

УДК 532.542+577.31

© 2002 г. А.А. БЫКОВА, С.А. РЕГИРЕП

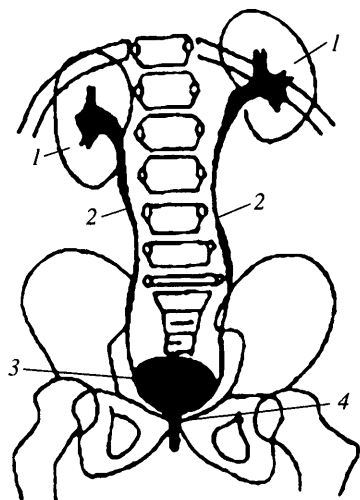
## К ТЕОРИИ ИНФУЗИОННОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ "ДАВЛЕНИЯ РАСКРЫТИЯ" В УРЕТРЕ

В покое мышцы, которыми управляется уретра (мочеиспускательный канал), сокращены, так что ее просвет практически равен нулю по всей длине, и требуется приложение механических усилий (например, за счет подъема давления в мочевом пузыре), чтобы ее раскрыть. Снижение сократительной активности мышц является одной из причин недержания мочи. Распространенный метод оценки "запирательной способности" уретры состоит в том, что в уретру вводится катетер, имеющий вблизи своего конца отверстия на боковой поверхности. Вначале катетер проникает в мочевой пузырь, а затем извлекается с постоянной скоростью, причем в него все время шприцем нагнетается (инфузируется) жидкость с постоянным расходом, которая далее вытекает в зазоре между катетером и стенкой уретры. Давление нагнетания принимается за локальную меру запирательной способности, а его зависимость от положения катетера считается важной диагностической характеристикой.

Ниже рассматривается простая модельная задача о продольно однородной системе в виде упругой трубки, натянутой на участок катетера, когда начальные напряжения в трубке постоянны по длине. Несжимаемая вязкая жидкость вытекает из отверстий катетера и просачивается в тонком слое вдоль катетера. Модельная задача использует приближение смазочного слоя в предположении, что кривизна слоя мала. На основе анализа результатов и сопоставления модели с реальной процедурой измерений в уретре обсуждаются, во-первых, связь измеряемых величин с истинными характеристиками уретры, и, во-вторых, возможности постановки более реалистичной модельной задачи.

**1. Описание системы.** Мочевыводящая система человека (фиг. 1) состоит из трубок и резервуаров, через которые моча из почек выводится наружу [1, 2]. Каждая почка (1) соединена с мочевым пузырем (детрузором) (3) длинной трубкой – мочеточником (2). С интервалом в несколько секунд небольшие объемы мочи проводятся в мочевой пузырь посредством перистальтических сокращений мышечной стенки мочеточника. Радиус мочевого пузыря составляет примерно 5 см. При объеме содержимого менее 100 мл (а после сокращения в нем остается 1–2 мл) пузырь схлопывается. Уретра (4) – это трубка, также оснащенная мышцами, по которой моча выводится из мочевого пузыря. В покое она схлопнута благодаря мышечному сокращению: ее стенки сморщены и складки заполнены вязким слизистым секретом. В процессе мочеиспускания уретра раскрывается (включаются как пассивные, так и активные механизмы) до эффективного диаметра, не превышающего нескольких мм. У женщин длина уретры составляет примерно 4 см, толщина стенки – около 5 мм. Большинство мышечных волокон стенки уретры расположены продольно, но есть и кольцевые мышцы во внешнем слое (см. далее фиг. 2, адаптировано из [2]). Эти мышцы, как и мышцы тазового дна, должны обеспечивать "непротекание" уретры. Давление в брюшной полости, которое передается на стенки мочевого пузыря, действует также и на примыкающую к пузырю часть уретры.

Чисто механическая "слабость" уретры проявляется в спонтанном вытекании порций мочи при повышении давления в брюшной полости вследствие кашля, чихания, поднятия тяжестей и т.п. Это явление называют недержанием, точнее –



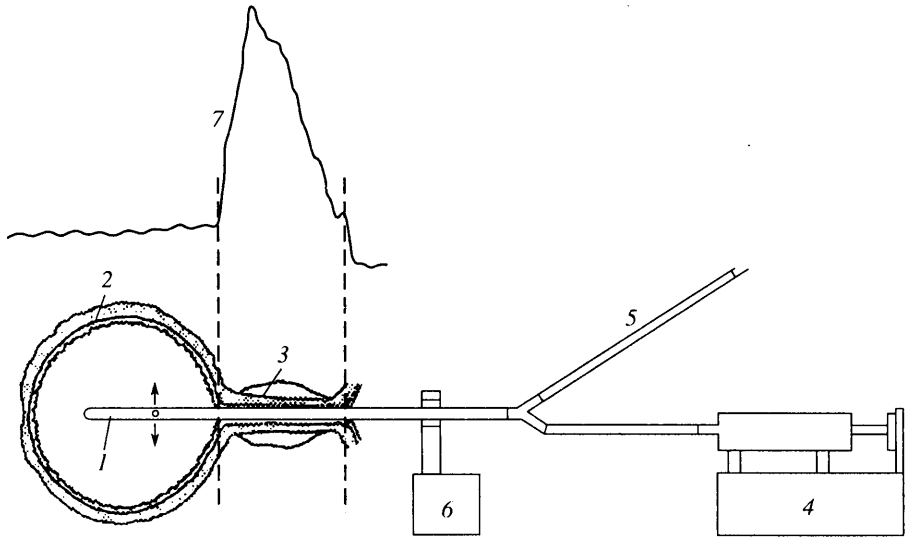
Фиг. 1. Общая схема мочевыводящих путей: 1 – почки, 2 – мочеточники, 3 – мочевой пузырь, 4 – уретра

