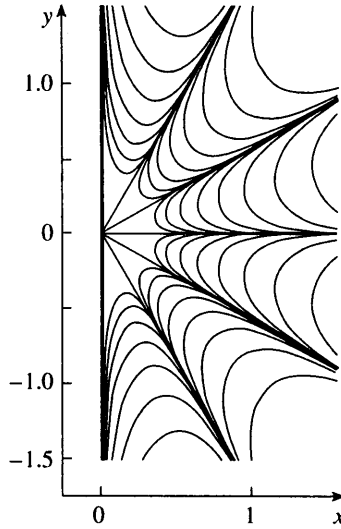
$$\psi^0(x, y) = 2x^2 \sum_{k=0}^N (-1)^{N-k} C_n^{2k+1} x^{2k} y^{n-1-2k}, \quad N = \left[ \frac{n-1}{2} \right] \quad (4.1)$$

степени  $(n + 1)$ , а функции  $u^0(x, y) = x^{-2}\psi^0(x, y)$  – однородными многочленами степени  $(n - 1)$ . Поэтому  $p(x, y) = u^0(x, y)$ . У тригонометрического многочлена

$$P(\vartheta) = p(\cos \vartheta, \sin \vartheta) = \frac{2}{\cos \vartheta} \begin{cases} \cos n\vartheta \\ \sin n\vartheta \end{cases}$$

где  $\cos n\vartheta$  берется при нечетном  $n$ , а  $\sin n\vartheta$  – при четном  $n$ . На сегменте  $(-\pi, \pi]$  имеется  $2(n - 1)$  различных корней, все эти корни простые, и нет корней, равных  $\pm \pi/2$ .

Далее, поскольку в тейлоровском разложении решения  $\psi(x, y)$  задачи Коши (2.1) с  $\psi^0$ , определяемым (4.1), для уравнения Навье – Стокса (1.1) все одночлены содержат степени  $x$  заведомо не меньше 2, функция  $u(x, y) = x^{-2}\psi(x, y)$  также является аналитической функцией в окрестности точки  $(0, 0)$ . В силу леммы 1  $\text{ldeg}(\psi - \psi^0) \geq 2(n + 1)$ .



Фиг. 4. Картина линий тока течения, в котором пять разделяющих линий тока ( $\psi^0 = 0$ ) пересекаются в точке обтекаемого контура (формула (4.2))

Отсюда  $\text{ldeg}(u - u^0) \geq 2n \geq n = 1 + \text{ldeg}u^0$  и, следовательно, функции  $u^0$ ,  $p$  и  $u$  удовлетворяют всем условиям леммы 2. Числа  $m$  и  $q$ , фигурирующие в этой лемме, в рассматриваемом случае будут:  $m = (n - 1)$ ,  $q \geq 2n$ . Поэтому лемма 2 дает, что для аналитических выражений (в полярной системе)  $\vartheta = \vartheta_j^0(r) = \alpha_j$  и  $\vartheta = \vartheta_j^1(r)$ ,  $0 < r < \delta$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2(n - 1)$ , ветвей решений уравнений  $\psi^0 = 0$ ,  $x \neq 0$  и  $\psi = 0$ ,  $x \neq 0$  соответственно в малой окрестности точки  $(0, 0)$  имеет место

$$\vartheta_j(r) - \vartheta_j^0(r) = O(r^{n+1})$$

Это устанавливает существование в некоторой окрестности точки  $(0, 0)$  полуплоскости  $x > 0$  двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости с условиями прилипания на границе  $x = 0$ , имеющих  $(n - 1)$  разделяющих линий тока, входящих в точку  $(0, 0)$  и исходящих из этой точки и разбивающих область течения на  $n$  секторов, имеющих равные углы в точке  $(0, 0)$  при любом  $n \geq 3$ . На фиг. 4 представлена картина линий тока для стоксова приближения (4.1) с  $n = 6$

$$\psi^0 = 4x^2y(3x^4 - 10x^2y^2 + 3y^4) \quad (4.2)$$

Линии уровня приведены для значений  $\psi$  из множества  $\{0, \pm 0.1 \cdot 4^k, k = -3, -2, \dots, 4\}$ .

На разделяющих линиях тока во всех приведенных примерах стоксовых течений скорость обращается в нуль только в точке  $(0, 0)$ . Это следует из простоты корней уравнения  $P(\vartheta) = 0$ .

**Заключение.** Установлено, что в плоскопараллельных стационарных течениях вязкой несжимаемой жидкости разделяющие линии тока могут подходить к контуру обтекаемой поверхности под любым углом от 0 до  $\pi$  и что в одной точке такого контура могут пересекаться несколько разделяющих линий тока.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (№ 99-01-00852 и 02-01-00582).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Щепров А.В.* Расчет одного течения вязкой жидкости на адаптивных сетках // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32. № 6. С. 939–951.
2. *Шмыглевский Ю.Д., Щепров А.В.* О вихревых системах в вязкой жидкости вблизи угловой точки границы // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 1.
3. *Bakker P.G.* Topology of fundamental separation structures // Separated Flows and Jets. IUTAM Symp., Novosibirsk, USSR, 1990. Berlin; Heidelberg: Springer, 1991. P. 103–112.
4. *Strutt J.W.* Baron Rayleigh. 351. Hydrodynamic Notes. Steady motion in a corner of a viscous fluid // Scient. Papers. V. 6. Cambridge: Univ. Press, 1920. P. 18–21.
5. *Гринберг Г.А.* О методе, предложенном П.Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 2. С. 221–228.
6. *Меллер Н.А., Пальцев Б.В., Хлюпина Е.Г.* О численном методе с расщеплением граничных условий для стационарной системы Навье – Стокса в шаровом слое в случае осевой симметрии // Intern. Conf. "Differential Equations and Related Topics "Dedicated to the Centenary Anniversary of Ivan G. Petrovskii. Book of Abstrs. M.: Moscow St. Univ. Press, 2001. P. 311–313.
7. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
8. *Фукс Б.А.* Введение в теорию аналитических функций многих переменных. М.: Физматгиз, 1962. 419 с.

Москва

Поступила в редакцию  
4.VII. 2001