МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2002

УДК 532.51

© 2002 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, Л.И. КОРОВИНА, С.А. КУМАКШЕВ, С.В. НЕСТЕРОВ

РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МАССЫ ЖИДКОСТИ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ

В полной нелинейной постановке исследуется задача о радиальных колебаниях цилиндрической массы жидкости, совершающей циркуляционное движение. Проведено аналитическое и численное интегрирование уравнений движения, определены характеристики колебаний в линейном приближении. С помощью математического моделирования установлено, что в общем случае колебания сильно несимметричны, но обладают явно выраженной изохронностью.

В научной литературе известно весьма небольшое число случаев интегрируемости в квадратурах и полного численно-аналитического исследования задач гидродинамики с краевыми условиями на неизвестной свободной поверхности жидкости. К таковым относятся задача Герстнера о вихревых волнах на поверхности тяжелой идеальной жидкости [1] и задача Дирихле–Дедекинда–Римана о свободных колебаниях и распаде самогравитирующей массы идеальной жидкости в классе осесимметричных эллипсоидов [1, 2].

Исследуем аналитическими и численными методами задачу о радиальных колебаниях цилиндрической массы жидкости, совершающей циркуляционное движение [3]. Она допускает полное интегрирование в квадратурах и определение основных характеристик колебаний существенно нелинейной системы, обладающей интересными механическими свойствами.

1. Постановка задачи. Пусть имеется масса жидкости, внешней границей которой служит бесконечно длинный цилиндр радиуса b, находящаяся в состоянии циклического безвихревого движения. К границе жидкости приложено однородное и постоянное во времени давление P. В дальнейшем будет показано, что при этих условиях существует внутренний цилиндрический канал, концентричный внешней границе массы жидкости, радиус которого определяется параметрами жидкости, давлением P и циркуляцией.

Предполагается, что в начальный момент времени частицам жидкости сообщены радиальные смещения, требуется определить дальнейшее движение. При этом авторы не ограничиваются исследованием движений с бесконечно малой амплитудой.

Введем полярную систему координат (r, φ), начало которой находится в центре кругового поперечного сечения жидкой массы. Предполагается, что жидкость совершает циркуляционное движение, поле скоростей (v_r, v_φ) которого задается выражениями [1]

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = \frac{\varkappa}{r} \tag{1.1}$$

где $\varkappa$ = const – циркуляция. Из (1.1) и интеграла Бернулли следует, что жидкий цилиндр является полым (содержит каверну). Его внешний b и внутренний a радиусы определяются через параметры гидродинамической системы: циркуляцию $\varkappa$, погонную массу M, внешнее и внутреннее давление $P^{\pm}$. Приведем эти зависимости. Для поля скоростей (1.1) интеграл Бернулли определяет давление

$$P+\frac{1}{2}\rho v^2 = P+\frac{1}{2}\rho\varkappa^2 r^{-2} = \text{const} \tag{1.2}$$

Из условия на внешней поверхности жидкого цилиндра находим из (1.2)

$$P = P^{+} + \frac{1}{2}\rho\varkappa^2(b^{-2} - r^{-2}), \quad r \leqslant b \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует, что при $r \to 0$ величина $P \to -\infty$, чего, естественно, быть не может. Поэтому существует внутренняя концентрическая полость радиуса $a < b$, который определяется с помощью соотношения (1.3) из условия $P = P^- < P^+$ при $r = a$, т.е. имеет место связь между внешним b и внутренним a радиусами жидкого цилиндра

$$\Delta P = \frac{1}{2}\varkappa^2\rho(a^{-2} - b^{-2}), \quad \Delta P = P^+ - P^- > 0 \tag{1.4}$$

При заданных значениях $\Delta P, \varkappa^2, \rho$ величины a и b связаны соотношением (1.4). Чтобы их определить, используем выражение для M:

$$M = \pi\rho(b^2 - a^2)$$

$$a^2, b^2 = \frac{M}{2\pi\rho}\left[\mp 1 + \left(1+\frac{2\varkappa^2\rho}{M\Delta P}\right)^{1/2}\right] \tag{1.5}$$

Если же заданы другие величины, например радиусы a и b, то формулы (1.4) и (1.5) определяют величины $\Delta P/(\varkappa^2\rho)$ и (M/ρ).