истинным механическим недержанием в отличие от вызываемого другими причинами, например дисфункцией мочевого пузыря. Разработка способов лечения во многом зависит от ясного понимания причин недомогания, поэтому важно иметь ясное представление о механических свойствах объекта.

Клинические исследования в уродинамике включают в себя измерения нескольких основных типов: давления и объема мочевого пузыря, давления, скорости и расхода жидкости в уретре во время мочеиспускания, и механических свойств уретры. Врача часто интересует, насколько хорошо закрыт просвет уретры в покое, поэтому необходимо определение диагностического показателя, характеризующего напряжения в ткани "покоящейся" уретры. Таким показателем принято считать [2–4] "давление раскрытия", т.е. давление, которое нужно поддерживать внутри уретры для того, чтобы она находилась в раскрытом состоянии (в литературе используется иногда термин "закрывающее давление" или даже просто "давление"). Из морфологических и анатомических данных ясно, что давление раскрытия меняется вдоль уретры. Поэтому введено представление о "профиле давления" как о зависимости давления раскрытия от координаты вдоль уретры.

В инфузионном (одном из наиболее распространенных) методе измеряют давление, необходимое для прокачивания жидкости (или газа) в уретру через боковые отверстия в цилиндрическом катетере, расположенные вблизи его конца [2–4]. Катетер вводят через уретру, сначала достигая мочевого пузыря, а затем медленно вытягивают обратно, одновременно подавая постоянный поток жидкости. Внешний диаметр катетера составляет несколько миллиметров. Отверстия для подачи жидкости (экспериментально установлено, что необходимо не меньше двух) имеют диаметр в доли миллиметра и находятся на расстоянии до 5 см от конца катетера, с тем, чтобы в начале процедуры они располагались в мочевом пузыре. Фиг. 2 изображает блок-схему эксперимента у женщин: 1 – катетер с отверстиями, 2 – мочевой пузырь, 3 – уретра и обслуживающая ее мускулатура, 4 – шприц-инфузатор в конце нагнетательного тракта, 5 – измерительный тракт, 6 – двигатель катетера, 7 – запись давления  $p_m$  в зависимости от положения отверстий катетера.

Экспериментально установлено, что оптимальный расход инфузируемой жидкости лежит в пределах от 2 до 10 мл/мин. Расход менее 2 мл/мин даже при очень малых скоростях продвижения собственно катетера вообще не обеспечивает работы метода,



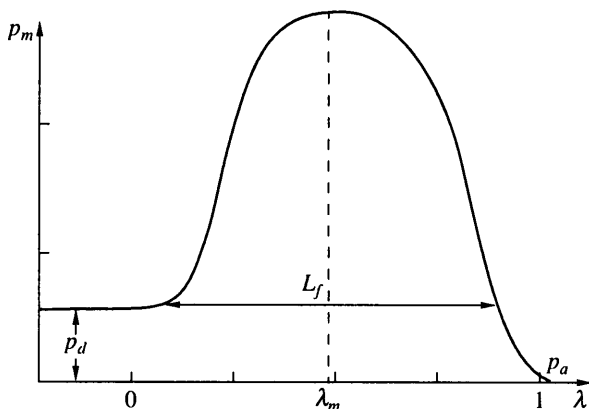
Фиг. 2. Схема инфузионного метода измерения: 1 – катетер с отверстиями, 2 – мочевого пузыря, 3 – уретры и внешняя мускулатура, 4 – шприц-инфузатор, 5 – измерительный тракт, 6 – запись давления нагнетания  $p_m$  в зависимости от положения отверстий катетера

а расход более 10 мл/мин завышает результат измерения. Скорость продвижения катетера при таких значениях расхода жидкости должна составлять не более 0,7 см/с.

