

УДК 532.517.013.4

© 2002 г. М.В. УСТИНОВ

## УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ В ПОЛОСЧАТОЙ СТРУКТУРЕ И РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В НЕМ

Исследована устойчивость течения в пограничном слое с периодической по размаху неоднородностью профиля скорости, моделирующей полосчатую структуру, возникающую при повышенной степени турбулентности набегающего потока. Устойчивость исследована в пространственной постановке по отношению к возмущениям с произвольным поперечным периодом. Показано, что при наличии неоднородности дисперсионное соотношение для волн Толмина – Шлихтинга расщепляется на две периодические по поперечному волновому числу ветви, соответствующие симметричным и антисимметричным модам. Найдено решение для пакета мод неоднородного течения, порождаемых периодическим по времени локализованным вдувом отсосом жидкости. Форма такого пакета качественно соответствует форме пакета волн Толмина – Шлихтинга, а тонкая структура возмущений внутри него радикально отличается.

При повышенной степени турбулентности набегающего потока ( $0.1 < \varepsilon_T < 10\%$ ) ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое начинается с роста низкочастотных возмущений [1]. Визуализация потока [2] показывает, что эти возмущения представляют собой полосчатую структуру – чередующиеся длинные полосы с повышенной и пониженной скоростью, которые хаотически появляются и исчезают с относительно малой частотой. Ниже по потоку на фоне этой структуры происходит быстрый рост высокочастотных возмущений, приводящий к турбулизации течения. К настоящему времени имеется удовлетворительное теоретическое описание только первой стадии перехода при повышенной степени турбулентности – образования полосчатой структуры. Развитие высокочастотных возмущений этой структуры остается во многом неясным несмотря на большое количество экспериментальных исследований, посвященных этой проблеме. С одной стороны, в [3] показано, что в пограничном слое с полосчатой структурой возможно развитие искусственно созданных волн Толмина – Шлихтинга и они ускоряют процесс перехода. С другой – в пограничном слое с искусственно созданной неоднородностью, имитирующей полосчатую структуру, наблюдалось развитие возмущений более высокой частоты, принципиально отличных от волн Толмина – Шлихтинга [4]. Подобные возмущения, связанные с перегибной неустойчивостью профиля скорости в направлении размаха, найдены в результате теоретического исследования устойчивости течения с продольными вихрями [5].

Устойчивость течения в полосчатой структуре исследована теоретически во временной постановке в [6]. В отличие от [5] основное течение в [6] не содержало продольных вихрей. В [6] было показано, что в полосчатой структуре существуют неустойчивые возмущения двух типов: симметричные моды, аналогичные волнам Толмина – Шлихтинга, и антисимметричные моды, возникающие из-за неустойчивости профиля скорости в направлении размаха, причем они имеют сравнимые инкременты нарастания. Настоящая работа продолжает [6] в двух направлениях: исследование устойчивости полосчатой структуры в пространственной постановке по отношению к возмущениям произвольного поперечного периода и изучение развития пакетов этих возмущений, порожденных локализованным источником.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости с кинематическим коэффициентом вязкости  $\nu$  в пограничном слое на плоской пластине. Начало декартовой системы координат разместим на поверхности пластины на расстоянии  $L$  от передней кромки. Оси координат  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  направим вдоль потока по нормали к поверхности пластины и в трансверсальном направлении соответственно. В качестве масштабов для координат и скорости выберем толщину пограничного слоя  $\delta = \sqrt{\nu L / u_\infty}$  и скорость набегающего потока  $u_\infty$ . Предположим, что в пограничном слое имеется стационарная периодическая по размаху неоднородность продольной компоненты скорости, созданная внешним воздействием, сосредоточенным далеко вверх по потоку от начала координат. Принимая за основное течение однородный по  $x$  пограничный слой, соответствующий его состоянию в начале координат, рассмотрим развитие в нем бесконечно малых возмущений, порожденных периодическим по времени вдувом-отсосом жидкости через локализованный участок поверхности пластины. Для этого поле скоростей представим в виде

$$\mathbf{V}(x, y, z, t) = \mathbf{V}_b(y, z) + \varepsilon \mathbf{V}_p(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{V}_b = \{U_0(z) + u_b(z) \cos \beta_0 y, 0, 0\}, \quad \mathbf{V}_p = \{u, v, w\}$$

$$w(x, y, 0) = f(x, y) \quad (1.2)$$

где первый член представляет собой основное течение, а второй – малые возмущения, вызванные вдувом-отсосом, распределенным по закону (1.2), в котором  $f$  – финитная функция. Остальные компоненты скорости возмущений на стенке удовлетворяют условию прилипания. Предполагается также, что возмущения затухают на большом расстоянии от стенки и вверх по потоку от области вдува-отсоса

$$u, v(x, y, 0) = 0, \quad u, v, w(x, y, \infty) = u, v, w(-\infty, y, z) = 0 \quad (1.3)$$

Для описания развития возмущений будем использовать систему уравнений для вертикальных составляющих скорости и завихренности, эквивалентную уравнениям Навье – Стокса. Линеаризация ее около основного течения дает уравнения для возмущений

$$\left\{ \left[ U_b \frac{\partial}{\partial x} - \left( i\omega + \frac{\Delta}{R} \right) \right] \Delta - \left( \frac{\partial^2 U_b}{\partial z^2} + \beta_0^2 u_b \cos \beta_0 y \right) \frac{\partial}{\partial x} - 2\beta_0 u_b \sin \beta_0 y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right\} w +$$

$$+ 2\beta_0 \sin \beta_0 y \frac{\partial}{\partial z} \left( u_b \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

$$\left[ U_b \frac{\partial}{\partial x} - \left( i\omega + \frac{\Delta}{R} \right) \right] \eta + \left[ \frac{\partial U_b}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} + \beta_0 \sin \beta_0 y \left( u_b \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial u_b}{\partial z} \right) \right] w - \beta_0^2 u_b \cos \beta_0 y v = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$$

где  $R = u_\infty \delta / \nu$  – число Рейнольдса,  $U_b = U_0 + u_b \cos \beta_0 y$  – продольная компонента скорости основного течения. Для решения этих уравнений будем использовать преобразование Фурье по переменным  $x$  и  $y$ , при котором произвольной функции  $g(x, y)$  ставится в соответствие ее фурье-образ  $g_*(k, \beta)$ , вычисляемый по формуле

$$g_*(k, \beta) = F[g] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy g(x, y) e^{-i(kx + \beta y)}$$

Если возмущения не затухают при  $x \rightarrow +\infty$ , то применение этого преобразования неправомерно и его нужно рассматривать как формальную операцию, смысл которой станет ясен в дальнейшем.