Из (1.5) следует, что $(a/b) \ll 1$, если $\varkappa^2\rho/(M\Delta P) \ll 1$; наоборот, если $\varkappa^2\rho/(M\Delta P) \gg 1$, то $(1 - a/b) \ll 1$. Соотношения (1.1)–(1.5) отвечают стационарному состоянию цилиндрической массы жидкости, совершающей циркуляционное движение. Исследуем возмущенные движения, когда частицы жидкости могут перемещаться в радиальном направлении. Для этого дадим краткий вывод уравнений, описывающих радиальные колебания рассматриваемой массы жидкости, а также их полный анализ.

2. Уравнения радиальных колебаний. Будем считать, что кроме циркуляционного движения имеется еще радиальное движение частиц, потенциал скоростей Φ которого имеет вид

$$\Phi(t,r) = A(t)\ln r + B(t), \quad r > 0 \tag{2.1}$$

где A, B – неизвестные функции времени, подлежащие определению. Обозначим через α и β радиальные смещения цилиндрических поверхностей, ограничивающих полый цилиндр, относительно равновесных значений a и b. При наличии радиальных смещений интеграл Коши–Лагранжа принимает вид (см. (1.2)–(1.4))

$$P + \rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa^2}{r^2} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2\right)\right) = P^+ + \frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{b^2} = P^- + \frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{a^2} \tag{2.2}$$

Подставляя выражение (2.1) в равенства (2.2) и используя их при $r = b + \beta$ и $r = a + \alpha$ соответственно, получим

$$\dot{A}\ln(b+\beta)+\dot{B}+\frac{1}{2}\frac{\varkappa^2+A^2}{(b+\beta)^2}=\frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{b^2} \tag{2.3}$$

$$\dot{A}\ln(a+\alpha)+\dot{B}+\frac{1}{2}\frac{\varkappa^2+A^2}{(a+\alpha)^2}=\frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{a^2}$$

Исключив $\dot{B}$, получим уравнение

$$\dot{A}\ln\left(\frac{b+\beta}{a+\alpha}\right)+\frac{1}{2}(\varkappa^2+A^2)\left[\frac{1}{(b+\beta)^2}-\frac{1}{(a+\alpha)^2}\right]+\frac{\Delta P}{\rho}=0 \tag{2.4}$$

содержащее неизвестные функции A, α, β. Из определения потенциала скоростей Φ (2.1) следуют два кинематических условия на свободных поверхностях $r = b + \beta$ и $r = a + \alpha$

$$\dot{\alpha}=\frac{A}{a+\alpha};\quad \dot{\beta}=\frac{A}{b+\beta} \tag{2.5}$$

Кроме того, имеет место "условие сохранения объема" (площади поперечного сечения цилиндрической массы жидкости)

$$(b+\beta)^2-(a+\alpha)^2=b^2-a^2=\frac{M}{\pi\rho} \tag{2.6}$$

С помощью (2.6) может быть исключена из уравнения (2.4) одна из неизвестных α или β и получена замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений относительно A, β или A, α. Для определенности будем считать, что исключена неизвестная α:

$$\dot{A}\ln\left(\frac{b+\beta}{\sqrt{(b+\beta)^2-b^2+a^2}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}(\varkappa^2+A^2)\left[\frac{1}{(b+\beta)^2}-\frac{1}{(b+\beta)^2-b^2+a^2}\right]+\frac{\Delta P}{\rho}=0 \tag{2.7}$$

$$(b+\beta)\dot{\beta}=A$$

Исследуем вначале случай малых колебаний: $|\beta|/b \ll 1$. Учитывая (1.4), проведем линеаризацию системы (2.7) в окрестности точки покоя $A = \beta = 0$

$$\dot{A}\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\varkappa^2\beta\frac{b^4-a^4}{a^4b^3}=0,\quad \dot{\beta}=\frac{A}{b} \tag{2.8}$$

