

УДК 532.5.013.13:537.634

© 2001 г. А.Н. ВИСЛОВИЧ, А.Б. СУХОЦКИЙ

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ПЛАСТИНУ В МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

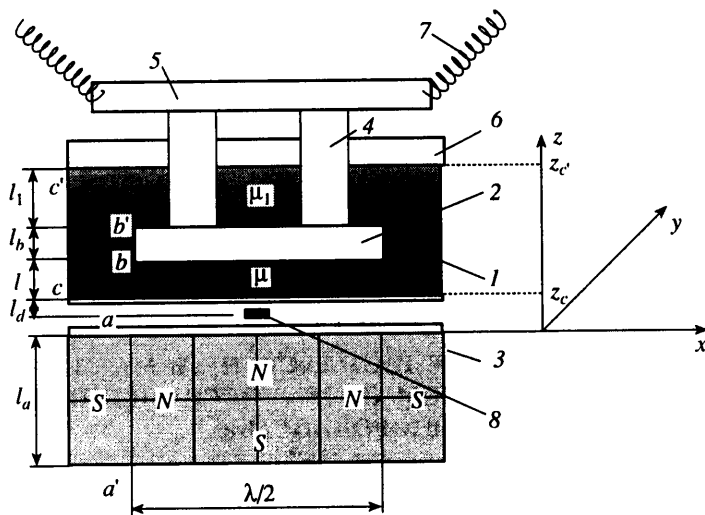
Проведены измерения гидростатической силы, действующей на немагнитное тело в виде вытянутой плоскопараллельной пластины, погруженной в магнитную жидкость в резервуаре с плоскими стенками, параллельными поверхностям пластины. Резервуар помещается в неоднородное поле, модуль которого экспоненциально убывает в нормальном к плоскости пластины направлении. Разработаны приближенные модели для теоретического описания этой силы, учитывающие, в частности, вносимые жидкостью возмущения поля и нелинейность закона намагничивания жидкости.

Интенсивность распределенных магнитодипольных сил в магнитных жидкостях в неоднородном магнитном поле сравнима и может значительно превышать интенсивность сил гравитации, что существенно видоизменяет законы плавания в этих средах [1–4]. Различные проявления сил, действующих на твердые тела в магнитных жидкостях (или, короче, магнитных сил), показаны в [5–14].

Магнитную силу можно разделить на две составляющие: "внешнюю" силу, которая рассчитывается по внешнему полю (безындукционное приближение), и силу "самовоздействия", которая обусловлена индуцированным жидкостью полем и равна разности точной и внешней силы. Внешняя магнитная сила аналогична архимедовой, для которой механизм гравитационного самовоздействия жидкости не учитывается как пренебрежимо малый. Безындукционное приближение дает хорошие результаты при любых значениях поля, если малой величиной является начальная магнитная восприимчивость жидкости $\chi_0 = M/H$, $H \rightarrow 0$. Если χ_0 не мало, то безындукционное приближение применимо в достаточно сильных полях, когда по всему объему жидкости малой является эффективная магнитная восприимчивость $\chi = M/H$.

Наиболее общий подход для расчета магнитной силы в безындукционном приближении разработан в [15] (см. также [1, 3]), где показано, что силу, действующую не только на немагнитные тела, но и на левитирующие источники магнитного поля, можно приближенно рассчитать без нахождения индуцированных жидкостью полей.

Удобной моделью для теоретического исследования эффектов самовоздействия является приближение линейно намагничивающейся среды [12, 13], хотя применимость этого приближения для практических целей весьма ограничена: закон намагничивания магнитных жидкостей близок к линейному для весьма умеренных полей: $H \leq 5-10$ кА/м. Формулы для магнитной силы, действующей со стороны линейно намагничивающейся жидкости, применимость которых не ограничена условием малой магнитной восприимчивости среды, получены в [2, 6, 12–14]. Индуцированные магнитные поля при вычислении силы в нелинейно намагничивающейся среде учтены в [11] при рассмотрении плавания малых немагнитных тел цилиндрической, сферической и пластинчатой формы. Эта ситуация реализуется в магнитожидкостных сепараторах [1, 3, 16].