Применяя преобразование Фурье к уравнениям (1.4) и граничным условиям (1.2), (1.3) и учитывая равенства

$$F[g \cos \beta_0 y] = \frac{1}{2}[g_- + g_+], \quad F[g \sin \beta_0 y] = \frac{1}{2}[g_- - g_+]; \quad g_{\pm} = g_*(k, \beta \pm \beta_0)$$

получим краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \left[ i(kU_0 - \omega) - \frac{\Delta_*}{R} \right] \Delta_* w_* - ikU_0'' w_* + \frac{ik}{2} [c_- u_b w'' + (c_- - 1) u_b' w' - (u_b'' + \gamma^2 u_b) w + \\ & + d_- (u_b \eta_-)' + c_+ u_b w'' + (c_+ - 1) u_b' w' - (u_b'' + \gamma^2 u_b) w + d_+ (u_b \eta_+)' ] = 0 \\ & \left[ i(kU_0 - \omega) - \frac{\Delta_*}{R} \right] \eta_* + i\beta U_0' w_* + \frac{i}{2} [e_- (u_b w_-)' + h_- u_b \eta_- + e_+ (u_b w_+)' + h_+ u_b \eta_+] = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$w_*(0) = f_*(k, \beta), \quad w'_*(0) = \eta_*(0) = w_*(\infty) = \eta_*(\infty) = 0$$

$$\Delta_* = \frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2; \quad c_{\pm} = \frac{1}{\gamma_{\pm}^2} (\gamma^2 \pm \beta_0^2); \quad d_{\pm} = \pm \frac{2k\beta_0}{\gamma_{\pm}^2}$$

$$e_{\pm} = \pm \frac{\beta_0}{\gamma_{\pm}^2} (\gamma^2 \pm \beta\beta_0); \quad h_{\pm} = \frac{k}{\gamma_{\pm}^2} (\gamma^2 \pm 2\beta\beta_0); \quad \gamma^2 = k^2 + \beta^2; \quad \gamma_{\pm}^2 = k^2 + (\beta \pm \beta_0)^2$$

где штрих обозначает производную по  $z$ .

В эти уравнения помимо фурье-образов вертикальной скорости и завихренности  $w_*$ ,  $\eta_*$  в точке  $k, \beta$  входят их фурье-образы в сдвинутых точках  $k, \beta \pm \beta_0$ , обозначенные  $w_{\pm}$ ,  $\eta_{\pm}$ . Чтобы найти их решение, предположим сначала, что фурье-образ формы вдува-отсоса  $f_*$  отличен от нуля только в малой по сравнению с  $\beta_0$  окрестности произвольного волнового числа  $\beta_*$ , которую обозначим  $O(\beta_*)$ . Тогда из вида уравнений (1.5) становится ясно, что их решения  $w_*$ ,  $\eta_*$  отличны от нуля как в окрестности  $\beta_*$ , так и в такой же окрестности точек  $\beta_{*n} = \beta_* \pm n\beta_0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Для удобства анализа представим такое решение в виде суммы финитных функций  $w_n$ ,  $\eta_n$ , каждая из которых описывает решение в окрестности  $n$ -й точки  $\beta_{*n}$ .

$$w_*, \eta_* = \sum_{n=-N}^N w_n, \eta_n(k, \beta) \quad (1.6)$$

$$w_k, \eta_n(k, \beta) = w_*, \eta_*(k, \beta + n\beta_0); \quad \beta \in O(\beta_*)$$

$$w_n, \eta_n(k, \beta) = 0; \quad \beta \notin O(\beta_*)$$

Рассмотрев  $\beta$  в окрестности  $\beta_*$  легко видеть, что в ней

$$w_*, \eta_*(\beta) = w_n, \eta_n(\beta) \quad w_{\pm}, \eta_{\pm}(\beta) = w_*, \eta_*(\beta \pm \beta_0) = w_{n\pm 1}, \eta_{n\pm 1}(\beta)$$

и (1.5) сводится к системе уравнений для  $w_n, \eta_n, w_{n\pm 1}, \eta_{n\pm 1}$  вида

$$L(k, \beta_n) w_n + L^+(k, \beta_n) w_{n+1} + L^-(k, \beta_n) w_{n-1} + N^+(k, \beta_n) \eta_{n+1} + N^-(k, \beta_n) \eta_{n-1} = 0 \quad (1.7)$$

$$M(k, \beta_n) \eta_n + R^+(k, \beta_n) w_{n+1} + R^-(k, \beta_n) w_{n-1} + M^+(k, \beta_n) \eta_{n+1} + M^-(k, \beta_n) \eta_{n-1} = 0$$

$$w_0(0) = f_*(k, \beta) \quad w_n(0) = 0; \quad n \neq 0$$

$$w'_n(0) = \eta_n(0) = w'_n(\infty) = \eta_n(\infty) = 0$$

где  $\beta_n = \beta + n\beta_0$ , а  $L, L^{\pm}, M, M^{\pm}, R^{\pm}$  – линейные дифференциальные операторы, вид

которых ясен из сравнения с (1.5). Так как  $n$  и в этом рассуждении произвольно, то (1.7) справедливы для всех  $n$ . Записав эти уравнения для всех  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$  и полагая  $w_{\pm(N+1)}, \eta_{\pm(N+1)} \equiv 0$ , получим замкнутую систему  $2 \times (2N + 1)$  уравнений для  $2 \times (2N + 1)$  неизвестных функций  $w_n, \eta_n$ . Фурье-образы продольной и трансверсальной компонент скорости  $u_*, v_*$  также ищутся в виде сумм, аналогичных (1.6), слагаемые  $u_n, v_n$  которых выражаются через  $w_n, \eta_n$  из преобразованных уравнений неразрывности и определения вертикальной завихренности

$$u, v(k, \beta) = \sum_{n=-N}^N u_n, v_n(k, \beta)$$

$$u_n = (ikw'_n - i\beta_n \eta_n) / \gamma_n^2, \quad v_n = (i\beta_n w'_n + ik\eta_n) / \gamma_n^2, \quad \gamma_n^2 = k^2 + \beta_n^2 \quad (1.8)$$