Исключим из системы (2.8) величину A:

$$\ddot{\beta}+\omega^2\beta=0,\quad \omega^2=\frac{\varkappa^2}{\ln(b/a)}\frac{b^4-a^4}{a^4b^4} \tag{2.9}$$

В первом приближении, согласно (2.9), внешний радиус b (и также внутренний a) цилиндрической массы жидкости, совершающей циркуляционное движение, гармонически изменяется во времени с частотой ω и периодом T [3]

$$\omega=\frac{\varkappa}{b^2a^2}\sqrt{\frac{b^4-a^4}{\ln(b/a)}},\quad T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{2.10}$$

При $a/b \ll 1$ и $(b-a)/a \ll 1$ для ω (2.10) справедливы соответствующие приближенные выражения

$$\omega \approx \varkappa a^{-2}(\ln(b/a))^{-1/2}, \quad \omega \to 0, \quad b \to \infty; \quad \omega \approx 2\varkappa a^{-2} \approx 2\varkappa b^{-2}$$

Система нелинейных уравнений (2.7) допускает полное интегрирование в квадратурах, она может быть представлена в эквивалентной форме уравнений Лагранжа и Гамильтона. Действительно, вводя вместо β переменную γ (обобщенную координату) и параметр Δ, получим функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{1}{2}\mu(\gamma)(\dot{\gamma})^2 - U(\gamma), \quad \gamma = \frac{1}{2}(b+\beta)^2, \quad \Delta = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) > 0$$
$$\mu = \ln\left(\frac{\gamma}{\gamma - \Delta}\right), \quad U = \frac{2\Delta P\gamma}{\rho} + \frac{1}{2}\varkappa^2\mu, \quad \dot{\gamma} = A \tag{2.11}$$

Из (2.11) следует, что $\gamma = b^2/2$ есть положение равновесия системы, т.е. $U'(b^2/2) = 0$. Параметры Δ, $\Delta P/\rho$ и $\varkappa^2$ считаются заданными.

Вводя сопряженную переменную $\Psi = \partial L/\partial\dot{\gamma}$ (обобщенный импульс), получим выражение для функции Гамильтона H

$$H = \frac{\Psi^2}{2\mu(\gamma)} + U(\gamma), \quad \Psi = \mu\dot{\gamma} \tag{2.12}$$

С помощью (2.12) получаются выражения для первого интеграла системы $H = E = \text{const}$, а также уравнения фазовых траекторий. Кроме того, интегрированием уравнения

$$\dot{\gamma} = \pm\sqrt{\frac{2(E-U)}{\mu}}, \quad 0 < \gamma^- \leqslant \gamma \leqslant \gamma^+ < \infty \tag{2.13}$$

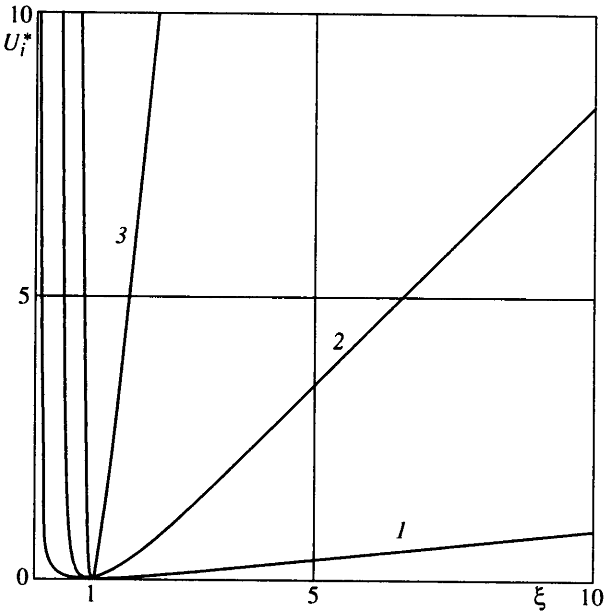
получается зависимость переменной γ, а следовательно, и β от времени в квадратурах.

