

УДК 532.517.4

© 2002 г. В. Н. ПОПОВ

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ТЕПЛОСОЛЕВОЙ КОНВЕКЦИИ

Рассматривается задача теплосолевого конвекции в приближении Буссинеска. В отличие от распространенных спектральных и разностных подходов расчет турбулентного течения проводится с использованием интегрального представления, что видимо, соответствует природе явления. В статье основное внимание уделяется исследованию пространственной структуры течения. Дополнительно исследуется изменение характеристик течения в зависимости от его параметров.

Рассмотрим двумерную теплосолевою конвекцию в двухдиффузионном режиме. Исследуем изменение параметров течения при увеличении его надкритичности и их зависимость от параметров расчета. Анализ зависимости типа течения в двухдиффузионном режиме от его параметров можно найти в [1].

По горизонтали (x – координата) ставится условие периодичности канала, по вертикали (z) – жесткие свободные от касательных напряжений границы, на которых поддерживается постоянная температура и соленость. В безразмерных переменных конвекция описывается следующей задачей [2]:

$$(1/Pr)J(\Delta\psi) = \Delta^2\psi - RtT_x + RsS_x$$

$$J(T) = \Delta T - \psi_x \tag{1}$$

$$J(S) = G\Delta S - \psi_x$$

$$J = \frac{\partial}{\partial t} + \psi_z \frac{\partial}{\partial x} - \psi_x \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\psi_x = \psi_{zz} = T = S = 0 \quad (z = 0; 1)$$

$$\psi(x + D) = \psi(x), \quad T(x + D) = T(x), \quad S(x + D) = S(x) \tag{2}$$

Соотношения (2) имеют место для всех x , z и t из области определения.

Здесь ψ – функция тока; T – температура; S – соленость; Rt – тепловое число Рэлея; Rs – солевое число Рэлея; Pr – число Прандтля; G – отношение коэффициентов тепловой и солевой диффузии, D – отношение длины расчетной области к ее высоте, индексы обозначают дифференцирование.

В дальнейшем функции $\psi(x, z, t)$, $T(x, z, t)$ и $S(x, z, t)$ ищутся в виде интеграла Фурье по x и ряда Фурье по z [3, 4]:

$$\psi(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \psi_{k,n}(t) \sin kx \sin \pi n z dk$$

$$T(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} T_{k,n}(t) \cos kx \sin \pi n z dk \tag{3}$$

$$S(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} S_{k,n}(t) \cos kx \sin \pi n z dk$$

причем при таком способе разложения граничные условия (2) удовлетворяются автоматически.

При подстановке (3) в (1) получается система интегродифференциальных уравнений относительно коэффициентов $\Psi_{k,n}(t)$, $T_{k,n}(t)$ и $S_{k,n}(t)$, которая затем численно интегрируется по t [2].

Для функций $\Psi(x, z, t)$, $T(x, z, t)$ и $S(x, z, t)$ можно определить [4, 5] многомерные спектральные плотности $g_\Psi(\omega)$, $g_T(\omega)$ и $g_S(\omega)$ как мгновенные, так и осредненные по времени с интервалом Δt (физический смысл ω – интенсивность вихрей с пространственными размерами $2\pi/k$, $2/n$):

$$g_\Psi(k, \pi n) = \frac{1}{16} \Psi_{k,n}^2, \quad g_T(k, \pi n) = \frac{1}{16} T_{k,n}^2, \quad g_S(k, \pi n) = \frac{1}{16} S_{k,n}^2 \quad (4)$$

$$h_\Psi = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} g_\Psi(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{16} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Psi_{k,n}^2(t) dt$$

$$h_T = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} g_T(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{16} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} T_{k,n}^2(t) dt \quad (5)$$

$$h_S = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} g_S(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{16} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} S_{k,n}^2(t) dt$$

В [2] показано, что режим

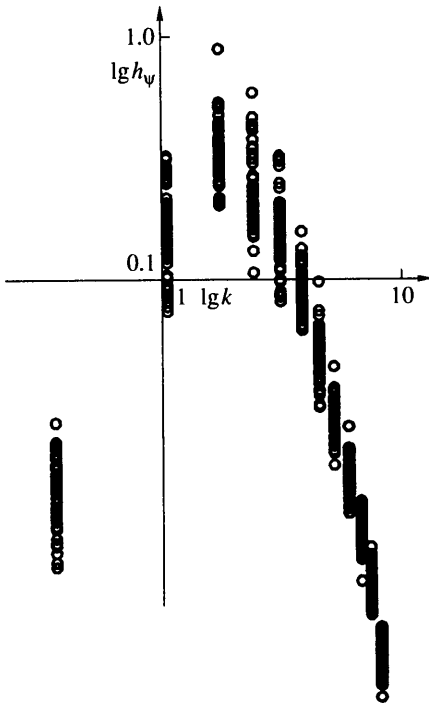
$$\{\text{Pr} = 1, G = 10^{-1/2}, \text{Rt} = 11000, \text{Rs} = 10000, D = 18\} \quad (6)$$

является турбулентным и для него (в отличие от ламинарного) отсутствует выделенный пространственный масштаб, а вместо этого наличествует широкий диапазон частот, амплитуды которых значительно меняются по времени и установить между ними количественные соотношения можно лишь статистическими методами.