Рассмотрим теперь распределение вдува-отсоса общего вида, фурье-образ которого отличен от нуля в достаточно широком интервале волновых чисел  $\beta$ . Разбив этот интервал на некоторое конечное количество узких по сравнению с  $\beta_0$  подинтервалов представим  $f_*$  в виде суммы финитных функций, отличных от нуля на этих подинтервалах. Для каждой такой функции решение имеет вид (1.6), (1.8) и находится из (1.7). Ввиду линейности рассматриваемой задачи ее решение для суммарного фурье-образа вдува-отсоса  $f_*$  есть сумма решений для финитных функций, на которые он разбит. Следовательно, суммарное решение также имеет вид (1.6), (1.8) и находится из краевой задачи (1.7). Отметим, что в отличие от случая узкой финитной функции  $f_*$ , рассмотренного выше, слагаемые  $w_n, \eta_n$  в (1.6) отличны от нуля во всем широком интервале  $\beta$ , на котором  $f_* \neq 0$ . При этом второе и третье равенства в (1.6), служившие определениями  $w_n$  и  $\eta_n$ , теряют смысл, и фурье-образы вертикальных компонент скорости и завихренности при всех  $\beta$  являются суммами по крайней мере нескольких слагаемых в первой сумме (1.6). Функции  $w_n$  и  $\eta_n(\beta)$  в случае "широкого" фурье-образа  $f_*(\beta)$  следует воспринимать просто как решения системы (1.7).

В дальнейшем будем рассматривать задачу (1.7) также для комплексных  $k$ . При однородных граничных условиях на поверхности пластины из (1.7) получается задача на собственные значения, описывающая устойчивость периодического течения в пограничном слое в пространственной постановке. Ее решениям  $k_j(\omega, \beta)$  соответствуют моды неустойчивости вида

$$\mathbf{V}_p = \sum_{n=-N}^N \mathbf{V}_{nj}(z) e^{i(k_j x + \beta_n y - \omega t)}, \quad \mathbf{V}_{nj} = \{u_{nj}, v_{nj}, w_{nj}\} \quad (1.9)$$

где  $u_{nj}, v_{nj}$  выражаются с помощью (1.8) через собственные функции  $w_{nj}, \eta_{nj}$ , соответствующие собственному значению  $k_j$ . В точках  $k = k_j(\omega, \beta)$  решения неоднородной системы (1.7)  $w_n, \eta_n$ , а также  $u_n$  и  $v_n$  имеют полюсы. Вычеты решения неоднородной системы в этих полюсах пропорциональны собственным функциям, соответствующим  $k_j$ .

При преобразовании  $\beta \rightarrow \beta + m\beta_0$ ;  $w_n, \eta_n(\beta + m\beta_0) \rightarrow w_{n+m}, \eta_{n+m}(\beta)$  однородная система (1.7) переходит в себя, а неоднородная – в аналогичную систему с измененными граничными условиями на стенке  $w_m(\beta) = f_*(\beta + m\beta_0)$ ;  $w_n(\beta) = 0, n \neq m$ . Это означает, что дисперсионное соотношение для мод неустойчивости периодического течения  $k = k_j(\omega, \beta)$  является периодической функцией  $\beta$  с периодом  $\beta_0$ , а собственные функции в точках, отстоящих на целое число периодов, связаны соотношением

$$k_j(\omega, \beta + m\beta_0) = k_j(\omega, \beta), \quad \{u_n, v_n, w_n\}(\beta + m\beta_0) = \{u_{n+m}, v_{n+m}, w_{n+m}\}(\beta) \quad (1.10)$$

Подстановка этого равенства в (1.9) показывает, что возмущения, соответствующие собственным функциям в этих точках одинаковы, т.е. моды при  $\beta$ , отстающем на период, описывают одно и то же явление. Важным следствием (1.10) является то, что полюсы решений неоднородной системы (1.7) при  $\beta$ , отстающих на целое число периодов, совпадают и вычеты в них связаны соотношением

$$\operatorname{res}_{k=k_j} \{u_n, v_n, w_n\}(\beta + m\beta_0, z) = c_m(\beta) \operatorname{res}_{k=k_j} \{u_{n+m}, v_{n+m}, w_{n+m}\}(\beta, z) \quad (1.11)$$

где коэффициент пропорциональности  $c_m$  зависит от  $m$  и  $\beta$ , но не зависит от  $n$  и  $z$ . Оно получается непосредственно из (1.10) и пропорциональности вычетов решений неоднородной системы собственным функциям однородной.

Если неоднородное течение устойчиво к возмущениям заданной частоты  $\omega$  при всех  $\beta$ , то возмущения затухают при  $|x, y| \rightarrow \infty$  и даются обратным преобразованием Фурье. В дальнейшем ограничимся нахождением возмущений продольной составляющей скорости, которые в устойчивом течении имеют вид

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=-N}^N \int_{-\infty}^{+\infty} u_n^f(\beta, x) e^{i\beta y} d\beta, \quad u_n^f(\beta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_n(k, \beta) e^{ikx} dk \quad (1.12)$$

Исследуем асимптотику полученного решения при  $|x| \rightarrow \infty$ , для чего сначала рассмотрим его фурье-образ при преобразовании по  $\beta$   $u_n^f(\beta, x)$  при больших  $x$ . Для этого второй интеграл в (1.12), используя теорему Коши, запишем в виде

$$u_n^f(\beta, x) = - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{c_r} u_n(k, \beta) e^{ikx} dk + 2\pi i \sum_{k=k_j} \operatorname{res} u_n(k, \beta) e^{ik_j x}$$

Здесь  $c_r$  – полуокружность радиуса  $r$ , расположенная в верхней полуплоскости, а сумма во втором слагаемом берется по полюсам, расположенным между  $c_r$  и действительной осью. Если течение устойчиво, например при малой амплитуде неоднородности, то все полюсы расположены выше действительной оси и оба слагаемых быстро затухают при  $x \rightarrow \pm\infty$ . По мере увеличения амплитуды неоднородности один из полюсов, расположенный в точке  $k_0$ , приближается к действительной оси. Решение при  $x \rightarrow +\infty$  постепенно начинает определяться вкладом этого полюса и медленно затухает как  $\exp(-\operatorname{Im}(k_0(x)))$ . При дальнейшем увеличении амплитуды неоднородности течение становится неустойчивым, полюс пересекает действительную ось и слагаемое, определяемое им, исчезает. В этот момент решение меняется скачкообразно и становится быстро затухающим при  $x \rightarrow +\infty$ , вместо того чтобы стать растущим вследствие появления неустойчивости. Для получения решения, удовлетворяющего физическому смыслу, в соответствии с принципом, предложенным в [7], к выражению для  $u_n^f$  (1.12) при  $\operatorname{Im}(k_0) < 0$  необходимо добавить слагаемое, определяемое вычетом в точке  $k_0$

$$u_n^f(\beta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_n(k, \beta) e^{ikx} dk + u_{nr}(\beta) e^{ik_0 x}, \quad u_{nr}(\beta) = 2\pi i \operatorname{res}_{k=k_0} u_n(k, \beta)$$

Дополненное таким образом решение приобретает свойство непрерывности при пересечении полюсом действительной оси и дает растущее при  $x \rightarrow +\infty$  решение при наличии неустойчивых мод.