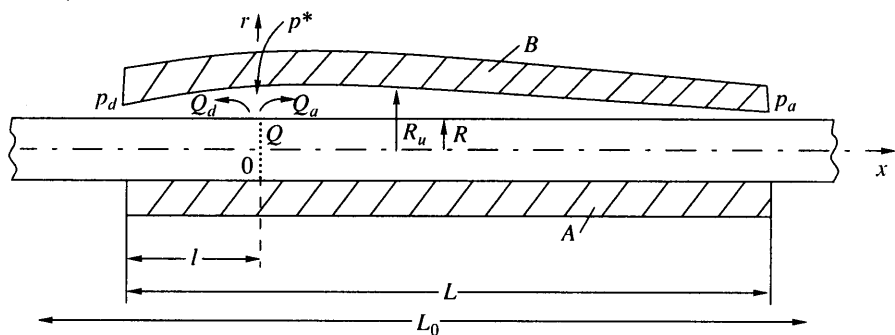
Во время измерений жидкость в зазоре между катетером и стенкой уретры движется в мочевой пузырь или (и) наружу, так что фактически измеряемое давление соответствует гидравлическому сопротивлению зазора, величина которого, в свою очередь, зависит от свойств стенки уретры. Схематическая форма кривой зависимости измеряемого давления от расстояния между местом измерения и отверстиями в катетере ("профиля давления") показана на фиг. 3. Инфузионный метод не является, таким образом, прямым, и требуется осторожность при интерпретации результатов измерений.

Выбор характеристик катетера основан преимущественно на интуитивных соображениях и довольно примитивных оценках, которые не учитывают физической природы плотного примыкания ткани к поверхности катетера, процесса движения жидкости и ряда других обстоятельств. Теоретические исследования механики уретры немногочисленны; после выхода классической монографии [4] наступила длительная пауза, и только в последние годы стали появляться новые публикации на эту тему (см., например, [5–7]), в том числе и критические [8]. Наиболее адекватное описание метода, с точки зрения механики, приведено в [4, 8].

**2. Математическая модель истечения из катетера в зазор с упругой стенкой.** Предпосылки к построению первоначальной математической модели заложены в представленном кратком описании системы мочевыведения и инфузионного метода измерений. Добавим к сказанному, что после введения катетера стенка уретры приобретает приближенно цилиндрическую форму. Катетер вводится в уретру и через него начинается нагнетание жидкости в положении, когда отверстия находятся в полости мочевого пузыря, поэтому давление нагнетания уже в начале процесса превышает внутрипузырное. Когда отверстия катетера оказываются внутри уретры, по мере движения катетера формируется зазор между поверхностью катетера и стенкой уретры. При окончании процедуры отверстия достигают выходного конца уретры, где давление равно атмосферному.



Фиг. 3. Схематический профиль давления  $p_m$  как функции относительного расстояния  $\lambda$  от начала шейки уретры до отверстия катетера;  $L_f$  – функциональная длина профиля



Фиг. 4. Геометрия модельной задачи:  $A$  – расположение упругой трубки на катетере в отсутствие потока,  $B$  – то же при прокачивании жидкости

Рассмотрим квазистационарное течение несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью  $\mu$  в зазоре, окружающей поверхность цилиндрического жесткого катетера радиусом  $R$  и длиной  $L_0$ , когда на катетер надета упругая трубка длины  $L \ll L_0$  (фиг. 4). Трубка, свободная от нагрузок, имеет внутренний радиус  $r_i < R$ , т.е. надевается с некоторым натягом (состояние  $A$  на фиг. 4). Свойства трубки и действующее на нее внешнее давление  $p_e$  неизменны по длине. Ось катетера совместим с осью координат  $x$ . В катетере есть система отверстий, расположенных по периметру некоторого поперечного сечения, отстоящего от левого конца на расстояние  $l_0$  и принимаемого за  $x = 0$ . Жидкость нагнетается через полость катетера, сквозь отверстия поступает в образующийся зазор и по нему вытекает наружу в полости с давлениями  $p_d, p_a$  соответственно слева и справа (состояние  $B$  на фиг. 4). Зазор шириной  $R_u - R$  между катетером и трубкой определяется трансмуральным давлением  $p - p_e$ , которое, в свою очередь, зависит от нагнетаемого расхода  $Q$  и положения отверстий катетера относительно концов трубки. Здесь  $R_u > R$  – внутренний радиус трубки во время прокачивания жидкости. Ради простоты отверстия в катетере считаются равномерно распределенными по периметру и заменяются линейным источником (радиальная скорость описывается  $\delta$ -функцией). Это дает возможность рассматривать далее осесимметричную задачу. Кроме того, для упрощения длина трубки вначале считается неизменной и равной  $L$ . Взаимное расположение отверстий и упругой трубки задается расстоя-

нием  $l$  от левого конца трубки до отверстий и меняется при движении катетера относительно трубки. Вытекая через отверстия, жидкость поступает и в левую, и в правую части зазора. Значения расходов жидкости, текущей влево и вправо, обозначим соответственно через  $Q_d, Q_a$ . Подаваемый в катетер общий расход  $Q$  задан и, очевидно, равен их сумме. Собственное сопротивление нагнетающего тракта будем считать пренебрежимо малым, поэтому давление нагнетания  $p_m$  может быть измерено практически в любой точке тракта.

