

УДК 532.529:532.591

© 2002 г. Г.Г. ОГАНЯН

О СТРУКТУРАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ТЕРМИЧЕСКИ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

Получено эволюционное уравнение, описывающее нелинейный волновой процесс в смеси жидкости с пузырьками газа, в которой вследствие отклонения поведения газа от адиабатического происходит межфазный теплообмен. Приведены точные частные решения, описывающие структуры как ударных волн, так и солитона. Выявлен механизм максимального сжатия в структуре ударной волны, распространяющейся в смеси с пузырьками растворяющегося газа. Получен интервал изменения исходного радиуса пузырька, при котором вследствие сжатия стационарный профиль волны немонотонен. Показано существование профиля волны с осциллирующей структурой. Численные расчеты по полученным формулам достаточно удовлетворительно, по крайней мере качественно, согласуются с данными известных экспериментов.

В реальных газожидкостных смесях вследствие пульсаций пузырьков в жидкости имеет место необратимый межфазный теплообмен. Большое число экспериментальных и теоретических работ по выявлению его воздействия на волновой процесс обобщено и систематизировано в [1, 2]. Эксперименты в смесях с растворенными газами обнаружили эффект усиления ударной волны [3, 4]. Однако ни одна из существующих теорий волновой динамики не дает приемлемого теоретического объяснения результатов этих экспериментов. Приведенные в [2] численные расчеты и их вполне удовлетворительное совпадение с данными физических экспериментов свидетельствуют о корректности используемой математической модели смеси для адекватного описания волновых процессов.

1. Основные уравнения. Рассматривается бесстолкновительная монодисперсная смесь вязкой несжимаемой жидкости с малым объемным содержанием пузырьков калорически совершенного газа. Предполагается отсутствие внешних источников тепла, постоянство температуры жидкости и равенство скоростей жидкой и газовой фаз. Из системы одномерных модельных уравнений в приближении Буссинеска [2] можно получить двухволновое нелинейное уравнение относительно избыточного давления p [5]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a_{e0}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \alpha_e \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} - \delta_\mu \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} - \frac{1}{\omega_{ir}^{*2}} \frac{b_0}{\beta_0} \frac{\partial^4 p}{\partial t^4} = \quad (1.1)$$

$$= -2t_T \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a_{f0}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \alpha_f \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} - \delta_\mu \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} - \frac{\gamma}{\omega_{ar}^{*2}} \frac{b_0}{\beta_0} \frac{\partial^4 p}{\partial t^4} \right]$$

$$\alpha_e = \frac{1}{3} \frac{b_0}{\beta_0} \left(1 + 2 \frac{b_0}{\beta_0} \right), \quad \alpha_f = \frac{\gamma}{2} \frac{b_0}{\beta_0} \left(1 + \frac{b_0}{\beta_0} \right), \quad b_0 = \frac{p_0}{\rho_0 a_0^2}$$

$$a_{f0}^2 = \gamma a_{e0}^2 = \frac{\gamma}{\beta_0} \frac{p_0}{\rho_0}, \quad \omega_{ar}^{*2} = \gamma \omega_{ir}^{*2} = \frac{1}{1 - \Phi_0} \frac{3\gamma p_0}{\rho_{10} R_0^2}, \quad t_T = \frac{1}{3\gamma} \frac{R_0^2}{\lambda_2} \frac{1}{\text{Nu}}$$

$$\delta_\mu = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\beta_0}, \quad \Phi_0 = \frac{1.1\beta_0^{1/3} - \beta_0}{1 - \beta_0}, \quad a_{e0} \leq a_0 \leq a_{f0}$$

Здесь t – время, x – пространственная координата, t_T – время тепловой релаксации, p – давление, ρ – плотность, R – радиус пузырька, γ – показатель адиабаты газа, μ и λ_2 – коэффициенты вязкости жидкости и температуропроводности газа, ω_{ir}^* и ω_{ar}^* – приведенные изотермическая и адиабатическая резонансные частоты Миннаерта, β_0 – объемное газосодержание, в силу малости которого $\rho_1 = \rho_0$, Nu – число Нуссельта, задающее интенсивность межфазного теплообмена и определяющееся, как будет показано ниже, в процессе решения задач. Индексы 0 и 1.2 отнесены соответственно к состоянию покоя (полного термодинамического равновесия) и параметрам жидкой и газовой фаз, а e и f – к предельным режимам изотермического и адиабатического поведения газа в пузырьках. Скорость звука a_0 в зависимости от режима совпадает либо с изотермической a_{e0} , либо с адиабатической a_{f0} скоростью звука в смеси. Поправочный коэффициент Φ_0 характеризует неодинокость пузырька в жидкости [2].