При  $x \rightarrow +\infty$  интеграл в выражении для  $u_n^f$  остается конечным и им можно пренебречь по сравнению с экспоненциально растущим членом, связанным с вычетом. Учитывая это обстоятельство, получим из (1.12) следующее выражение для возмущений скорости при больших  $x$

$$u = \sum_{n=-N}^N \int_{-\infty}^{+\infty} u_{nr}(\beta) e^{i(k_0(\beta) + \alpha\beta)x} d\beta, \quad \alpha = \frac{y}{x} \quad (1.13)$$

Аналогичные выражения для неустойчивых возмущений пограничного слоя, порожденных вибрацией участка поверхности, получены в [8, 9]. Вывод и обоснование их подробно описаны в [8], специально посвященной этому вопросу.

Из приведенных ниже численных результатов следует, что система (1.7), вообще говоря, имеет два полюса в нижней полуплоскости, соответствующих двум типам мод неустойчивости неоднородного течения. Инкрименты нарастания мод первого типа имеют максимумы по  $\beta$  ири  $\beta = \pm m\beta_0$ , а второго типа при  $\beta = \beta_0/2 \pm m\beta_0$ ;  $m = 1, 2, \dots$ . В точках максимумов эти моды имеют симметричное и антисимметричное распределение продольной компоненты скорости по  $y$  соответственно и будут в дальнейшем называться симметричными и антисимметричными модами. При тех значениях параметров  $a$  и  $\omega$ , когда имеются неустойчивые моды обоих типов, возмущения скорости представляют собой сумму двух слагаемых вида (1.11), одно из которых учитывает вклад симметричных, а второе – антисимметричных мод.

Ограничимся сначала рассмотрением слагаемого для симметричных мод. Для них действительная часть показателя экспоненты в (1.13) имеет максимумы в точках  $\beta_m = \pm m\beta_0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , окрестности которых дают определяющий вклад в интеграл для  $u$  при  $x \rightarrow \infty$ . Применяв метод перевала для оценки вклада в интеграл каждого максимума, получим

$$u = \sqrt{\frac{2\pi}{|K_0''(\beta_s)|x}} \left( \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N u_{nr}(\beta_s + m\beta_0) \exp\{i[k_0(\beta_s) + (\beta_s + m\beta_0)\alpha]x + i\theta\} \right)$$

Здесь  $\beta_s$  – ближайшая к  $\beta = 0$  точка перевала функции  $\psi(\beta) = i(k_0(\beta) + \alpha\beta)$ , рассматриваемой для комплексных  $\beta$ , которая находится из условия  $\psi'(\beta_s) = 0$ ,  $\theta$  – угол между линией  $\text{Im}(\psi) = \text{const}$ , проходящей через  $\beta_s$  и действительной осью. При выводе этого выражения использовалась периодичность дисперсионного соотношения для периодического по размаху течения, из которой следует, что точки перевала, соответствующие максимумам в  $\beta_m$ , получаются сдвигом  $\beta_s$  на  $m\beta_0$  вдоль действительной оси и  $K_0''$  и  $\theta$  во всех точках перевала одинаковы.

Учитывая соотношение (1.11), перепишем выражение для возмущений в более удобном для анализа виде

$$u = A(\alpha, x)[\Phi(\alpha, y) \exp\{i(k_{sr}(\alpha)x + \beta_{sr}(\alpha)y)\}]; \quad A(\alpha, x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\psi_r(\alpha)x} \quad (1.14)$$

$$\Phi(\alpha, y) = \sqrt{\frac{2\pi}{|K_0''(\beta_s)|}} \left( C(\beta_s) \sum_{n=-N}^N u_{nr}(\beta_s(\alpha)) e^{in\beta_0 y} \right) e^{i\theta(\alpha)}; \quad C(\beta_s) = \sum_{m=-M}^M c_m(\beta_s)$$

где  $k_{sr}$ ,  $\beta_{sr}$ ,  $\psi_r$  – действительные части  $k_0$ ,  $\beta$  и  $\psi$  в точке перевала, а  $c_m(\beta_s)$  – коэффициент пропорциональности из (1.11) в вычете  $k_0$ . Это выражение представляет собой произведение почти периодической по  $x$  и  $y$  функции в квадратных скобках, дающей картину течения, соответствующую моде неустойчивости неоднородного течения, и медленно меняющегося амплитудного множителя  $A(\alpha, x)$ . Линия, на которой  $A(\alpha, x)$  достигает некоторой заданной величины, может трактоваться как граница возмущенной области. С логарифмической точностью она совпадает с линией постоянного значения показателя экспоненты в выражении для  $A$

$$x = \text{const} / \psi_r(y/x) \quad (1.15)$$

Полученная форма возмущенной области не зависит от распределения вдува-отсоса  $f(x, y)$  и определяется исключительно дисперсионным соотношением для мод неустойчивости неоднородного течения.

Формулы (1.14), (1.15) имеют место и для антисимметричных мод. Единственное различие заключается в том, что в этом случае  $\beta_s$  – точка перевала, ближайшая к  $\beta_0/2$ , а  $k_0(\beta)$  – положение полюса, соответствующего антисимметричной моде.