Примем для описания течения в зазоре приближение теории смазочного слоя. Оно справедливо в слое всюду, исключая малые области вблизи концов трубки и отверстий катетера: длины этих областей по порядку величины совпадают с шириной зазора (это следует из стоковского описания двумерного течения в зазоре). Будем вначале предполагать, что давление в них меняется пренебрежимо мало в сравнении с общими продольными перепадами и что область в зазоре вблизи отверстий катетера можно заменить поверхностью разрыва расхода (градиента давления) при непрерывном давлении.

Модель должна ответить на два вопроса: как показание манометра  $p_m$ , измеряющего давление нагнетания, связано с давлением в зазоре в месте подачи жидкости  $p^* = p(0)$ , как эти величины меняются по мере смещения катетера, и что отражают кривые  $p^*(l), p_m(l)$ ; можно ли и как связать эти кривые с усилием  $p_i$ , действовавшим со стороны трубки на катетер до начала инфузии жидкости.

Давление  $p$ , продольная и радиальная компоненты скорости  $u, v$  в зазоре удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям:

$$P = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad P = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p(x)}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial ur}{\partial x} + \frac{\partial vr}{\partial r} = 0 \quad (2.2)$$

$$r = R, \quad x \in (-l, L-l): \quad u = 0, \quad v = 0$$

$$r = R_u, \quad x \in (-l, L-l): \quad u = 0, \quad v = \frac{Q}{2\pi R} \delta(x) \quad (2.3)$$

Деформацию трубки опишем простейшим образом, полагая, что до нагнетания жидкости связь между внутренним и внешним радиусами в ненагруженном состоянии  $\rho_i, \rho_e$ , радиусом катетера  $R$ , внешним давлением  $p_e$  и давлением на контакте с катетером  $p_i$  дается решением нелинейной задачи Ламе для толстостенного полого цилиндра с фиксированной длиной  $L < L_0$  [9]:

$$p_i - p_e = EF(R/\rho_i, a; k_1, \dots) \quad (2.4)$$

где  $a = \rho_e^2 / \rho_i^2$ ,  $E$  – модуль упругости,  $k_1, \dots$  – безразмерные упругие постоянные. Приблизительно в такой форме обрабатывались эмпирические данные, полученные методом раздувания баллона [4]. С начала процесса прокачивания, после образования тонкого смазочного слоя с давлением  $p$  внутренний радиус трубки  $R_u = R + \Delta(x)$ ,  $\Delta \ll R$  становится переменным по длине: приближенно

$$p - p_i = E_* \frac{R_u - R}{R}, \quad E_* = EF' \left( \frac{R}{\rho_i}, a; k_1, \dots \right) \frac{R}{\rho_i} \quad (2.5)$$

где  $E_*$  – эффективный упругий модуль, возрастающий вместе с  $R$ , штрихом обозначена производная по первому аргументу.

Граничные условия для давления:

$$p(-l) = p_d, \quad p(L-l) = p_a < p_d \quad (2.6)$$

Задача состоит в том, чтобы найти давление  $p^* = p(0)$  в том сечении смазочного

слоя, где расположены отверстия, как функцию общего расхода, расположения трубки относительно отверстий и упругих характеристик трубки. При сделанных предположениях показание манометра  $p_m$  в точности воспроизводит величину  $p^*$ .

Будем рассматривать далее, когда это необходимо, по отдельности течение слева от системы отверстий, и справа от нее. В сечении  $x = 0$  давление непрерывно, а расход и градиент давления терпят конечный разрыв. Определим расходы жидкости как

$$Q' = 2\pi \int_R^{R_u} rudr \quad (2.7)$$

$$Q_d = -Q' \quad (x < 0), \quad Q_a = Q' \quad (x > 0) \quad (2.8)$$

и тогда постановка задачи замыкается уравнением

$$Q_d + Q_a = Q \quad (2.9)$$

Равенство (2.9) не исключает возможности перетекания по зазору слева направо под действием достаточно большой разности давлений  $p_d - p_a$ ; такая ситуация возможна для любого заданного потока  $Q$ .

Из уравнений (2.2) после интегрирования по сечению зазора с учетом граничных условий (2.3) следует, что  $Q_d, Q_a$  не зависят от  $x$ . Интегрирование уравнений (2.1) с учетом граничных условий прилипания (2.3) дает после всех выкладок

$$u = -\frac{PR^2}{4} \left[ B \ln \frac{r}{R} + 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad B = \frac{\kappa^2 - 1}{\ln \kappa}, \quad \kappa = \frac{R_u}{R} \quad (2.10)$$

Величина  $Q'$  после подстановки (2.10) приобретает вид

$$Q' = -\frac{\pi PR^4}{8\mu} \Psi(\kappa), \quad \Psi(\kappa) = (\kappa^2 - 1) \left( \kappa^2 + 1 + \frac{1 - \kappa^2}{\ln \kappa} \right) \quad (2.11)$$