Фиг. 1. Схема экспериментальной установки; 1 – кювета, 2 – немагнитное плавающее тело, 3 – магнитная система, 4 – стержни скольжения, 5 – нагрузочная площадка, 6 – неподвижная корпусная пластина, 7 – пружины, 8 – датчик измерителя магнитной индукции

Во многих практически важных случаях вклад силы самовоздействия в полную силу не превышает 5–10%, так что безындукционное приближение составляет основу для технических расчетов. Однако в случае плавления немагнитных тел в однородном внешнем поле, когда градиент поля связан только с собственным полем жидкости, этот механизм становится определяющим. Взаимодействие сферических тел с различными магнитными свойствами в этом случае рассмотрено в [17]. Точное описание развития магнитных сил в неоднородном внешнем поле приобретает актуальность по мере развития магнитожидкостной техники.

Цель настоящей работы – теоретическая и экспериментальная разработка модели, позволяющей оценить вклад различных факторов в магнитную силу. Неоднородное магнитное поле формируется плоской системой постоянных магнитов с периодически распределенной намагниченностью. Модуль напряженности поля экспоненциально убывает в нормальном к плоскости системы направлении. Такая геометрия источника представляет единственную возможность создания в объеме жидкости поля "внешних" магнитодипольных сил с плоскими изопотенциальными поверхностями (плоский магнитожидкостный резервуар), как и у поля сил тяжести. В этом резервуаре во всей области, занятой жидкостью, силовые линии представляют параллельные прямые. Однако в отличие от поля тяжести напряженность магнитодипольных сил изменяется вдоль силовой линии. Различные аспекты поведения магнитной жидкости в таком резервуаре рассматривались также в [18, 19].

1. Описание экспериментальной установки. Схема экспериментальной установки изображена на фиг. 1. Магнитная система 3 собрана из элементарных магнитов, изготовленных из магнитожесткого материала и намагниченных перпендикулярно оси y . Пространственный период системы составляют четыре элементарные ячейки (система четвертого порядка). Толщина магнитного слоя $l_a = 20$ мм, длина элементарной ячейки 20 мм, параметр периодичности $\lambda = 80$ мм, общие габариты системы 160×160 мм.

На магнитную систему может быть установлена кювета из плексигласа 1 длиной $\Delta x_c = 60$ мм, шириной $\Delta y_c = 50$ мм, высотой 30 мм, толщина днища кюветы 0.3 мм. В кювете может перемещаться плоскопараллельная пластина 2 из плексигласа (плавающее немагнитное тело) с размерами: $\Delta x_b = 40$ мм (полпериода магнитной системы), $\Delta y_b = 30$ мм, высотой $l_b = 8$ мм.

Тело 2, жестко соединенное двумя стержнями 4 (диаметр $d_c = 10$ мм, высота 60 мм) с нагрузочной площадкой 5 (60 × 50 мм), образует более крупный узел установки – подвес. Грузы, которые могут размещаться на площадке, и другие детали подвеса изготовлены из немагнитного материала. Масса подвеса без грузов $m_s = 51.3$ г. Уровень жидкости ($l_c = l + l_b + l_1 = 18.6$ мм) при погружении тела поддерживается постоянным с помощью переливочного отверстия. Положение кюветы определяется параметром z_c , положение плавающего тела – параметром l (фиг. 1).

В процессе измерений для обеспечения плавного перемещения тела внутри кюветы использовались две конструкции. В конструкции, называемой далее скользящим подвесом, для ограничения вращательных и тангенциальных перемещений подвеса относительно поверхности магнитов используется неподвижная корпусная пластина 6 (толщина 15 мм) с двумя отверстиями (диаметр 10 мм) под стержни подвеса. При этом подвес имеет возможность перемещаться перпендикулярно корпусной пластине, благодаря скольжению стержней в отверстиях. Преимущество идеально скользящего подвеса состоит в возможности прямого измерения гидростатических сил (магнитной и архимедовой). Однако полное исключение сил трения стержней в отверстиях корпуса проблематично. При помещении груза на площадку центр тяжести системы значительно смещается вверх, что увеличивает вероятность наклона подвеса и недопустимого возрастания сил трения.