В предельных случаях изотермического режима ($a_0 \equiv a_{e0}$, $b_0 = \beta_0$), когда передача тепла из пузырьков в жидкость происходит мгновенно ($t_T \rightarrow 0$, $\text{Nu} \rightarrow \infty$), и адиабатического ($a_0 \equiv a_{f0}$, $b_0 = \beta_0 / \gamma$), когда теплопередача происходит в течение бесконечного долгого времени в сравнении с макроскопическим ($t_T \rightarrow \infty$, $\text{Nu} \rightarrow 0$), тепловая диссипация отсутствует. В первом случае в уравнении (1.1) следует оставлять лишь левую часть, а во втором – только правую. В обоих случаях (1.1) переходит в уравнение Бюргерса–Кортевега–де Вриза, которое изучено достаточно подробно [1, 2, 6, 7].

Перейдем к исследованию нелинейного волнового процесса в случае квази-адиабатического режима, при котором поведение газа в пузырьках отличается, пусть даже и незначительно, от адиабатического. Полагая $a_0 \equiv a_{f0}$, получим $\alpha_e = (\gamma + 2)/(3\gamma^2)$, $\alpha_f = (\gamma + 1)/(2\gamma)$. Рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль положительного направления оси x . Поскольку определяющим волновой процесс является волновой оператор из правой части уравнения (1.1), постольку можно полагать $\partial/\partial t \approx -a_{f0}\partial/\partial x$. Тогда после факторизации уравнения (1.1) и двукратного интегрирования по t , где константы интегрирования принимаются равными нулю, приходим к уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_{f0} \frac{\partial p}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{2\omega_{ar}^{*2}} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} - \frac{\alpha_f}{2} \frac{\partial p^2}{\partial t} - \frac{\alpha_e}{4} \frac{1}{t_T} p^2 + \frac{\gamma-1}{4\gamma} \frac{1}{t_T} p = 0$$

$$c_{f0}^2 = a_{f0}^2 \left(1 + 2 \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\lambda_2}{R_0^2} \text{Nu} \right), \quad \delta = \frac{1}{2} \delta_\mu + \delta_T, \quad \delta_T = \frac{\gamma}{4} \frac{1 - \Phi_0}{\beta_0} \lambda_2 \text{Nu}$$

Здесь c_{f0} – приведенная невозмущенная скорость звука в смеси. Добавки к диссипативному коэффициенту δ_μ и скорости a_{f0} обусловлены учетом межфазного теплообмена. В соответствии с приближением Буссинеска в дисперсионном и нелинейных слагаемых можно полагать $\partial/\partial t \approx -c_{f0}\partial/\partial x$. Последующий ввод сопутствующей системы координат, $t = t'$, $x' = x - c_{f0}t$, связанной с фронтом звуковой волны, позволяет получить эволюционное уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \delta \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} c_{f0} p \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\alpha_e}{4} \frac{1}{t_T} p^2 + \frac{\gamma-1}{4\gamma} \frac{1}{t_T} p = 0$$

$$\beta = \frac{c_{f0}}{6} \frac{1 - \Phi_0}{\beta_0} \left(1 + 2 \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\lambda_2}{R_0^2} \text{Nu} \right) R_0^2$$

Здесь штрихи над координатами опущены. Аналогично [1, 2] можно показать, что после перехода к безразмерным переменным t_* , x_*

$$x = L_* x_* = \frac{R_0}{\sqrt{\beta_0 \Delta p_0}} x_*, \quad t = \tau_* t_* = \frac{R_0}{\Delta p_0} \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}} t_*, \quad p = \Delta p_0 p_*$$

где Δp_0 – начальная амплитуда избыточного давления, L_* и τ_* – характерные длина и время, на которых меняются характеристики среды, в уравнение войдут параметры

$$Re = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \frac{\rho_0}{\mu} R_0, \quad \sigma^2 = \frac{6}{\sqrt{\gamma}} \frac{1}{1 - \varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta p_0}}, \quad \frac{Nu}{Pe}, \quad Pe = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \frac{R_0}{\lambda_2}$$

где Re , Pe – числа Рейнольдса и Пекле. Из указанных параметров независимыми являются лишь первые два, в то время как отношение Nu/Pe определится в ходе решения задач путем подбора соответствующих связей между коэффициентами уравнения. При различных связях решения уравнения будут разными.