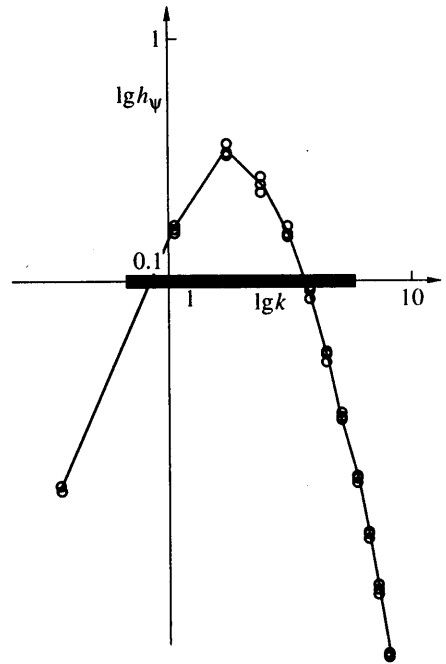
На фиг. 1 в логарифмических координатах приведен пространственный спектр функции тока h_Ψ для турбулентного режима (6) при интервале осреднения $\Delta t = 5$. Из соображений "читаемости" рисунка значения $h_\Psi(k, \pi)$ (все графики приведены для $n = 1$) не соединены отрезками, а представлены несвязными символами o , что позволяет оценить характерный диапазон изменения h_Ψ . Существующий разброс значений связан со значительными временными флуктуациями течения, а не с малостью числа точек осреднения (их на каждое значение приходится 2000).

На фиг. 2 приведены результаты осреднения при значительно большем $\Delta t = 100$ и дополнительно график $h_\Psi(k, \pi)$, осредненный по всему времени расчета данного варианта $\Delta t = 300$. Осреднение $\Delta t = 100$ обеспечивает точность результатов в пределах 5%, что признано достаточным для данной работы, поскольку обнаруженные в работе эффекты значительно превышают указанную величину, а существенное увеличение длительности расчетов невозможно на имеющемся оборудовании (объем данных одного расчета канала $D = 18$ и длительностью $\Delta t = 300$ превышает 400 Mb). На этой же фигуре дополнительно выделена область частот, в которой по линейной теории наблюдается колебательная потеря устойчивости. Тот факт, что полученный пространственный спектр не удовлетворяет "правилу $-5/3$ ", видимо, объясняется тем, что эта аппроксимация получена при $k \sim 5-10 k_m$, и без дополнительного исследования невозможно сделать вывод об асимптотике при $k/k_m \rightarrow \infty$ (здесь k_m – частота "средних" волн), а также тем, что исследовалась двумерная турбулентность, а не истинная трехмерная.

На фиг. 3 показана зависимость полученного пространственного спектра h_Ψ от длины D канала в турбулентном режиме (6).



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Зависимость $h_\psi(k, \pi)$ при $\Delta t = 5$ в режиме $\{Pr = 1, G = 10^{-1/2}, Rt = 11000, Rs = 10000, D = 18\}$

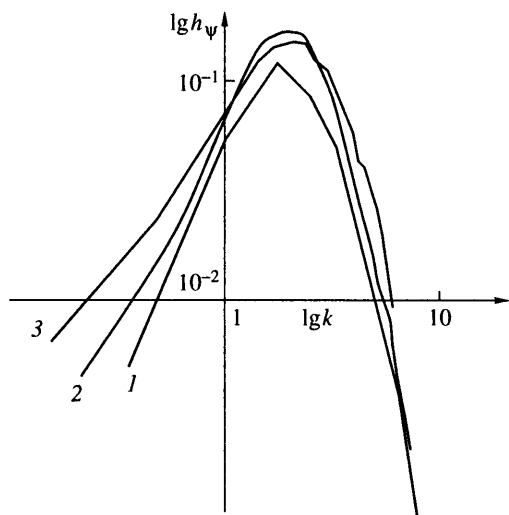
Фиг. 2. Зависимость $h_\psi(k, \pi)$ при $\Delta t = 100$ в том же режиме, что и на фиг. 1

Из фиг. 3 следует, что помимо естественного расхождения результатов в длинноволновой (короткочастотной) области при увеличении D наблюдается некоторый рост в наиболее "энергонесущей" средневолновой области. Вместе с тем (что естественно) спектр в коротковолновой области практически не меняется с ростом D .