На основе соотношений (2.11)–(2.13) может быть проведен полный анализ колебаний цилиндрической массы жидкости и определены все характеристики колебательного процесса: зависимость периода $T(E)$ от энергии или начальной амплитуды, точки возврата $\gamma^{\pm}$, а также траектории $\gamma(t)$ и $\dot{\gamma}(t)$.

Отметим, что исходная система (2.7) содержит четыре параметра (a, b, $\varkappa^2$, $\Delta P/\rho$), что существенно затрудняет полное исследование задачи. Однако введением безразмерных переменных их количество может быть уменьшено до одного параметра ν (см. ниже).

3. Приведение динамической системы к безразмерному виду и анализ радиальных колебаний. Введем безразмерные параметры ν, θ, аргумент τ, координату ξ, потенциал U^* и постоянную интегрирования E^* по формулам

$$\nu = 2\frac{\Delta P}{\rho}\frac{b^2}{\varkappa^2}, \quad E^* = \frac{E}{\varkappa^2} - \nu - \frac{1}{2}\mu(1,\theta)$$
$$\mu = \mu(\xi,\theta) = \ln\left(\frac{\xi}{\xi-\theta}\right), \quad \theta = \frac{\nu}{1+\nu}, \quad \xi = 2\frac{\gamma}{b^2}, \quad \tau = 2\frac{\varkappa t}{b^2} \tag{3.1}$$
$$U^* = U^*(\xi,\nu) = \nu(\xi-1) + \ln\left(\frac{\xi}{\xi(1+\nu)-\nu}\right)$$
$$E^* = \frac{1}{2}\mu(\xi,\theta)(\xi^{\bullet})^2 + U^*(\xi,\nu), \quad \xi^{\bullet} = \frac{d\xi}{d\tau}$$



Фиг. 1. Семейство кривых для приведенного потенциала $U_i^*(\xi)$ при $\nu_i = 0.1, 1, 10$

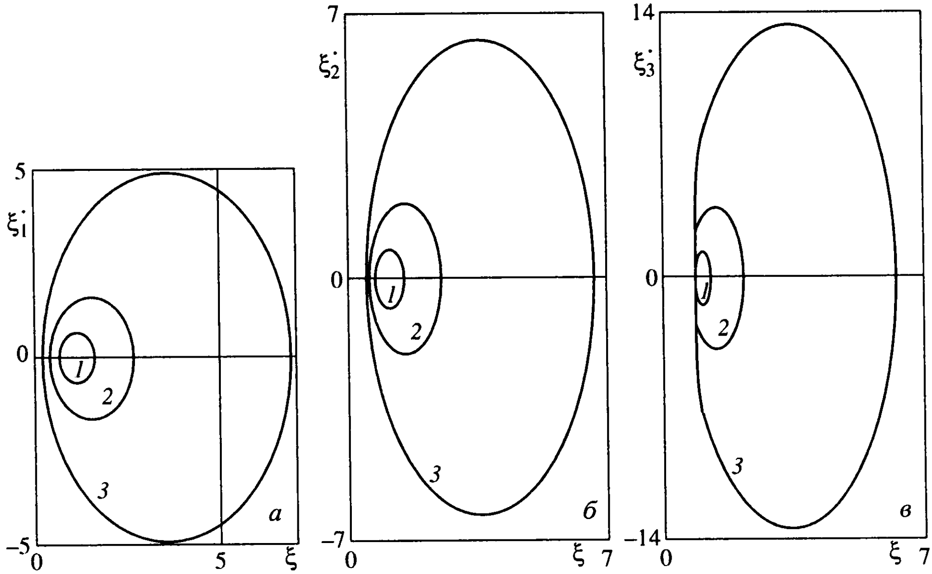
Параметр $\nu > 0$ характеризует отношение удерживающих сил (давление) к расталкивающим центробежным силам инерции (циркуляция). Из (3.1) следует, что $0 < \theta < 1$, а приведенный потенциал U^* есть положительно-определенная функция ξ, $\theta < \xi < \infty$, причем $U^*(1, \nu) = U^{*\prime}(1, \nu) = 0$. Кроме того, функция U^* при $\xi \to \theta - 0$ имеет вертикальную асимптоту, т.е. $U^* \to \infty$; при $\xi \to \infty$ имеются асимптоты $U^* \sim \nu\xi$. Вблизи положения равновесия справедливо представление