Рассматриваются стационарные решения эволюционного уравнения типа бегущей волны, когда перед волной и позади нее имеют место однородные равновесные состояния смеси. Поэтому, переходя к стационарной координате $\xi = x' - Vt' \equiv x - (c_{f0} + V)t$, уравнение и граничные условия можно записать в виде

$$\beta \frac{d^3 u}{d\xi^3} - \delta \frac{d^2 u}{d\xi^2} + (u - V) \frac{du}{d\xi} + \chi u - \alpha u^2 = 0 \quad (1.2)$$

$$\xi \rightarrow \pm \infty: \quad \frac{du}{d\xi} = \frac{d^2 u}{d\xi^2} = \frac{d^3 u}{d\xi^3} = 0$$

$$u = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} c_{f0} p, \quad \chi = \frac{3}{2} \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma + 2} c_{f0} \alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{4} \frac{\alpha_e}{\alpha_f} \frac{1}{t_f c_{f0}} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 2}{\gamma + 1} \frac{\lambda_2}{R_0^2} \frac{1}{c_{f0}} Nu, \quad \delta = \frac{1}{2} \delta_\mu + \frac{3\gamma(\gamma + 1)}{\gamma + 2} \frac{a_{f0}^2}{c_{f0}^2} \alpha \beta$$

Здесь $V = \text{const}$ – скорость фронта волны в сопутствующей системе координат. Подчеркнем, что в уравнении (1.2) фигурируют два нелинейных слагаемых и скорость распространения ударной волны в исходной системе координат определяется как $D = c_{f0} + V$. Уравнение (1.2) обладает точными частными решениями, для построения которых используется метод, разработанный в [8] и примененный в [6, 7] для получения частных решений нелинейного уравнения, неинтегрируемого методом обратной задачи теории рассеяния. Опуская выкладки, приведем эти результаты.

2. Максимальное сжатие волны. Если между коэффициентами уравнения (1.2) реализуется связь $\delta = 12\alpha\beta$, означающая, что закон теплообмена уже известен, то его точным частным решением является функция

$$u = 48\alpha^2 \beta k \frac{1 + (k + 1)e^{2\alpha k \xi}}{(1 + e^{2\alpha k \xi})^2}, \quad k = \frac{1}{48} \frac{\chi}{\alpha^3 \beta}$$

Переходя к истинному давлению $p = p_0(1 + p')$, где p' – его избыточное значение, в силу обозначений из (1.2) перепишем решение в виде

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{3\gamma(\gamma - 1)}{\gamma + 2} \frac{1 + (k + 1)e^{2\alpha k \xi}}{(1 + e^{2\alpha k \xi})^2} \quad (2.1)$$

Приведенное решение описывает структуру ударной волны сжатия, поскольку непрерывным образом связывает два асимптотических однородных состояния смеси, характеризующиеся значениями

$$p(-\infty) = \frac{3\gamma^2 - 2\gamma + 2}{\gamma + 2} p_0, \quad p(\infty) = p_0 \quad (2.2)$$

вдали по обе стороны фронта. Функция (2.1) достигает своего максимального значения при $\xi = \xi_*$:

$$\xi_* = \frac{1}{2\alpha k} \ln \frac{k-1}{k+1}, \quad p_{\max} = p(\xi_*) = p_0 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{\gamma(\gamma-1)}{\gamma+2} \frac{(k+1)^2}{k} \right]$$

Скорость фронта ударной волны определится из соотношения

$$V = 4\alpha^2 \beta (k^2 + 6k - 6) = \frac{c_{f0}}{8} \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma + 2} \frac{k^2 + 6k - 6}{k}$$

получаемого в ходе построения решения (2.1). Для выявления закона теплообмена обратимся к связи $\delta = 12\alpha\beta$, из которой следует уравнение относительно величины интенсивности межфазного теплообмена

$$\text{Nu}^2 + \frac{8 + 3\gamma - \gamma^2}{8(\gamma + 2)} \frac{p_0}{\mu} \frac{R_0^2}{\lambda_2} \text{Nu} - \frac{1}{3} \frac{\gamma + 1}{\gamma + 2} \frac{1}{1 - \varphi_0} \frac{p_0}{\rho_0} \frac{R_0^2}{\lambda_2^2} = 0$$

которое можно записать через независимый безразмерный параметр Re

$$\left(\frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} \right)^2 + \frac{1}{12} \frac{8 + 3\gamma - \gamma^2}{\gamma + 2} \text{Re} \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} - \frac{1}{3} \frac{\gamma + 1}{\gamma + 2} \frac{1}{1 - \varphi_0} = 0$$

Таким образом, утверждение о зависимости Nu/Pe от определяющих подобие параметров подтвердилось, и при заданной исходной форме возмущения ее эволюция определится двумя параметрами Re и σ .