Для численного решения задача (1.7) сводилась к системе дифференциальных уравнений с правыми частями и однородными граничными условиями. Для дискретизации последней применялся метод коллокаций, аналогичный описанному в [10]. В качестве узлов коллокации использовались нули полинома Якоби  $P_Q^{(1,1)}(z)$ . Число узлов  $Q$  выбиралось равным 51, количество "гармоник" в представлении для возмущений (1.6)  $N$  выбиралось равным 11. Такое количество степеней свободы, как показали последующие методические расчеты, достаточно для нахождения мнимой части собственного значения  $k_0$  с точностью до  $\approx 2-3\%$  от ее максимального значения. После дискретизации задача сводилась к системе  $(2Q - 1) \times (2N + 1)$  линейных уравнений для значений искомых функций в узлах коллокации. Ввиду линейности системы уравнений (1.7) вычеты всех входящих в нее функций пропорциональны фурье-образу вдува-отсоса в точке  $k_0$ :  $f_*(k_0, \beta)$ . Поэтому вычеты вычислялись при  $f_*(k_0, \beta) \equiv 1$ , а затем домножались на фурье-образ вдува-отсоса. Для этого вычислялась функция  $g(k) = |u_0(k)|^{-1}$  и методом Ньютона находилась точка  $k_0$ , в которой эта функция обращается в ноль. Одновременно вычислялась производная  $g'(k)$ , которая использовалась для нахождения вычета

$$\operatorname{res}_{k=k_0} u_0 = \frac{1}{g'(k_0)}$$

Точка перевала  $\beta_s$  искалась методом Ньютона как ноль функции  $\psi'(\beta)$ . Коэффициенты пропорциональности  $c_m$  находились непосредственно нахождением вычетов решения в точке  $k_0(\beta_s + m\beta_0)$ . Вычеты в сдвинутых точках  $\beta_s + m\beta_0$  быстро уменьшались с ростом  $m$ , поэтому для получения хорошей аппроксимации решения оказалось достаточным  $M = 4$ .

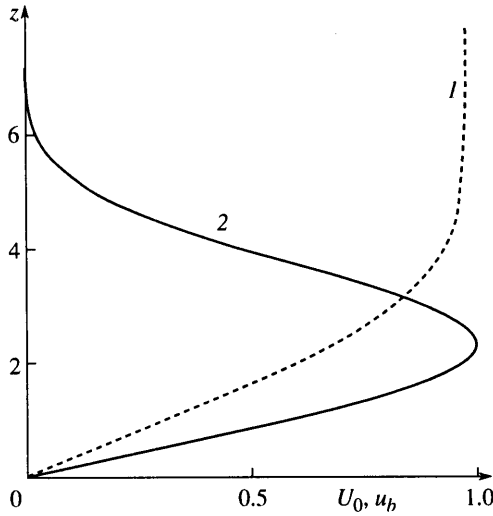
**2. Результаты расчетов.** Цель работы – исследование развития возмущений в пограничном слое с полосчатой структурой, порожденной внешней турбулентностью. Поэтому профили скорости постоянной  $U_0(z)$  и периодической  $u_b(z)$  составляющих основного течения выбирались из условия максимального соответствия профилям средней скорости и низкочастотных пульсаций в таком пограничном слое. В [1] не было обнаружено отклонений средней скорости от решения Блазиуса, потому последнее использовалось в качестве  $U_0(z)$

$$U_0(z) = f'(z), \quad f'' + \frac{1}{2}ff'' = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (2.1)$$

Профиль пульсаций скорости в экспериментах [1, 2] очень хорошо описывается аналитическим решением, полученным в [11], которое применялось для задания профиля неоднородности

$$u_b(z) = a \frac{\eta f''}{\max_z(zf'')} \quad (2.2)$$

где  $f$  – функция Блазиуса из (2.1),  $a$  – амплитуда неоднородности. Это решение также практически совпадает с профилями неоднородностей, порождаемых в пограничном слое продольными [12] и вертикальными [13] вихрями набегающего потока. Профили постоянной (2.1) и периодической (2.2) составляющих основного течения показаны на фиг. 1. Последующие расчеты развития возмущений выполнялись при  $\beta_0 = 0.6$  и  $R = 600$ . Волновое число  $\beta_0$  было выбрано из условия совпадения периода неоднородности  $\lambda = 2\pi/\beta_0$  с данными эксперимента [1]. Выбор малого числа Рейнольдса объясняется ранним ламинарно-турбулентным переходом при повышенной степени турбулентности.

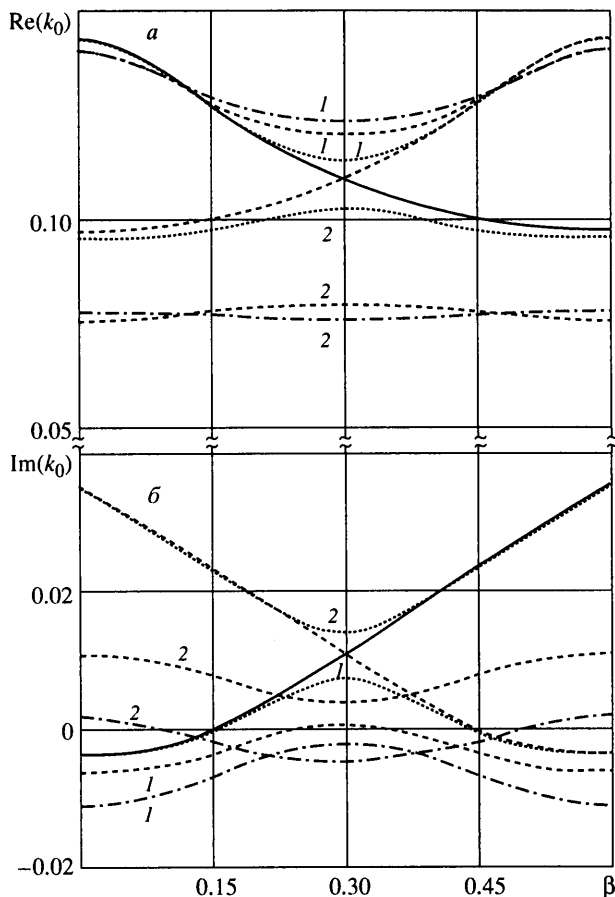


Фиг. 1. Профили постоянной  $U_0(z)$  (1) и периодической  $u_b(z)$  (2) составляющих основного течения