$$U^* \approx \frac{1}{2}\nu(2+\nu)(\xi-1)^2 - \frac{1}{3}\nu(3+3\nu+\nu^2)(\xi-1)^3 + O((\xi-1)^4) \qquad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что при $\xi > 1$ возвращающая сила является "мягкой", а при $\xi < 1$ – "жесткой". Для значений $E^* \sim 1$ при $\nu \gg 1$ переменная ξ изменяется в малой окрестности точки $\xi = 1$; если $\nu \ll 1$, то левая граница $0 < \xi^- \ll 1$, а правая $\xi^+ \sim \nu^{-1} \gg 1$. Из (3.1) также следует, что при $E^* \gg 1$ переменная ξ изменяется в пределах $\xi^- < \xi < \xi^+$, где $\xi^- > \theta, \xi^+ \lesssim 1 + E^*/\nu$. Семейство кривых $U_i^*(\xi) = U^*(\xi, \nu_i)$, $i = 1, 2, 3$, для $\nu = 0.1, 1.0, 10.0$, представлено на фиг. 1; оно позволяет графически определить амплитуды $\xi = (E^*, \nu_i)$. Колебания значительно отклоняются от симметричных при $E^* \sim 1$, что свидетельствует также об их существенной нелинейности. Колебания, близкие к линейным, как следует из (3.1) и фиг. 1, имеют место при $0 < E^* \ll 1, \nu \sim 1$.

На фиг. 2 представлены три семейства *а*, *б*, *в* фазовых траекторий $(\xi, \xi^\bullet)$ для указанных выше значений ν. В качестве параметра семейства принимались значения приведенной энергии E^* (3.1). Для учета относительного влияния величина E^* бралась равной $E_j = \nu/5, \nu, 5\nu$ (итого 9 значений), что достаточно убедительно характеризует свойства нелинейных радиальных колебаний вращающейся цилиндрической массы жидкости.

При относительно малых значениях ν, E^* фазовые траектории "близки" вытянутым вдоль оси $\xi^\bullet$ эллипсам со смещенными центрами (фокусами), переменными размерами



Фиг. 2. Семейства фазовых траекторий для $\nu = \nu_i$ и $E_j^* = \nu/5, \nu, 5\nu$ (*а–в*)

(полуосями) и переменным эксцентриситетом (фиг. 2,*а*). Смещения и размеры увеличиваются с ростом параметра E^*, а эксцентриситет немного уменьшается. Как показывают расчеты траекторий $\xi(\tau, E^*, \nu_i)$, $\xi^{\bullet}(\tau, E^*, \nu_i)$ (см. п. 4), радиальные колебания "близки" к гармоническим со смещенными по оси ξ "центрами". Напомним, что положением равновесия системы является точка $\xi = 1$, $\xi^{\bullet} = 0$, см. (3.2). В этих особенностях выражаются нелинейные свойства колебаний при малых значениях ν и E^* (фиг. 1).