В конструкции, называемой в дальнейшем упругим подвесом, равновесие достигается с помощью четырех пружин 7, прикрепленных одним концом к углам нагрузочной площадки. Другой конец пружин прикреплен к неподвижному корпусу таким образом, что в ненагруженном состоянии плавающее тело находится параллельно поверхности магнитов. Неудобства, связанные с тарировкой упругого подвеса, компенсируются более надежной работой по сравнению со скользящим подвесом.

Простейший эксперимент по измерению магнитной силы, действующей на тело 2, состоит в следующем. Кювета с магнитной жидкостью и подвесом массой m_s устанавливается на магнитную систему. С помощью катетометра КМ-8 проводятся измерения (с точностью до 10 мкм) положения тела при изменении массы грузов на нагрузочной площадке (за точку отсчета взято положение подвеса при опускании плавающего тела на дно кюветы).

В дальнейшем будем рассматривать магнитную силу, которая приходится на единицу площади плавающего тела (приведенная магнитная сила σ). На подвес действуют сила тяжести подвеса, упругая сила (для упругого подвеса), магнитная и архимедова сила выталкивания жидкостью инородного тела. Из условия равновесия для скользящего и упругого подвесов имеем соответственно

$$\sigma = \frac{g(m + m_s - V\rho)}{\Delta x_b \Delta y_b}, \quad \sigma = \frac{g(m - m_0 - V\rho)}{\Delta x_b \Delta y_b} \quad (1.1)$$

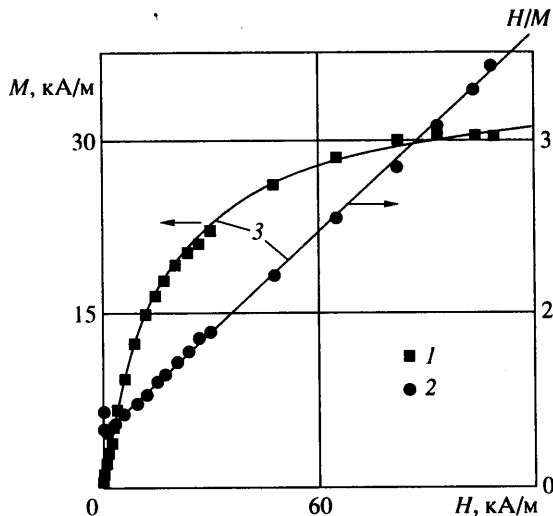
$$V = 0.5\pi d_c^2 (l_c - l_b - l) + \Delta x_b \Delta y_b l_b$$

где m – масса груза, обеспечивающего равновесие тела, погруженного в магнитную жидкость, m_0 – масса груза при аналогичном положении плавающего тела в отсутствие магнитной жидкости (поправка для исключения влияния силы натяжения пружин), ρ – плотность магнитной жидкости, V – объем смоченной части подвеса.

Для исследования распределения напряженности поля использовался тесламетр универсальный (диапазон измерения 2–200 мТл). Щуп тесламетра (в который встроены датчик), закрепленный на штативе, имеет возможность перемещаться в горизонтальном и вертикальном направлениях.

В эксперименте использовалась магнитная жидкость на основе трансформаторного масла и магнетита плотностью $\rho = 1.276$ г/см³. Закон ее намагничивания удобно аппроксимировать линейной функцией между обратной магнитной восприимчивостью H/M и напряженностью H [20]:

$$M_s \frac{H}{M} = H_c + H \quad (1.2)$$



Фиг. 2. Зависимости намагниченности (1) и обратной магнитной восприимчивости (2) магнитной жидкости от напряженности магнитного поля и их аппроксимации (3) дробно-линейной зависимостью (1.2)

Используя экспериментальные данные (фиг. 2), найдем параметры уравнения – намагниченность насыщения $M_s = 35.40$ кА/м и значение напряженности, при которой намагниченность равна: $M_s/2$; $H_c = 17.12$ кА/м. На фиг. 2 представлен также закон намагничивания в общепринятом виде $M = M(H)$.