Прежде чем приступить к нахождению пакетов возмущений от локализованного источника было исследовано дисперсионное соотношение для симметричных и антисимметричных мод. Полученные результаты в виде зависимостей действительной и мнимой частей собственного значения  $k_0$  от поперечного волнового числа  $\beta$  показаны на фиг. 2. Дисперсионное соотношение периодическое по  $\beta$ , поэтому показан один период от 0 до  $\beta_0$ . Зависимости  $k_0(\beta)$  для волн Толмина – Шлихтинга (при  $a = 0$ ) и слабонеоднородного течения при  $a = 0.05$  показывают, как неперидическое дисперсионное соотношение для однородного пограничного слоя непрерывно переходит в периодическое. Оказывается, что при наличии сколь угодно малой неоднородности дисперсионное соотношение расщепляется на две ветви. Одна из них (обозначенная цифрой 1) близка к дисперсионному соотношению для однородного течения на первой половине периода  $0 < \beta < \beta_0/2$ , а вторая (2) – на второй  $\beta_0/2 < \beta < \beta_0$ . На оставшихся половинах периода эти ветви близки к дисперсионному соотношению для волн Толмина – Шлихтинга, сдвинутому на период (построено жирной штриховой линией). При  $\beta = 0$  и  $\beta_0/2$  модам первой ветви соответствуют возмущения с симметричным распределением скорости  $u(y)$ , а модам второй ветви – антисимметричные возмущения. Поэтому, как упоминалось ранее, моды первой ветви называются симметричными, а второй – антисимметричными.

Из способа расщепления дисперсионного соотношения на симметричные и антисимметричные моды и сохранения общего вида зависимостей  $\text{Im}(k_0)(\beta)$  при увеличении амплитуды неоднородности становится ясным, почему максимумы инкрементов нарастания симметричных мод расположены при  $\beta = \pm n\beta_0$ , а антисимметричных – при  $\beta = \beta_0/2 \pm n\beta_0$ . Этим значениям  $\beta$  соответствуют моды основного периода и субгармонические моды, рассмотренные ранее в [6]. Вывод [6] о том, что наиболее быстрорастущими симметричными возмущениями являются моды основного периода, а наиболее неустойчивые антисимметричные возмущения – субгармонические полностью совпадает с полученными здесь результатами. Из фиг. 2 следует также и обратный вывод, что наименее быстрорастущие симметричные моды являются субгармоническими, а наименее неустойчивые антисимметричные моды – моды основного периода.

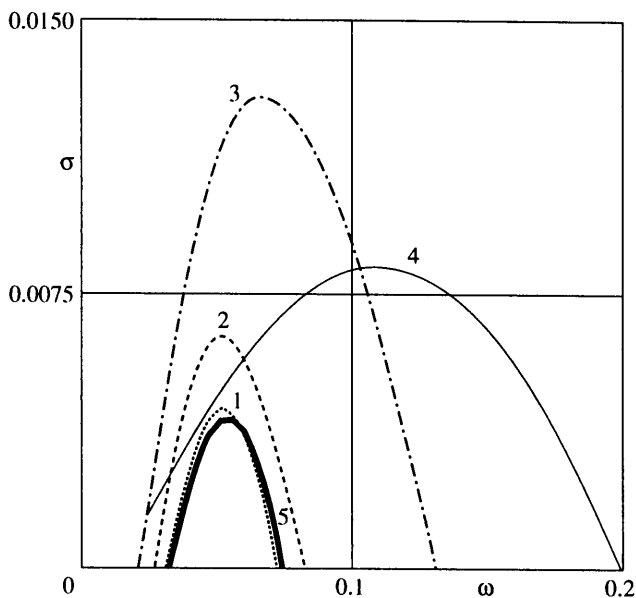




Фиг. 2. Зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей собственного значения  $k_0$  от  $\beta$  при  $\omega = 0,05$  при различных амплитудах неоднородности  $a$ : Сплошная линия – волны Толмина – Шлихтинга ( $a = 0$ ); пунктир –  $a = 0,05$ ; штриховая линия –  $a = 0,2$ ; штрихпунктир –  $a = 0,3$ . 1 – симметричные, 2 – антисимметричные моды

Для симметричных мод зависимости действительной части  $k_0$  от  $\beta$  относительно слабо меняются при увеличении амплитуды неоднородности и особенно вблизи максимумов инкрементов нарастания мало отличаются от дисперсионного соотношения для волн Толмина – Шлихтинга. Это соответствует выводу [6] о том, что фазовая скорость симметричных мод близка к скорости волны Толмина – Шлихтинга. Для антисимметричных мод действительная часть  $k_0$  существенно уменьшается при увеличении амплитуды неоднородности, что приводит к повышенной фазовой скорости этих мод  $c = \omega / k_0 \approx 0,6$  при  $a \geq 0,2$ , также отмеченной в [6].

Зависимости максимальных по  $\beta$  инкрементов нарастания симметричных и антисимметричных мод  $\sigma = -\text{Im}(k_0)$  от частоты при различных амплитудах неоднородности показаны на фиг. 3. Из них видно, что при умеренной амплитуде неоднородности  $a = 0,1$  инкременты нарастания симметричных мод и волн Толмина – Шлихтинга практически совпадают. При дальнейшем увеличении амплитуды неоднородности инкременты нарастания этих мод заметно возрастают, и диапазон неустойчивых частот расширяется. При наибольшей исследованной амплитуде  $a = 0,3$ , кроме того, максимум инкрементов нарастания смещается в сторону больших частот. Полученные результаты делают понятной неизменность характеристик волны Толмина – Шлих-

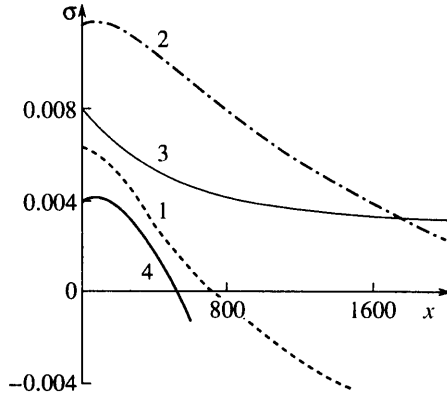


Фиг. 3. Зависимости максимальных по  $\beta$  инкрементов нарастания  $\sigma = -\text{Im}(k_0)$  от частоты  $\omega$ : 1–3 – симметричные моды при  $a = 0.1, 0.2, 0.3$ ; 4 – антисимметричные моды при  $a = 0.3$ ; 5 – волны Толмина – Шлихтинга

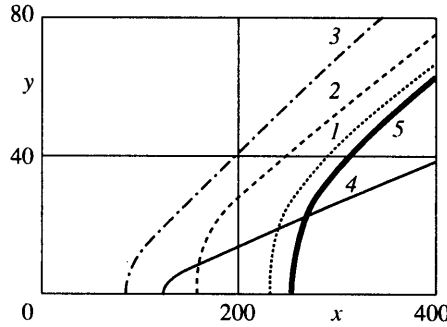
тинга в пограничном слое при повышенной степени турбулентности, обнаруженную в [3], когда амплитуда низкочастотных пульсаций (неоднородности) в пограничном слое составляла  $\sim 10\%$ . С другой стороны, рост высокочастотных пульсаций в пограничном слое при повышенной степени турбулентности происходит, когда амплитуда низкочастотных пульсаций достигает  $20\text{--}30\%$ , что примерно соответствует минимальной амплитуде неоднородности, приводящей к существенному изменению характеристик устойчивости пограничного слоя.