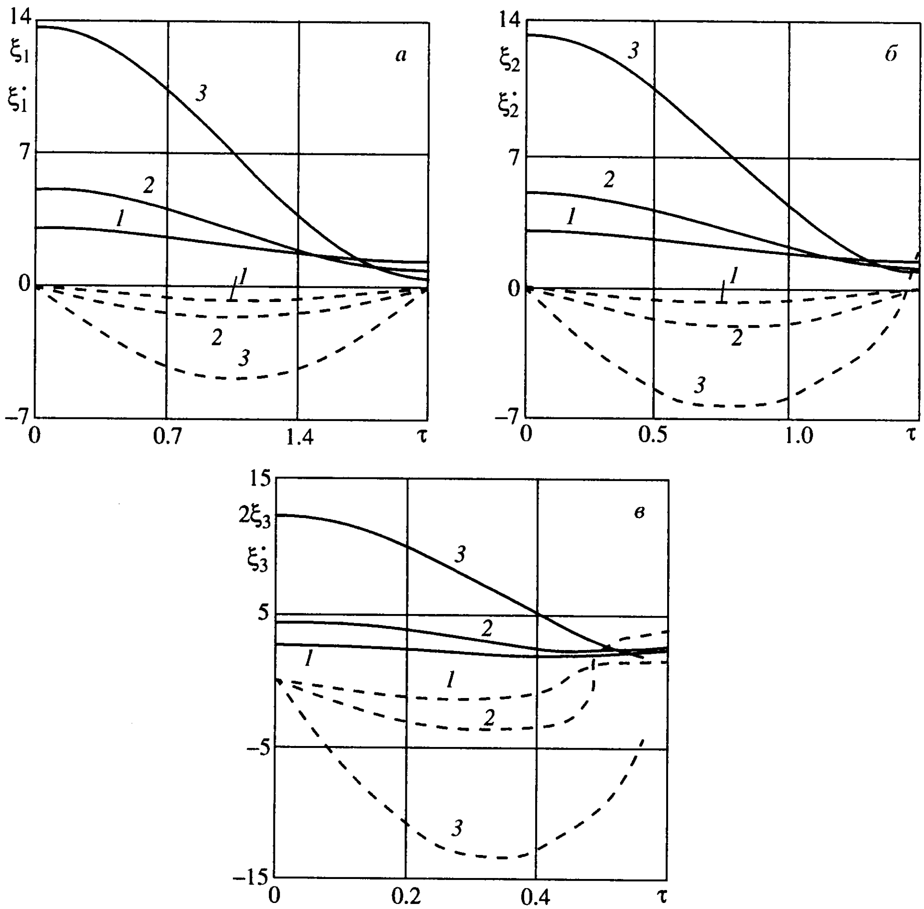
Семейства фазовых траекторий при $\nu = 1$ (фиг. 2,*б*) позволяет обнаружить наряду с указанными выше свойствами нелинейных колебаний более сильное проявление динамических свойств левой границы, приводящее к весьма резкому изменению скорости. Для относительно больших значений E^* и $\xi \to \xi^-$ имеет место явление типа "удара", обусловленное центробежными силами инерции. Вблизи правой границы происходят присущие линейным колебаниям изменения фазовых переменных.

Наконец, для умеренно большого значения $\nu = 10$ эффект "удара" при $\xi \to \xi^-$ проявляется еще более наглядно, см. фиг. 2,*в*. Сравнение семейств кривых *а*, *б*, *в* свидетельствует, что отношение вертикального и горизонтального размеров фигур возрастает с ростом ν. Размах колебаний $\Delta\xi = \xi^+ - \xi^-$ для указанных значений E^* изменяется не очень существенно. Наряду с рассмотренными выше были построены фазовые траектории для $\nu = 0.01$ и 100 и $E = \nu/10$, 10ν, которые более резко иллюстрируют приведенные выше качественные выводы. Напомним, что для анализа фазовых траекторий в исходных физических переменных следует учесть преобразования (3.1).