В рассматриваемом квазиadiaбатическом режиме распространения волны в главном приближении выполняется связь $p' = -3\gamma R'$, где R' – возмущение безразмерного радиуса пузырька. Изменение размерного радиуса $R = R_0(1 + R')$ подчиняется закону

$$R = R_0 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 2} \frac{1 + (k+1)e^{2\alpha k \xi}}{(1 + e^{2\alpha k \xi})^2} \right]$$

по которому нетрудно вычислить значение $R_{\min} = R(\xi_*)$. Введем в рассмотрение коэффициенты f и f_2 максимального сжатия в структуре ударной волны и пузырьке

$$f(k) = \frac{p_{\max}}{p_0} = 1 + \frac{3}{4} \frac{\gamma(\gamma-1)}{\gamma+2} \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$f_2(k) = \frac{R_{\min}}{R_0} = 1 - \frac{1}{4} \frac{\gamma-1}{\gamma+2} \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{4}{9} \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} \frac{(\gamma+2)^2}{(\gamma+1)^2} \left[1 - \frac{3}{8} \frac{8 + 3\gamma - \gamma^2}{\gamma+1} \frac{p_0}{\mu} (1 - \varphi_0) \lambda_2 \text{Nu} \right] \quad (2.3)$$

С увеличением аргумента k функция f возрастает, а f_2 убывает, т.е. с усилением интенсивности ударной волны синхронно происходит сжатие пузырька. Из требований

действительности величины ξ_* (существования экстремальной точки) и $R_{\min} > 0$ следуют ограничения на величину k

$$1 < k < \frac{\gamma + 5 + 2\sqrt{3(\gamma + 2)}}{\gamma - 1}, \quad \gamma < 1.554 \quad (2.4)$$

$$\frac{9\gamma(\gamma - 1)}{4} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma + 2} \right)^2 < k < \frac{\gamma + 5 + 2\sqrt{3(\gamma + 2)}}{\gamma - 1}, \quad \gamma > 1.554$$

Полученные интервалы, как и области изменений f и f_2 , в силу формул (2.3) не зависят от теплофизических параметров жидкости и характеризуются лишь показателем адиабаты газа γ . При одинаковых значениях k с переходом от одного сорта газа к другому величина коэффициента f возрастает с увеличением γ , а f_2 , наоборот, уменьшается. Аргумент k можно полагать независимым параметром смеси, определяющим все многообразие волнового процесса. В последующих расчетах формулы для величины k , допустимого размера пузырька R_0 и приведенной скорости c_{f0} удобно записать в виде

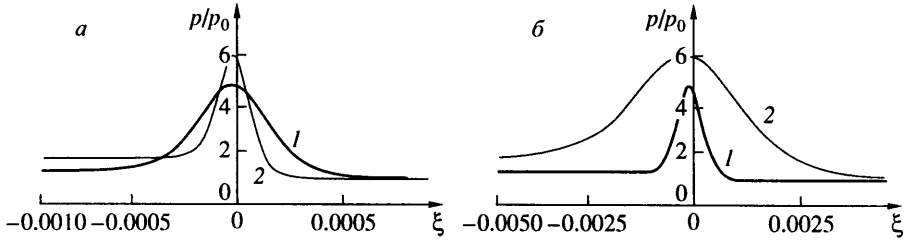
$$R_0 = \frac{16}{3} \frac{\gamma + 2}{1 - \varphi_0} \frac{1}{B_0} \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{a_{f0}} \frac{g(k)}{\sqrt{k}}, \quad \frac{c_{f0}}{a_{f0}} = 1 + \frac{9}{16} \frac{\gamma(\gamma - 1)}{\gamma + 2} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma + 2} \right)^2 \frac{1}{g(k)} \quad (2.5)$$

$$k = \frac{\alpha}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma + 2} \frac{a_{f0}}{c_{f0}} \frac{B_0^2}{\lambda_2} \frac{1}{\text{Nu}}, \quad B_0 = \left[\frac{3(\gamma^2 - 1)}{\gamma + 2} \frac{\beta_0}{1 - \varphi_0} \right]^{1/2}$$

$$g(k) = \frac{1}{8 + 3\gamma - \gamma^2} \left[k - \frac{9\gamma(\gamma - 1)}{4} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma + 2} \right)^2 \right]$$