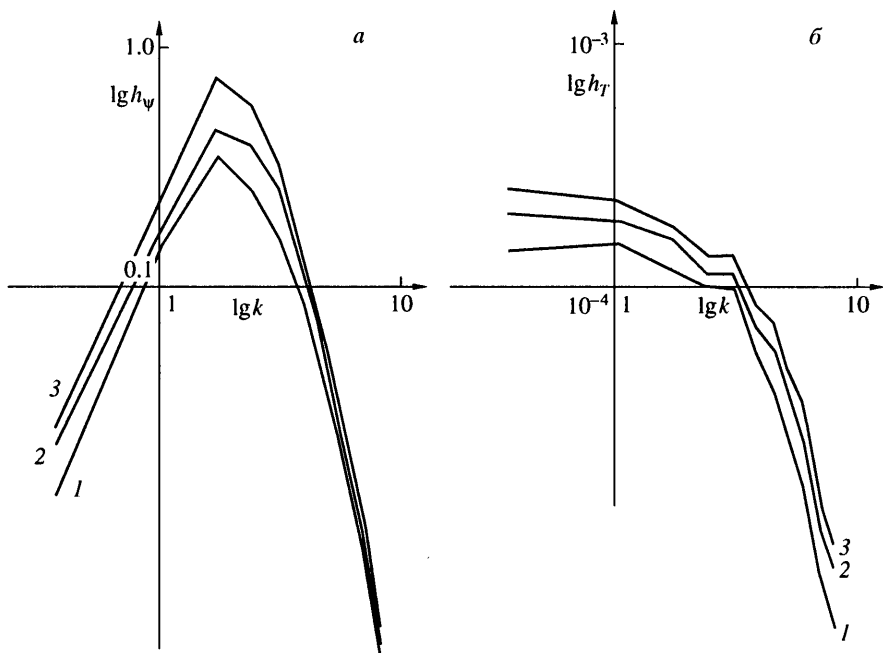
Дополнительно исследованы зависимости статистических характеристик течения от его надкритичности. Для этого были проведены дополнительные расчеты в следующих режимах: $\{Pr = 1, G = 10^{-1/2}, Rt = 11250, Rs = 10000, D = 18\}$ и $\{Pr = 1, G = 10^{-1/2}, Rt = 11500, Rs = 10000, D = 18\}$. Такое сравнительное небольшое увеличение параметра Rt было связано с тем, что в этой области параметров происходит значительное изменение структуры течения и увеличение его интенсивности, и турбулентность течения значительно возрастает при таком изменении параметров.

Отметим два факта. В отличие от функции тока ψ , у которой вторая вертикальная гармоника на 1.5 порядка меньше первой, $h_T(k, 2\pi)$ и $h_S(k, 2\pi)$ сопоставимы с $h_T(k, \pi)$ и $h_S(k, \pi)$. При увеличении надкритичности течения быстрее всего растет $h_\psi(k, \pi)$, $h_\psi(k, 2\pi)$, $h_T(k, 2\pi)$ и $h_S(k, 2\pi)$. Причем если основной рост $h_\psi(k, \pi)$ происходит в диапазоне наиболее энергетически значимых средних волн, то пространственные спектральные плотности T и S растут в основном в низкочастотном (длинноволновом) диапазоне, "отвечающем" за межъячеечное взаимодействие.

Для примера на фиг. 4 приведены графики пространственных спектральных плотностей $h_\psi(k, \pi)$ и $h_T(k, 2\pi)$ соответственно.



Фиг. 3. Зависимость $h_\psi(k, \pi)$ при различных D в том же режиме, что на фиг. 1. Кривые 1, 2, 3 получены при $D = 18, 30, 40$ соответственно



Фиг. 4. Зависимость $h_\psi(k, \pi)$ (а) и $h_T(k, 2\pi)$ (б) при $Rt = 11000, 11250, 11500$ в режиме $\{Pr = 1, G = 10^{-1/2}, Rs = 10000, D = 18\}$ (кривые 1, 2, 3) соответственно

Заключение. Исследована зависимость пространственной структуры и численных характеристик двумерной теплосолевой конвекции в турбулентных двухдиффузионных режимах от параметров течения.

В постановке рассматриваемой задачи, а также в обсуждении полученных результатов большое участие принимал С.Я. Герценштейн. Автор выражает ему глубокую благодарность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Huppert H.E., Moor D.R.* Nonlinear double – diffusive convection // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 78. Pt. 4. P. 821–854.
2. *Герценштейн С.Я., Попов В.Н.* Интегральный метод расчета турбулентной конвекции в горизонтальном слое раствора // *Докл. РАН.* 1998. Т. 363. № 6. С. 769–771.
3. *Гетлинг А.В.* Нелинейная эволюция непрерывного спектра двумерных возмущений в задаче Бенера – Рэлея // *Докл. АН СССР.* 1997. Т. 233. № 2. С. 308–311.
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 495 с.
5. *Дженкинс Г., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения. Вып. 1. М.: Мир, 1971. 316 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.III.2001