4. Определение временных характеристик колебаний. Период колебаний T^* может быть вычислен стандартным образом на основе интеграла энергии E^* с помощью выражений (3.1)

$$T^* = T^*(E^*, \nu) = \sqrt{2}\int_{\xi^-}^{\xi^+} \frac{\sqrt{\mu(\xi,\theta)}d\xi}{\sqrt{E^* - U^*(\xi,\nu)}} \tag{4.1}$$

$$\xi^{\pm}(E^*, \nu) = \mathrm{Arg}_{\xi}[E^* - U^*(\xi,\nu)], \quad \xi^- < 1, \quad \xi^+ > 1$$

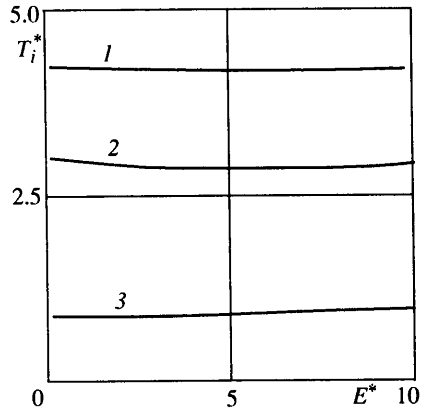


Фиг. 3. Семейства траекторий $\xi_i(\tau, E_j^*)$ (сплошные линии), $\xi_j^{\bullet}(\tau, E_j^*)$ (штриховые линии) на интервалах $0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{2} T_i^*(E_j^*)$

Однако приближенное определение амплитуд $\xi^{\pm}$ и взятие несобственной квадратуры, согласно (4.1), представляет существенные трудности. Они усугубляются наличием явлений типа "удара" вблизи $\xi = \xi^-$ при больших ν и E^* и сингулярным поведением инерционной характеристики $\mu(\xi, \theta)$. Поэтому предлагается другой способ, связанный с расчетом траекторий $\xi(\tau, E^*, \nu_i)$, $\xi^{\bullet}(\tau, E^*, \nu_i)$ на основе уравнения Лагранжа (см. п. 2)

$$\mu\xi^{\bullet\bullet} + \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial\xi}(\xi^{\bullet})^2 + \nu + \frac{1}{\xi} - \frac{1+\nu}{\xi(1+\nu)-\nu} = 0 \qquad (4.2)$$

При отсутствии ударных явлений уравнение (4.2) может быть проинтегрировано стандартным образом для произвольных начальных значений $\xi^0, \xi^{\bullet 0}$, удовлетворяющих условиям $E^* \ll 1$, и умеренно больших ν. Увеличение E^* приводит к трудностям численного интегрирования уравнения вблизи точек, отвечающих минимальному значению $\xi \approx \xi^-$, в окрестности которых происходят "изломы" траектории $\xi(\tau, E^*, \nu_i)$ и "разрыв" скорости $\xi^{\bullet}(\tau, E^*, \nu_i)$ (фиг. 3). Семейства кривых отвечают значениям параметров ν, E^*, указанным в п. 3. Для удобства проведения расчетов в качестве



Фиг. 4. Зависимость безразмерных периодов колебаний T_i^* от приведенной энергии E^*

начальных взяты значения $\xi(0) = \xi^+$, $\xi^\bullet(0) = 0$, отвечающие регулярному поведению решения, что в определенной мере облегчает начальную стадию интегрирования. Движение на интервале $(0, T^*/2)$ происходит с отрицательной скоростью, пока при $\tau \approx T^*/2$ не будет достигнута малая окрестность значения $\xi \approx \xi^-$, отвечающего излому функции ξ и скачку скорости $\xi^\bullet$. Дальнейшее интегрирование требует специальных приемов, связанных с асимптотикой решения (при $E^* \gg 1$). Если значение $\xi(\tau, E^*, \nu_i) \approx$ $\approx \xi^-(E^*, \nu_i)$ достигнуто с заданной точностью, то тем самым будет определена величина $\tau = T^*/2$, а траектория для $\tau > T^*/2$ может быть продолжена простым отражением относительно оси τ.