Проинтегрируем (2.11) по  $x$ , пользуясь постоянством расходов, отдельно для левой и правой частей зазора. Для сокращения записи примем  $q = p/E$ , тогда

$$lQ_d = \frac{\pi R^4 E_*}{8\mu} \int_{q_d}^{q_*} \Psi(\kappa) dq, \quad (L-l)Q_a = -\frac{\pi R^4 E_*}{8\mu} \int_{q_*}^{q_a} \Psi(\kappa) dq \quad (2.12)$$

Здесь, согласно (2.5),  $\kappa = 1 + (p - p_i)/E_*$ . Будем полагать, что внешнее давление  $p_e$  постоянно, тогда, подставляя (2.11), (2.12) в (2.8), получим уравнение для определения искомого давления  $p^*$ , причем видно, что структура ответа будет такой:

$$\frac{p^* - p_i}{E_*} = F \left( \frac{\mu L Q}{R^4 E_*}, \frac{l}{L}, \frac{p_d - p_i}{E_*}, \frac{p_a - p_i}{E_*} \right) \quad (2.13)$$

Как следует из процедуры решения,

$$F \rightarrow \frac{p_d - p_i}{E_*} \quad (l \rightarrow 0); \quad F \rightarrow \frac{p_a - p_i}{E_*} \quad (l \rightarrow L) \quad (2.14)$$

Кроме того, при отсутствии потока  $p^* \rightarrow p_i$ ; это следует из (2.13), если принять во внимание необходимые предельные равенства  $p_{d,a} \rightarrow p_i$ .

Решение (2.13) имеет смысл только для стационарного нагнетания жидкости и только при условии  $p^* > p_d$ .

В полном виде интегрирование в (2.11), (2.12) затруднительно. Ограничиваясь случаем узкого зазора ( $|\kappa - 1| \ll 1$ ) и разлагая  $\Psi$ , получим с учетом (2.5)

$$\Psi \approx \frac{4}{3} \left( \frac{p - p_i}{E_*} \right)^3 \quad (2.15)$$

Как и следовало ожидать, без учета кривизны слоя разложение начинается с куба безразмерной толщины. Обозначим для краткости выкладки

$$\Lambda = \frac{l}{L}, \quad \Theta = \frac{6\mu L Q E_*^3}{\pi R^4}$$

$$X_* = (p^* - p_i)^4, \quad X_d = (p_d - p_i)^4, \quad X_a = (p_a - p_i)^4$$

Тогда из (2.11), (2.12), проведя последовательно описанные выше выкладки, получим

$$p^* - p_i = X_*^{1/4}; \quad X_* = 4\Theta\Lambda(1 - \Lambda) + (1 - \Lambda)X_d + \Lambda X_a$$

Допустимый режим, в котором  $p^* > p_d$ , существует тогда и только тогда, когда  $X_*(l)$  имеет положительную производную по  $l$  вблизи  $l = 0$ . Это обеспечивается неравенством  $4\Theta > X_d - X_a$ .

Кривая  $p^*(l)$  имеет в этом случае максимум в точке  $\Lambda = \Lambda_m$ , принадлежащей интервалу  $(0, 1)$ ,

$$\Lambda_m = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{X_d - X_a}{4\Theta} \right) \quad (2.16)$$

Форма кривой симметрична относительно точки  $\Lambda_m$ , поэтому при  $\Lambda = 2\Lambda_m$  давление снова равно  $p_d$  и, следовательно, длина, как ее называют в [2], функциональной части профиля давления (отрезок  $L_f$  на фиг. 3) составляет  $\Lambda = 2\Lambda_m$ . Легко вычислить также максимальное значение давления и другие характеристики профиля давления, а также проследить их изменение в зависимости от параметров, например приближение точки максимума к  $\Lambda = 1/2$  и рост максимального давления с увеличением жесткости трубки. В этом анализе нужно обращать внимание на соблюдение неравенства  $4\Theta > X_d - X_a$ , чтобы избежать ситуаций, не имеющих физического смысла.

Изменим теперь постановку задачи, введя местные гидравлические сопротивления  $Z_d(l)$ ,  $Z_a(l)$  для истечения из зазора на левом и правом концах и  $Z(l)$  – для истечения из катетера в зазор, по-прежнему пренебрегая собственным сопротивлением катетера. В этом случае граничные условия для давления вместо (2.6) принимают вид

$$p(-l) = p'_d \equiv p_d + Z_d Q_d, \quad p(L-l) = p'_a \equiv p_a + Z_a Q_a \quad (2.17)$$

Здесь  $p_{d,a}$  – давления за пределами трубки. Показание манометра определится по формуле  $p_m = p^* + ZQ$  и для него получаем аналог формулы (2.13)

$$\frac{p_m - p_i}{E_*} = \frac{ZQ}{E_*} + F \left( \frac{\mu L Q}{R^4 E_*}, \frac{l}{L}, \frac{p'_d - p_i}{E_*}, \frac{p'_a - p_i}{E_*} \right) \quad (2.18)$$