Зависимость  $\sigma(\omega)$  для антисимметричных мод показана на фиг. 3 только для  $\alpha = 0.3$ , так как при остальных исследованных амплитудах неоднородности  $a = 0.1$  и  $0.2$  эти моды оказались затухающими. Даже при такой большой амплитуде неоднородности инкременты нарастания антисимметричных мод оказались меньше, чем скорость роста симметричных возмущений. Расхождение с [6], где при  $a = 0.3$  наблюдалась обратная ситуация, объясняется различием периода неоднородности. Следует также отметить заметно большую частоту максимума инкрементов нарастания антисимметричных мод  $\omega \approx 0.11$  по сравнению как с частотой наиболее быстрорастущих волн Толмина – Шлихтинга  $\omega \approx 0.05$ , так и симметричных мод при  $a = 0.3$   $\omega \approx 0.07$ . Большая частота антисимметричных мод по сравнению с симметричными соответствует данным эксперимента [4].

При развитии возмущений вниз по потоку в реальном пограничном слое их характеристики постепенно изменяются вследствие изменения основного течения. Для оценки этого эффекта предположим, что период неоднородности остается постоянным по продольной координате. Тогда вследствие однородности основного течения по времени и периодичности по размаху, временной и поперечный периоды возмущений остаются постоянными по  $x$ , т.е. остаются постоянными  $\omega$  и  $\beta$ . Изменение характеристик возмущений происходит из-за изменения профилей скорости осредненной и периодической составляющих основного течения. Последние предполагаются неизменными в координатах, отнесенных к местной толщине пограничного слоя, т.е. определяются (2.1), (2.2), в которых  $f$  является функцией переменной  $z^* = z / \sqrt{1 + x/R}$ .



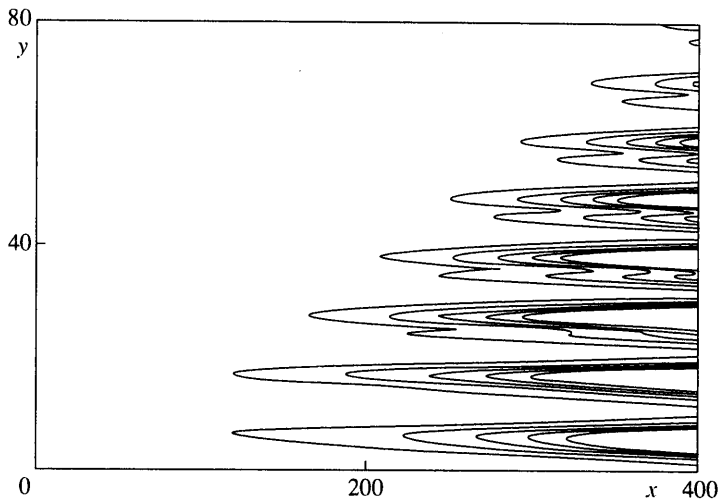
Фиг. 4. Зависимости максимальных по  $\beta$  инкрементов нарастания  $\sigma = -\text{Im}(k_0)$  от  $x$ : 1-2 – симметричные моды при  $\omega = 0.05$  и  $a = 0.2; 0.3$ ; 3 – антисимметричная мода при  $\omega = 0.1$  и  $f = 0.3$ ; 4 – волна Толмина – Шлихтинга при  $\omega = 0.05$



Фиг. 5. Форма возмущенной области для возмущений от точечного источника. Обозначения аналогичны фиг. 3

Зависимости инкрементов нарастания волн Толмина – Шлихтинга и мод неустойчивости неоднородного течения от продольной координаты  $x$ , полученные в этих предположениях, показаны на фиг. 4. Из них видно, что неоднородность приводит не только к увеличению инкрементов нарастания и диапазона неустойчивых частот, но и к повышению протяженности участка, на котором нарастают возмущения заданной частоты. Особенно сильно этот эффект проявляется для антисимметричных возмущений, которые продолжают нарастать практически с постоянной скоростью при увеличении  $x$ . Несмотря на меньшие инкременты нарастания при  $x = 0$ , эти моды могут оказаться даже более опасными, чем симметричные из-за большей длины участка нарастания и более широкого диапазона неустойчивых частот.

Зависимости  $\sigma(x)$  также позволяют оценить пределы применимости выражений для возмущений от точечного источника (1.13), (1.14), полученных в плоскопараллельном приближении. Последнее предполагает, что собственное значение  $k_0$  не зависит от  $x$  и является функцией только поперечного волнового числа  $\beta$ . Для действительной части  $k_0$ , определяющей длину волны возмущений, это условие выполняется с точностью  $\sim 1\%$  (зависимости  $\text{Re}(k_0)(x)$  не приводятся с целью экономии места). Мнимая часть собственного значения  $\text{Im}(k_0) = -\sigma$  существенно зависит от  $x$ , как видно из фиг. 4. Однако можно ожидать, что выражения для возмущений точечного источника (1.13), (1.14) дают качественно верные результаты, когда изменение  $\sigma$  при увеличе-



Фиг. 6. Распределения амплитуды пульсаций продольной компоненты скорости в плоскости  $(x, y)$  для пакета симметричных мод при  $\omega = 0.05$ ,  $a = 0.3$ . Шаг изолиний 4

ний  $x$  мало по сравнению с его зависимостью от  $\beta$ . Так как инкременты нарастания изменяются по  $\beta$  на свою величину, то плоскопараллельное приближение можно считать качественно верным при изменении  $\sigma$  по  $x$  на 20–30%. Из фиг. 4. видно, что это условие выполняется для возмущений сильнонеоднородного течения (симметричных и антисимметричных) при  $a = 0.3$  до  $x = 400$ –500, а для симметричных мод при  $a = 0.2$  и волн Толмина – Шлихтинга до  $x = 250$ –300.