С помощью этого приема возможно высокоточное вычисление периода колебаний $T^*(E^*, \nu)$, который представлен на фиг. 4 для различных значений энергии $0 \leqslant E^* \leqslant 10$ и $\nu = 0.1, 1, 10$. Результаты расчетов приводят к интересному гидродинамическому эффекту: период колебаний для рассматриваемой системы в безразмерных переменных практически не зависит от величины энергии E^* (изохронность). Установлено, что период существенно возрастает с уменьшением параметра ν, характеризующего отношение удерживающих сил (давления) к центробежным силам инерции. Акцентируем внимание на следующем: при анализе колебаний следует иметь в виду указанные формулы (3.1) перехода от исходных физических к безразмерным параметрам и переменным. Свойство изохронности также сохраняется в размерных переменных по отношению к энергии E.

Неизохронность колебаний относительно невелика: порядка 1–2%. Интересно отметить, что при увеличении E^* вначале происходит небольшое (визуально незаметное) уменьшение периода, а затем увеличение и стремление к практически постоянному значению (фиг. 4). Эффект изохронности весьма трудно объяснить, принимая во внимание приведенные выше свойства существенной нелинейности колебаний. Однако анализ уравнения (4.2) (после деления на μ) свидетельствует, что член $(\mu'/\mu)\xi^{\bullet 2}$ дает весьма малый вклад в ускорение $\xi^{\bullet\bullet}$ всюду, в том числе в малой окрестности левой точки остановки ($\xi \approx \xi^-$). Функция $-U'_\xi/\mu$ (возвращающая сила) практически на всем периоде колебаний близка к линейной (кроме окрестности $\xi = \xi^-$), так как $U' \approx \nu$, а $\mu \approx 1/\xi$ при $\xi \sim 1$ ($E^* \sim 1, E^* \gg 1$). Физически это означает, что большую часть времени цилиндрический слой жидкости находится в состоянии $\xi > 1$ (вне равновесного цилиндра), для которого удерживающая сила $-U'_\xi \approx -\nu$, т.е. постоянна, а инерционная характеристика $\mu \approx \theta/\xi$, т.е. убывает с ростом ξ.

Заключение. В полной нелинейной и линеаризованной постановках решена задача о радиальных колебаниях цилиндрической по форме массы жидкости, совершающей циркуляционное движение. Проведено аналитическое и численное интегрирование уравнений движения для произвольных значений определяющих параметров: циркуляции, плотности и разности внешнего и внутреннего давлений.

Установлены границы радиальных колебаний в зависимости от параметра, определяющего отношение удерживающих сил давления к центробежным силам циркуляции, а также от начальной амплитуды. Показано, что в общем случае колебания носят существенно нелинейный характер, а отклонения от положения равновесия заметно несимметричны. Наблюдаются эффекты "излома" таректории ξ и "скачка" скорости $\xi^{\bullet}$.

Численными расчетами установлен и аналитически объяснен интересный эффект, заключающийся в слабой зависимости периода колебаний от энергии (амплитуд), порядка 2%, т.е. колебания имеют явно выраженный изохронный характер, присущий линейным системам. Зависимость периода колебаний от других параметров сильная – при уменьшении безразмерной комбинации ν период существенно возрастает.

Авторы благодарны А.А. Бармину за замечания по формулировке постановки задачи и изложению результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№№ 02-01-00252, 02-01-00157).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. *Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В.* Колебания и распад жидкой самогравитирующей массы // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 152–163.
3. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.IV.2001