При прежних предположениях (2.14), (2.15) об упругости трубки после вычисления интегралов (2.11), (2.12) с учетом новых условий (2.17), приходим к соотношению

$$p_m - p_i = ZQ + (X'_*)^{1/4} \quad (2.19)$$

$$X'_* = 4\Theta\Lambda(1 - \Lambda) + (1 - \Lambda)X'_d + \Lambda X'_a, \quad X'_{d,a} = (p'_{d,a} - p_i)^4$$

Относительно зависимости сопротивлений от длины  $l$  будем предполагать, что она проявляется только при значениях  $l$ , очень близких к 0,  $L$ , когда отверстия катетера попадают непосредственно на края трубки. Легко видеть, что при  $Z_{d,a} = 0$  и постоянном сопротивлении  $Z$  положение максимума и длина функциональной части профиля совпадают с найденными выше, а сам профиль смещается вверх.

Получить точное выражение для положения максимума профиля при ненулевых сопротивлениях  $Z_{d,a}$  не удастся, но, дифференцируя (2.19) по  $\Lambda$  и исключая затем производные от  $X'_{d,a}$ ,  $Q_{d,a}$  при помощи представлений этих величин, получим неявное выражение для  $\Lambda_m$  в виде

$$\Lambda_m = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{Y_d - Y_a}{4\Theta} \right)$$

$$Y_d = X'_d + \beta_{d,a}(1 - \Lambda)\Theta \frac{Q_d}{Q} \geq X_d, \quad Y_a = X'_a + \beta_a \Lambda \Theta \frac{Q_a}{Q} \geq X_a$$

$$\beta_{d,a} = 4Z_{d,a}(p_{d,a} + Z_{d,a}Q_{d,a} - p_i)$$

Отсюда при  $Z_{d,a} \rightarrow 0$  следует формула (2.16), сопоставление с которой показывает, что в общем случае сопротивления  $Z_{d,a}$  смещают максимум профиля соответственно влево и вправо. Сам профиль при этом деформируется и не обязательно сохраняет симметрию относительно точки  $\Lambda_m$ . Существенные изменения формы профиля возможны также за счет сильной зависимости сопротивлений от  $l$ . О них нет фактических сведений, но кажется очевидным, что они имеют реальное значение, иначе уже атмосферного давления было бы достаточно для поддержания уретры в раскрытом состоянии.

Как следует из описания обсуждаемой процедуры измерений [2–4], в ней предполагается, что в уретре усилия, прижимающие ткань к катетеру, неоднородны по длине, поэтому в рамках модельной задачи также интересно рассмотреть случай неоднородной упругости, плавно меняющейся по  $x$ . Положим взамен (2.5)

$$p - p_i = E(x) \frac{R_u - R}{R}, \quad E_x = E_* F'(R/\rho_i, \dots)(R/\rho_i); \quad E_* = E_0 \Psi(x)$$

сохраним приближенное соотношение (2.15) и возвратимся к уравнению (2.7), записав его в виде

$$\Psi^3(x) Q' = - \frac{\pi R^4}{6E_0^3 (p - p_i)^{-3}} \frac{\partial p}{\partial x}$$

В результате интегрирования по длине левой и правой частей трубки получим

$$\Lambda \Psi_d^3 Q_d = \frac{Q}{\Theta_0} (X'_* - X'_d), \quad (1 - \Lambda) \Psi_a^3 Q_a = \frac{Q}{\Theta_0} (X'_* - X'_a)$$

$$\Theta_0 = \frac{6\mu L Q E_0^3}{\pi R^4}, \quad \Psi_d^3(\Lambda) = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 \Psi^3 dx, \quad \Psi_a^3(\Lambda) = \frac{1}{L-l} \int_0^{L-l} \Psi^3 dx$$

Наконец, для давления, регистрируемого манометром, найдем

$$p_m - p_i = ZQ + (X'_*)^{1/4}$$

$$X'_* = \frac{4\Theta_0 \Lambda \Psi_d^3 (1 - \Lambda) \Psi_a^3 + (1 - \Lambda) \Psi_a^3 X'_d + \Lambda \Psi_d^3 X'_a}{\Lambda \Psi_d^3 + (1 - \Lambda) \Psi_a^3}$$

Прочие обозначения совпадают с введенными ранее в (2.19). Таким образом,  $p_m$  зависит не от локального значения модуля упругости, а от средних (по длине участков трубки) значений модуля, причем эти средние зависят от положения отверстий катетера и потому будут влиять на форму профиля.

Если в представленной модели формально осуществить импульсное повышение давления в брюшной полости  $p_e$ , которое увеличивает давление в мочевом пузыре



и одновременно прижимает стенку уретры к катетеру, то, как видно из (2.4), (2.5), в результате получатся острые пики и на профиле давления. Однако эти результаты, хоть и похожи на экспериментальные [2], будут иметь ограниченную применимость из-за того, что модель в настоящем виде не приспособлена к анализу быстрых процессов.