Здесь $g(k)$ – положительно определенная функция от аргумента. Каждому значению k из интервалов (2.4) соответствует, согласно (2.5), вполне определенная величина R_0 при фиксированных прочих параметрах смеси. Такой подход позволяет путем варьирования исходного размера пузырька добиться управления эффектом сжатия. Выясним его механизм. В отсутствие межфазного теплообмена ($\alpha = \chi = 0$) уравнение (1.2) обладает точным решением, описывающим поведение затухающей ударной волны [6,7]. Поскольку $\alpha \neq 0$, $\chi \neq 0$, то первая чисто гидродинамическая нелинейность формирует, как обычно, ударную волну, а совместно воздействие второй нелинейности вкупе с межфазным теплообменом приводит к дополнительному сжатию смеси и тем самым усилению сжатия ударной волны. Роль межфазного теплообмена двояка. С одной стороны, он усиливает диссипацию энергии в смеси, а с другой – совместно со второй нелинейностью препятствует ей. В этой конкуренции вначале преобладают нелинейные эффекты, а затем – диссипативные, что в итоге приводит к затуханию волны.

На фигуре при $p_0 = 0.1$ МПа, $T_0 = 239$ К, $\beta = 0.05$ представлены структуры волн в смесях с резко отличающимися теплофизическими свойствами, построенные по решению (2.1) в случае их максимального усиления. В смеси воды с пузырьками углекислого газа CO_2 (фигура, а, кривая 1) $k = 43.356$ и формулы (2.4), (2.5) дают значения $R_0 = 1.65 \cdot 10^{-6}$ м, $f = 4.9$, $\text{Nu} = 0.095$, в то время как по данным экспериментов [3, 4] $f = 5$, при этом значение R_0 не указано. Скорость D ударной волны в силу полученных формул возрастает с 53 до 119 м/с, т.е. в 2.24 раза, а по данным [3, 4] – с 240 до 570 м/с, т.е. в 2.37 раза. Такое отличие по абсолютным скоростям обусловлено, по-видимому, неполным учетом составляющих скорости c_{f0} вследствие пренебрежения поверхност-



Структуры ударных волн в смесях: *a* – воды с пузырьками CO_2 (кривая 1) и He (кривая 2); *б* – водоглицеринового раствора 1 : 1 с пузырьками CO_2 (кривая 1) и He (кривая 2)

ным натяжением. В смеси воды с пузырьками гелия He (фигура, *a*, кривая 2), взяв допустимый исходный размер $R_0 = 6.7 \cdot 10^{-7}$ м, в эксперименте следует ожидать усиления в 6 раз и увеличения скорости распространения в 2.61 раза, при этом $\text{Nu} = 6.3 \cdot 10^{-3}$. Структуры волн в смеси водоглицеринового раствора 1:1 с пузырьками CO_2 и He с допустимыми исходными размерами $R_0 = 3.06 \cdot 10^{-5}$ м ($\text{Nu} = 0.16$) и $R_0 = 1.25 \cdot 10^{-5}$ м ($\text{Nu} = 0.11$) соответственно представлены на фигуре, *б* (кривые 1, 2).

Согласно (2.5), ширины волн и допустимые исходные размеры пузырьков R_0 с возрастанием p_0 уменьшаются и, будучи пропорциональными величине вязкости, увеличиваются с переходом от слабвязкой жидкости (вода) к сильновязкой (водоглицериновый раствор) (фигура, *a*, *б*).

Исследуем поведение стационарной волны сжатия, описываемое уравнением (2.1) и принятой связью, около состояния за ее фронтом. Полагая в уравнении (1.2)

$$u(\xi) = u(-\infty) + z = 24\alpha\beta k + z, \quad |z| \ll 24\alpha\beta k$$

проведем его линеаризацию. Для возмущения z получим линейное уравнение, решение которого будем искать в виде $z \sim \exp(m\xi)$. Из соответствующего характеристического уравнения

$$(m - k)(m^2 + mk - 12\alpha m + 24\alpha^2) = 0$$

и требования ограниченности амплитуд осцилляций следует, что при значениях

$$6 \geq k > 6 - 2\sqrt{6}, \quad \gamma < 1.554 \tag{2.6}$$

$$6 \geq k > \frac{9\gamma(\gamma-1)}{4} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma+2} \right)^2, \quad \gamma > 1.554$$