Так как наиболее быстрорастущими возмущениями при  $a \leq 0.3$  оказались симметричные моды, то исследовались в основном пакеты этих мод, порожденные локализованным вдувом-отсосом с частотой  $\omega = 0.05$ . Асимптотическая форма этих пакетов при различных амплитудах неоднородности, рассчитанная по формуле (1.15), показана на фиг. 5. Она качественно не отличается от формы пакета волн Толмина – Шлихтинга, только при наибольшей амплитуде неоднородности  $a = 0.3$  пакет становится несколько шире. Единственный рассчитанный пакет антисимметричных мод при  $a = 0.3$ ,  $\omega = 0.1$  оказался значительно уже пакетов симметричных мод даже при меньшей амплитуде  $a = 0.2$ .

Основное отличие пакетов возмущений неоднородного течения от пакетов волн Толмина – Шлихтинга состоит в их мелкомасштабной структуре. Она показана на фиг. 6, где построены изолинии модуля возмущений продольной компоненты скорости  $|u|$  в плоскости  $(x, y)$ , вычисленной по точной формуле (1.14) для симметричных мод при  $a = 0.3$ ,  $\omega = 0.05$ . Эти результаты получены для фурье-образа  $f_x(k, \beta) = 1$ , соответствующего вдуву-отсосу, распределенному по дельта функции Дирака  $f(x, y) = 2\pi\delta(x)\delta(y)$ . Физически такое распределение соответствует очень узкой и короткой по сравнению с длиной волны и поперечным периодом возмущений области вдува-отсоса. Вместо плавного распределения амплитуды возмущений в пакете волн Толмина – Шлихтинга (см. [8, 9]) пульсации в неоднородном течении сосредоточены в узких полосах, соответствующих полосам пониженной скорости основного течения. Такое поведение возмущений достаточно очевидно и соответствует данным эксперимента [4] и распределению  $u(y)$  для симметричных мод, полученному в [6]. Неожиданным результатом является постепенная трансформация распределения скорости с одним максимумом, совпадающим с минимумом скорости основного течения, в распределение с двумя максимумами по сторонам минимума по мере удаления от центра к периферии пакета. Такое изменение формы пульсаций можно объяснить тем, что

в центре пакета в соответствии с (1.14) возмущения определяются модой с  $\beta = 0$ , которая имеет максимум в минимуме скорости, а по бокам – модой с комплексным  $\beta = \beta_s$ , имеющей, вероятно, распределение скорости с двумя максимумами.

**Заключение.** Исследована устойчивость течения в пограничном слое с периодической по размаху неоднородностью профиля скорости, моделирующей полосчатую структуру. При появлении неоднородности сколь угодно малой амплитуды дисперсионное соотношение для волн Толмина – Шлихтинга расщепляется на две периодические по  $\beta$  ветви, соответствующие симметричным и антисимметричным модам. Наиболее быстрорастущими являются симметричные моды, однако антисимметричные возмущения имеют более широкий диапазон неустойчивых частот, а при заданной частоте нарастают на более протяженном участке вдоль потока.

Найдено решение для пакета мод неоднородного течения, порождаемых периодическим по времени локализованным вдувом отсосом жидкости. В отличие от гладкого распределения амплитуды в пакете волн Толмина – Шлихтинга, возмущения неоднородного течения сосредоточены в узких полосах, соответствующих пониженной скорости основного течения. В центре пакета в каждой полосе имеется один максимум пульсаций, совпадающий с минимумом скорости основного течения, а по бокам – два максимума, расположенные по сторонам минимума.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№№ 01-01-00614 и 00-15-96069).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Westin K.J.A., Boiko A.V., Klingmann B.G., Kozlov V.V., Alfredsson P.H.* Experiments in a boundary layer subjected to free – stream turbulence. Pt 1: Boundary layer structure and receptivity // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 281. P. 193–218.
2. *Alfredsson P.H., Matsubara M.* Streaky structures in transition // *Transitional Boundary Layers in Aeronautics* / Eds. R.A.W.M. Henkes, J.L. van Ingen. Amsterdam: Elsevier. 1996. P. 373–386.
3. *Boiko A.V., Westin K.J.A., Klingmann B.G., Kozlov V.V., Alfredsson P.H.* Experiments in a boundary layer subjected to free – stream turbulence. Pt 2: The role of TS-waves in the transition process // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 281. P. 219–246.
4. *Bakchinov A.A., Grek G.R., Klingmann B.G.B., Kozlov V.V.* Transition experiments in a boundary layer with embedded streamwise vortices // *Phys. Fluids.* 1995. V. 7. № 4. P. 820–832.
5. *Xiuyang Y., Liu J.T.C.* The secondary instability in Goertler flow // *Phys. Fluids A.* 1991. V. 3. № 8. P. 1845–1847.
6. *Устинов М.В.* Устойчивость неоднородного по размаху течения в пограничном слое // *Изв. РАН. МЖГ.* 1998. № 6. С. 54–63.
7. *Терентьев Е.Д.* Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое // *ПММ.* 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 264–272.
8. *Рыжов О.С., Савенков И.В.* Пространственные возмущения, вносимые гармоническим осциллятором в пограничный слой на пластине // *Ж. вычисл. математики и мат. физики.* 1988. Т. 28. № 4. С. 591–602.
9. *Мануйлович С.В.* О восприимчивости течения в пограничном слое к вибрациям локализованного участка обтекаемой поверхности // *Докл. АН СССР.* 1989. Т. 305, № 3. С. 563–566.
10. *Рождественский Б.Л., Стоинов М.И.* Алгоритмы интегрирования уравнений Навье – Стокса, имеющие аналоги законам сохранения массы, импульса и энергии // *Препринт № 119 М.: ИТПМ им. М.В. Келдыша.* 1987. 28 с.
11. *Crow S.C.* The spanwise perturbation of two-dimensional boundary layers // *J. Fluid Mech.* 1966. V. 24, pt 1. P. 153–164.
12. *Andersson P., Berggren M., Henningson D.S.* Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // *Phys. Fluids.* 1999. V. 11. № 1. P. 134–150.
13. *Устинов М.В.* Восприимчивость пограничного слоя на плоской пластине с затупленной передней кромкой к стационарной неоднородности набегающего потока // *ПМТФ.* 2000. № 4. С. 93–100.