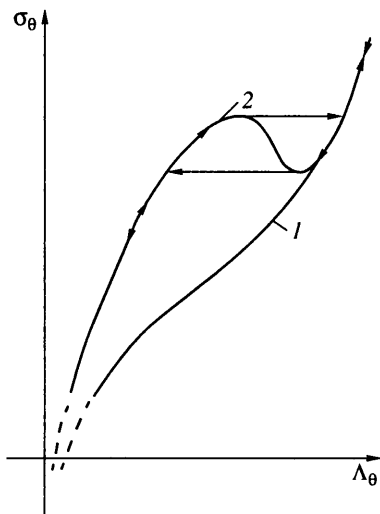
**3. Обсуждение модели.** Проведенный анализ упрощенной задачи показывает, что во всех исследованных обстоятельствах точки профиля не отражают локального состояния трубки в данном сечении. Максимум на профиле не обязательно соответствует максимальному значению силы прижатия ткани к катетеру. Чтобы из профиля давления найти не зависящие от  $\Lambda$  величины  $p_i$ ,  $E_*$ , которые наиболее приемлемы в качестве характеристик трубки, необходимо использовать не менее четырех точек профиля.

Постановка модельной задачи в разд. 2 отличается от условий реальных клинических измерений во многих отношениях: не воспроизведены реальная геометрия стенки уретры (наличие шейки пузыря, например) и катетера (число и расположение отреластий); не приняты во внимание неупругие эффекты в стенке уретры, например релаксация напряжений [10]; не учтена возможность влияния давления в брюшной полости только на часть уретры; не исследованы условия, при которых истечение в зазоре происходит только в одну сторону; не принимается во внимание продольная деформация уретры (и продольные напряжения в ней), возникающие и меняющиеся во время процедуры. Модель квазистатическая и потому не описывает быстрые изменения давления в результате кашля и т.п.; не учитывается активность мышц пузыря и уретры, которая может меняться спонтанно, из-за воздействия движения катетера и из-за инфузии жидкости. Реально регистрируемые профили давления в уретре [2] имеют вблизи концов кривизну, обратную в сравнении со средней частью (как на фиг. 3); модель не воспроизводит это свойство, и остается неясным, как следует усовершенствовать учет условий на концах уретры.

Большинство этих "дефектов" в принципе могло бы быть устранено, хотя бы в рамках численного моделирования, однако численные расчеты нерациональны из-за недостатка фактических количественных сведений, например, о местных гидравлических сопротивлениях, реологических свойствах уретры, о мышечной активности, продольном натяжении или изгибании уретры. В частности, можно более подробно рассмотреть модельную задачу с учетом продольного удлинения, но тогда в формулах типа (2.18)  $\Lambda$  пришлось бы либо задавать, либо определять из продольного уравнения равновесия через заданную продольную силу [9]. Для этого случая можно было бы в рамках теории [9] в подробностях рассмотреть зависимость  $p_i$  от  $p_c$ , которой определяется так называемая передаточная функция [6].

Для врача существен не столько профиль давления, приложенного к катетеру в искусственно созданной ситуации, сколько распределение усилий в ткани уретры до начала инфузии, а еще лучше – до введения катетера. В принципе модель, сходная с рассмотренной, может служить основой для восстановления характеристик упругости и давлений  $p_i$ ,  $p_c$  по профилю давления. Однако в действительности и этого недостаточно, так как механика раскрытия уретры изнутри (за счет медленно происходящих инфузии жидкости или раздувания баллона) и механика раскрытия со стороны детрузорного конца за счет импульсного подъема давления совершенно различны. Естественно предположить, что между измеряемым давлением раскрытия и истинными механическими характеристиками стенки уретры, определяющими качество ее закрытия, существует соответствие, однако его фактическое установление еще только предстоит выполнить.

Формально от задачи Ламе для трубки можно перейти к сплошному цилиндру, находящемуся под действием внешнего давления и продольной силы [6, 10]. Для данной работы это достигается предельным переходом  $r_i \rightarrow 0$ ,  $\mu_i \rightarrow 1$ ,  $a \rightarrow \infty$ . Тогда в этой новой модельной задаче можно вычислить напряжения на оси симметрии и передаточный коэффициент, как это сделано (с сильными упрощениями) в [6].



Фиг. 5. Схематическая зависимость между окружными компонентами напряжений  $\sigma_\theta$  и деформаций  $\Lambda_\theta$  при нулевой (кривая 1 –  $\gamma = 0$ ) и максимальной (кривая 2 –  $\gamma = 1$ ) активации мышц; горизонтальными стрелками показаны критические переходы

Однако такая модель имеет еще более слабое отношение к действительности, нежели рассмотренная в разд. 2, ибо решающим фактором закрытия уретры служит мышечное сокращение.