волна имеет осцилляционную структуру. Частота осцилляций стационарной волны, определяемая формулой

$$\Omega = \frac{1}{8} \frac{\gamma-1}{\gamma+2} \frac{p_0}{\mu} \frac{1}{k} [k^2 + 6k - 6] [-k^2 + 12k - 12]^{1/2} G(k)$$

$$G(k) = \frac{8 + 3\gamma - \gamma^2}{32} \left\{ \left[1 + \frac{9\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+2)^2} \left(\frac{\gamma+1}{8 + 3\gamma - \gamma^2} \right)^2 \frac{k}{g^2} \right]^{1/2} - 1 \right\}$$

при фиксированном значении k из интервалов (2.6) пропорциональна исходному давлению p_0 . В маловязких жидкостях ее величина больше, чем в сильновязких, при прочих равных параметрах. Амплитуда $A(\xi)$ осцилляций, равная

$$A(\xi) = \exp \left[\frac{1}{\gamma+1} \frac{1}{c_{f_0}} \frac{p_0}{\mu} (6-k) G(k) \xi \right]$$

$$H_2O + CO_2$$

$$p_0 = 0.1 \text{ МПа}, T = 293 \text{ К}, \beta_0 = 0.05, \mu/\rho_0 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \xi = -1.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

| k | $R_0, 10^{-6} \text{ м}$ | Nu | A | $\Omega, \text{ кГц}$ | $f(k)$ |
|-------|--------------------------|-------|-------|-----------------------|--------|
| 1.102 | 0.17 | 0.062 | 0.148 | 67.03 | 1.342 |
| 1.2 | 0.18 | 0.063 | 0.197 | 779.9 | 1.344 |
| 1.7 | 0.25 | 0.073 | 0.377 | 2169.6 | 1.366 |
| 2.0 | 0.28 | 0.074 | 0.473 | 2545.6 | 1.384 |
| 3 | 0.37 | 0.079 | 0.983 | 2997.5 | 1.455 |
| 5 | 0.52 | 0.089 | 0.997 | 2933.4 | 1.614 |
| 6 | 0.58 | 0.091 | 1 | 2761.9 | 1.696 |

в силу принадлежности k интервалам (2.6) убывает с течением времени. Для воды с пузырьками CO_2 в таблице приведены некоторые данные расчетов по полученным формулам. С возрастанием коэффициента сжатия f для фиксированного времени t имеет место монотонное увеличение амплитуды осцилляций. Эта же закономерность наблюдается и для величины Nu, поскольку имеет место возрастание допустимого исходного размера R_0 пузырька, приводящего к увеличению площади межфазного контакта и тем самым улучшению теплообмена. Зависимость частоты Ω от аргумента k немонотонная: с возрастанием f наблюдается увеличение ее значения, которое, достигнув своего максимума, начинает убывать. Поскольку (2.6) являются подмножествами интервалов (2.4), постольку следует вывод, что осцилляции в структуре ударной волны могут иметь место лишь в случае ее относительно слабого усиления. При значениях k , лежащих вне интервалов (2.6), но в (2.4), структура волны, описываемой уравнением (1.2), является монотонной.

3. Солитон (относительно слабое сжатие стационарной волны). Пусть в уравнении (2.1) между коэффициентами реализуется связь $\delta = 2\alpha\beta$, означающая, что зависимость числа Nu от теплофизических параметров смеси – закон межфазного теплообмена имеет вид

$$Nu^2 - \frac{1}{4} \frac{3\gamma^2 + \gamma - 4}{\gamma(\gamma + 2)} \beta_0 \frac{l_T}{l_\mu} Nu - \frac{2}{\gamma} \frac{\gamma + 1}{\gamma + 2} \frac{\beta_0}{1 - \varphi_0} \left(\frac{l_T}{R_0} \right)^2 = 0$$

$$l_T = \frac{R_0^2}{\lambda_2} a_{f0}, \quad l_\mu = \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{a_{f0}}$$

Здесь l_T – длина термодиффузии, l_μ – характерная длина вязкого эффекта.