2. Распределение магнитного поля в резервуаре. Для приближенного описания распределения поля в резервуаре будем считать, что пространство разделено на пять плоскопараллельных слоев (a', a); (a, c); (c, b); (b, b'); (b', c') и воспользуемся общим методом расчета периодически распределенного поля в многослойной среде, представленным в [21–23]. Распределение компонент постоянной составляющей намагниченности в источнике поля (a', a) можно представить в виде

$$M_x = -\sum_n M_{xn} \sin(nx), \quad M_z = \sum_n M_{zn} \cos(nx) \quad (2.1)$$

Здесь и везде далее в качестве масштаба расстояния выбрана величина $\lambda/2\pi$. В пределах каждой ячейки $M_x = M_f = \text{const}$, $M_z = M_f = \text{const}$, ориентация намагниченности в ячейках чередуется в соответствии с фиг. 1.

Для линейно намагничивающейся среды выполняется принцип суперпозиции, что позволяет рассматривать поле системы как суперпозицию полей, создаваемых отдельными гармоническими составляющими распределений (2.1). Решение уравнений Максвелла, приводит к следующему выражению для поля n -ной гармоники в i -том слое:

$$\mathbf{H}_n^{(i)} = L_{ni} e^{-n(z-z_i)} \mathbf{i}_{Ln} + R_{ni} e^{n(z-z_i)} \mathbf{i}_{Rn} + \mathbf{i}(M_{xni} / \mu_i) \sin nx \quad (2.2)$$

$$\mathbf{i}_{Ln} = \mathbf{i} \sin nx + \mathbf{k} \cos nx, \quad \mathbf{i}_{Rn} = -\mathbf{i} \sin nx + \mathbf{k} \cos nx$$

где \mathbf{i} , \mathbf{k} – единичные векторы x - и z -осей соответственно, μ_i – магнитные проницаемости вещества, постоянные в пределах каждого слоя, постоянные L_i и R_i (базисные проекции поля) определяются из условий непрерывности нормальной

составляющей индукции и тангенциальной составляющей напряженности поля на границах раздела слоев с различными магнитными свойствами:

$$\mu^+ H_z^+ - \mu^- H_z^- = -(M_z^+ - M_z^-), \quad H_x^+ - H_x^- = 0 \quad (2.3)$$

При $\mu = 1$ отсюда следуют граничные условия на границах источника магнитного поля из магнитожесткого материала, при $M_x = M_z = 0$ – на границах намагничивающихся слоев.

Базисные составляющие распределения намагниченности выражаются через коэффициенты Фурье распределения намагниченности и для источника 4-го порядка равны:

$$M_{L_n} = \frac{M_{zn} + M_{xn}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi n} M_f (-1)^k = M_{L1} \left\{ 1, 0, 0, 0, -\frac{1}{5}, 0, 0, \dots \right\}, \quad n = 4k + 1;$$

$$M_{R_n} = \frac{M_{zn} - M_{xn}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi n} M_f (-1)^{k+1} = M_{L1} \left\{ 0, 0, -\frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{7}, \dots \right\}, \quad n = 4k + 3;$$

$$M_{L1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} M_f, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В пустом резервуаре (при отсутствии намагничивающихся слоев в окрестности источника) поле в верхнем полупространстве ($a, +\infty$) определяется только базисными проекциями L_n , а в нижнем полупространстве ($-\infty, a'$) – проекциями R_n , каждая из которых в общем случае определяется параметрами M_{L_n} и M_{R_n} . Однако для магнитной системы, изготовленной из магнитожесткого ферромагнетика, выполняется условие $\mu_a \approx 1$, при котором переменные разделяются. В результате имеем $L_n = M_{L_n}(1 - e^{-n'a})$ при любой толщине системы. Следовательно, согласно (2.2), распределение поля в верхнем полупространстве имеет вид

$$\mathbf{H} = M_{L1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n} (1 - e^{-n'a}) e^{-nz} (i \sin nx + \mathbf{k} \cos nx), \quad n = 4k + 1$$