Некоторый подход к описанию деятельности мышц подсказывают исследования кровеносных сосудов [11, 12]. Если принять для окружных напряжений соотношение

$$\sigma_\theta = Ef_1(\Lambda_\theta) + Nf_2(\gamma, \Lambda_\theta)$$

где  $\Lambda_\theta$  – окружная деформация,  $N$  – максимальное окружное изометрическое напряжение, создаваемое мускулатурой,  $0 \leq \gamma \leq 1$  – параметр активации, то из соотношений размерности следует, что вместо (2.13) получится

$$\frac{p^* - p_i}{E_*} = F\left(\frac{\mu L Q}{R^4 E_*}, \frac{l}{L}, \frac{p_d - p_i}{E_*}, \frac{p_a - p_i}{E_*}, \frac{N}{E_*}, \gamma\right)$$

Продольная неоднородность свойств уретры означает зависимость от координат не только (и не столько) характеристик упругости, сколько параметров активности. Функция  $f_2$  имеет по  $\Lambda_\theta$  колоколообразную форму [11, 12], и поэтому график зависимости  $\sigma_\theta = g(\Lambda_\theta)$  может стать  $N$ -образным. Кривые 1, 2 на фиг. 5 схематически соответствуют пассивному и максимально активному состоянию мышц. В этом случае увеличение трансмурального давления или уменьшение активности мышц могут приводить к скачкообразному увеличению просвета уретры, а снижение давления (например, при выдвигании катетера) или сокращение мускулатуры – к скачкообразному схлопыванию. Условия раскрытия и схлопывания различны (имеет место гистерезис), поэтому давления "раскрытия" и "закрытия" уретры, которые часто упоминаются в литературе, вообще говоря, различны. Релаксационные свойства ткани уретры, вероятно, способны сгладить эти резкие переходы.

**Заключение.** Получаемые инфузионным методом данные неизбежно отражают множество факторов, раздельная количественная оценка которых пока затруднительна, поэтому нецелесообразно пытаться построить подробную модель измерений непосредственно в уретре и даже далеко углубляться в уточнение представленной в разд. 2 модели искусственной системы, не располагая дополнительной фактической

информацией о свойствах уретры. Однако интересно было бы провести эксперимент, воспроизводящий условия модели разд. 2 (упругая трубка на катетере с отверстиями, истечение в области с разным давлением и т.д.) и сопоставить его с результатами приведенных выше решений. Такой эксперимент позволил бы оценить местные гидравлические сопротивления в системе и некоторые погрешности представленных решений. Все это в перспективе понадобится для любой реалистичной модели уретры.

Авторы признательны Л.М. Гумину и И.В. Новожилову, беседы с которыми стимулировали постановку задачи. В тексте статьи с благодарностью приняты во внимание многочисленные полезные замечания Г.А. Любимова. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (коды проектов 99-01-00730, 00-15-96009).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пытель Ю.А., Борисов В.В., Симонов В.А.* Физиология человека. Мочевые пути. М.: Высш. шк., 1992. 288 с.
2. *Urodynamics / Eds. Abrams P. et al.* Berlin etc.; Springer, 1983. 241 p.
3. *Brown M., Wickham J.E.* The urethral pressure profile // *Brit. J. Urol.* 1969. V. 41. № 2. P. 211–217.
4. *Griffiths D.J.* *Urodynamics.* Bristol: Hilger, 1980. 148 p.
5. *Регирер С.А.* Биомеханика: известные и малоизвестные постановки задач // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1992. № 5. С. 8–19.
6. *Kim K.-J., Jurnalov C.D., Lightner D.J., Webb M.J., Lee R.A., An K.-N.* Principles of urodynamics pressure measurement and its implication to female continence function // *J. Biomech.* 1998. V. 31. № 9. P. 861–865.
7. *Bush M.B., Petros P.E., Barrett-Lennard B.R.* On the flow through the human female urethra // *J. Biomech.* 1997. V. 30. № 9. P. 967–969.
8. *Griffiths D.* The pressure within a collapsed tube, with special reference to urethral pressure // *Phys. Med. and Biol.* 1985. V. 30. № 9. P. 951–963.
9. *Green A.E., Adkins J.E.* *Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics.* Oxford: Clarendon Press, 1960; *Грин А., Адкинс Д.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
10. *Thind P.* Stress relaxation phenomenon in the healthy female urethra // *Brit. J. Urol.* 1992. V. 69. № 1. P. 71–74.
11. *Регирер С.А., Шадрина Н.Х.* Математическое моделирование регуляторных реакций в микрососудах скелетной мышцы // *Отчет Ин-та механики МГУ.* 1989. № 3772. 74 с.
12. *Regirer S.A., Shadrina N.Kh.* Microvascular unit of a skeletal muscle: mathematical model of blood flow and regulatory reactions // *Smooth Muscles and Vascular Tone. Abstrs. Rep. Satell. Symp. 31st Intern. Congr. Physiol. Sci. Leningrad,* 1989. P. 57.

Москва

Поступила в редакцию  
22.11.2001