Полученное уравнение можно выразить через параметры подобия

$$\left(\frac{Nu}{Pe} \right)^2 - \frac{1}{6} \frac{3\gamma^2 + \gamma - 4}{\gamma + 2} Re \frac{Nu}{Pe} + \frac{2(\gamma + 1)}{\gamma + 2} \frac{1}{1 - \varphi_0} = 0$$

Очевидно, что величина Nu/Pe не является независимой. В этом случае точное частное решение уравнения (2.1) ($\xi = x - (c_{j0} + V)t$)

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{9}{2} \frac{\gamma(\gamma - 1)}{\gamma + 2} \text{ch}^{-2} \left(\frac{k}{2} \xi \right), \quad k = \left(\frac{1}{2} \frac{\chi}{\alpha\beta} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{B_0}{R_0} \frac{a_{f0}}{c_{f0}} \quad (3.1)$$

записанное для давления, выявляет другой закон распространения возмущения давления, имеющий место при ее относительно слабом сжатии. Амплитуда солитона

$f = (9\gamma^2 - 7\gamma + 4)/(2\gamma + 4)$ при замене одного сорта газа другим возрастает с увеличением показателя γ . Скорость V распространения волны, вычисляемая по формуле

$$V = \beta k^2 = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma + 2} c_{f0}$$

$$c_{f0} = a_{f0} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \frac{3\gamma^2 + \gamma - 4}{\gamma + 2} \left[1 + \left(1 + \frac{128}{1 - \varphi_0} \frac{\gamma^2 + 3\gamma + 2}{3\gamma^2 + \gamma - 4} \frac{l_\mu^2}{R_0^2} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/2}$$

пропорциональна $p_0^{1/2}$ и уменьшается с увеличением газосодержания β_0 . Ширина волны $l = 1/k$ увеличивается с возрастанием размера R_0 и уменьшением β_0 . В случае наличия в смеси достаточно крупных пузырьков

$$R_0^2 \gg \frac{128}{1 - \varphi_0} \frac{(\gamma + 1)(\gamma + 2)}{(\gamma - 1)(3\gamma + 4)} l_\mu^2$$

полученные формулы упрощаются, при этом скорость распространения D в исходной системе координат определится формулой

$$D = \frac{1}{4} \frac{3\gamma^2 + 4\gamma + 5}{\gamma + 2} \left[\frac{3}{2} \frac{\gamma(\gamma + 1)}{\gamma + 2} \right]^{1/2} a_{f0}$$

Таким образом, в случае реализации принятой связи возмущение давления распространяется со сверхзвуковой скоростью $D > a_{f0}$ в виде солитона (3.1), амплитуда и ширина которого никак не зависят от свойств жидкости.

Решение (3.1), по виду схожее с решением соответствующего уравнения Кортевега-Вриза, вытекающего из (1.2), отличается конкретизацией k . Поскольку значение величины k , слабо зависящее от вязкости, определяется в основном исходными параметрами газового пузырька, постольку можно утверждать, что решение (3.1) соответствует случаю, когда происходит взаимная нейтрализация воздействия эффектов межфазного теплообмена и вязкости на волновой процесс.

4. Монотонная структура ударной волны. Наконец, пусть коэффициенты уравнения (1.2) связаны соотношением

$$\chi = 12\alpha\beta k^2, \quad k = 2\alpha/5 - \delta/(5\beta) \quad (4.1)$$

Тогда его точное частное решение после перехода к давлению имеет вид ($\xi = x - (c_{f0} + V)t$)

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{3\gamma(\gamma - 1)}{\gamma + 2} \left[1 - \frac{1}{(1 + e^{k\xi})^2} \right], \quad k = -\frac{1}{2} B_0 \frac{a_{f0}}{c_{f0}} \frac{1}{R_0} \quad (4.2)$$

где величина B_0 выписана в (2.5). Решение (4.2) описывает монотонную структуру затухающей ударной волны и его асимптотические значения при $\xi \rightarrow \pm \infty$ совпадают с асимптотиками (2.2) решения (2.1). Закон межфазного теплообмена находится из связи (4.1)

$$\text{Nu}^2 - 2(KR_0 - L) \frac{R_0}{\lambda_2} \text{Nu} - \frac{R_0^2}{\lambda_2^2} \left(M - LR_0 \frac{p_0}{\mu} \right) = 0 \quad (4.3)$$

$$K = \frac{1}{8} \frac{3\gamma^2 + \gamma - 4}{\gamma + 2} \frac{p_0}{\mu}, \quad L = \frac{5}{4} \frac{\gamma + 1}{\gamma + 2} B_0 a_{f0}, \quad M = \frac{2}{3\gamma} \frac{B_0^2 a_{f0}^2}{\gamma - 1}$$

Уравнение (4.3) можно записать также через независимые безразмерные параметры подобия

$$\left(\frac{\text{Nu}}{\text{Pe}}\right)^2 - \frac{1}{6} \frac{3\gamma^2 + \gamma - 4}{\gamma + 2} \left[\text{Re} - \frac{15(\gamma + 1)}{3\gamma^2 + \gamma - 4} \sqrt{\frac{3\gamma(\gamma^2 - 1)}{\gamma + 2} \frac{1}{1 - \varphi_0}} \right] \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} - \frac{2(\gamma + 1)}{\gamma + 2} \frac{1}{1 - \varphi_0} \left(1 - \frac{5}{12} \sqrt{\frac{3\gamma(\gamma^2 - 1)}{\gamma + 2} (1 - \varphi_0)} \text{Re} \right) = 0$$

Вид полученного уравнения вновь свидетельствует, что величина Nu/Pe , определяемая через параметр подобия Re , не является независимой.

Величины скоростей V и D в сопутствующей и исходной системах координат определяются из формул

$$V = 6\beta k^2 + 10\alpha\beta k = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma + 2} c_{f0} \left(1 - \frac{5}{3} \frac{\gamma + 2}{\gamma + 1} \frac{\gamma_2}{a_{f0}} \frac{\text{Nu}}{R_0} \right), \quad D = c_{f0} + V \quad (4.4)$$

Требования вещественности числа Nu (Nu/Pe), а также $\text{Nu} \ll 1$, ($\text{Nu}/\text{Pe} < 1$), $D > 0$ налагают ограничения на исходный R_0 размер пузырьков (параметр Re). Из уравнения (4.3) видно, что величина Nu обратно пропорциональна температуропроводности газа λ_2 . При его разрешении относительно Nu необходимо брать знак "+" перед радикалом. Анализ численных расчетов по формулам (4.3) и (4.4) указывает, что интенсивность теплообмена Nu в маловязкой жидкости (вода) меньше, чем в сильновязкой (водоглицериновый раствор 1:1). В обоих несущих жидкостях скорость распространения волны D , являясь сверхзвуковой, монотонно возрастает с уменьшением R_0 .

Аналогичное разд. 2 исследование поведения решения (4.2) около состояния за фронтом волны при соблюдении связи (4.1) указывает, что структура стационарного профиля волны всегда монотонна.

Заключение. Волновой процесс в газожидкостной смеси, где вследствие отклонения от адиабатического поведения газа в пузырьках может происходить достаточно интенсивный межфазный теплообмен, описывается эволюционным уравнением с двумя нелинейностями. При определенной конкретной связи между коэффициентами уравнения, т.е. теплофизическими параметрами смеси, может иметь место усиление сжатия профиля в структуре ударной волны. Оно может происходить не только из-за дробления пузырьков (как объяснялось ранее), но и вследствие взаимодействия межфазного теплообмена со второй гидродинамической нелинейностью, когда при сжатии пузырька количество выделяемого им тепла через непосредственное участие эффекта второй нелинейности трансформируется в дополнительную энергию упругого сжатия жидкости. Существует интервал допустимых значений исходного размера пузырька, при котором одновременно могут проявляться как усиление сжатия, так и осцилляции в структуре фронта волны.

В случае реализации в смеси других видов конкретной связи стационарный профиль волны может не только относительно слабо сжиматься, что соответствует распространению солитона, амплитуда и ширина которого зависят лишь от исходных параметров газового пузырька, но и иметь монотонный характер. Численные расчеты по предложенным аналитическим формулам достаточно удовлетворительно согласуются с результатами известных физических и численных экспериментов.

Автор благодарит А.А. Бармина за внимательное прочтение рукописи, ценные советы и замечания, способствовавшие улучшению оформления работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
2. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 2. М.: Наука, 1987. 360 с.
3. *Гельфанд Б.Е., Степанов В.В., Тимофеев Е.И. и др.* Усиление ударных волн в неравновесной системе жидкость – пузырьки растворяющегося газа // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 1. С. 71–73.
4. *Борисов А.А., Гельфанд Б.Е., Нигматулин Р.И. и др.* Усиление ударных волн в жидкостях с пузырьками пара и растворяющегося газа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 3. С. 594–598.
5. *Оганян Г.Г.* О влиянии межфазного теплообмена на нелинейное распространение волн в газожидкостной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 77–87.
6. *Кудряшов Н.А.* Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 465–470.
7. *Кудряшов Н.А.* Точные решения нелинейных волновых уравнений, встречающихся в механике // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 3. С. 450–453.
8. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painleve property for partial differential equation // J. Math. Phys. 1983. V. 24. № 3. P. 522–526.

Ереван
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
1.11.2001