Расчеты и измерения [22] напряженности поля в пустом резервуаре показали, что на расстояниях $z \geq 5$ мм от поверхности системы роль высших гармоник пренебрежимо мала. Для распределения поля в этой области выполняется моногармоническое приближение

$$\mathbf{H}^{(0)} = L_* e^{-z} (i \sin x + \mathbf{k} \cos x), \quad H^{(0)} = L_* e^{-z} \quad (2.4)$$

Аппроксимацией зависимости напряженности поля от координаты z в пустом резервуаре получено следующее значение L -проекции поля на поверхности ($z = 0$) магнитной системы: $L_* = M_{L1}(1 - e^{-l'a}) = 168,5$ кА/м.

Рассмотрим характеристики поля при наличии в резервуаре магнитной жидкости. Как следует из (2.2), при отсутствии постоянной составляющей намагниченности ($M_{xn} = 0$) декартовы проекции поля и модуль поля при $z = z_j$ связаны с базисными проекциями соотношениями

$$H_x = (L_j - R_j) \sin x, \quad H_z = (L_j + R_j) \cos x \quad (2.5)$$

Из условий (2.3) для j -той границы с учетом (2.5) следуют соотношения, которые связывают базисные проекции по разные стороны границы раздела

$$L_j^- = \frac{L_j + r_j R_j}{p_j}, \quad R_j^- = \frac{r_j L_j + R_j}{p_j}, \quad r_j = \frac{\mu_j - \mu_{j+1}}{\mu_j + \mu_{j+1}}, \quad p_j = \frac{2\mu_{j+1}}{\mu_j + \mu_{j+1}}, \quad (2.6)$$

$$L_j^+ \equiv L_j, \quad R_j^+ \equiv R_j$$

Анализ системы (2.6) для крайней границы c' , для которой $R = 0$ ($H \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$), проясняет физический смысл параметров r и p . Параметр p , равный отношению L -проекции поля по разные стороны крайней границы раздела двух сред, представляет собой коэффициент прохождения гармонической составляющей неоднородного магнитного поля через эту границу. Параметр r , равный отношению L - и R -проекций по одну сторону крайней границы раздела, можно интерпретировать как коэффициент отражения: L -поле, отражаясь от границы, превращается в R -поле и наоборот. Трансформация поля возле уединенной границы полностью определяется одним из этих параметров, поскольку они связаны уравнением баланса $r_i + p_i = 1$.

Используя соотношения (2.6), записанные для всех границ, можно ввести интегральные трансформационные коэффициенты, определяющие изменение базисных проекций при переходе через любую внутреннюю границу:

$$q_i = \frac{L_i}{L_i^-} = \frac{p_i}{1 + r_i s_{i-1} e^{-2l_i}}, \quad s_i = \frac{R_i^-}{L_i^-} = \frac{r_i + s_{i-1} e^{-2l_i}}{1 + r_i s_{i-1} e^{-2l_i}} \quad (2.7)$$

где $l_i = z_{i-1} - z_i$, параметр q_i представляет собой коэффициент прохождения поля соответственно в полупространство $z \geq z_i$; параметр s_i – коэффициент отражения поля от этого полупространства.

Соотношения (2.7) – это рекуррентные формулы, по которым трансформационные параметры для любого полупространства выражаются через толщины слоев l_i и коэффициенты магнитной проницаемости μ_i в этом полупространстве. Так, параметры для полупространства $z \geq z_j$ выразятся через величины с индексами $i \leq j$. Для крайних границ имеют место условия $l_1, l_{N+1} \rightarrow \infty$ и, как следует из (2.7), интегральные параметры совпадают с параметрами r и p для уединенных границ.

3. Сила, действующая на плоскопараллельный слой в плоском магнитоидкостном резервуаре. Для вычисления магнитной силы, действующей на тело, необходимо использовать тензор полных напряжений, включающий давление и максвелловские напряжения. Статическая сила, действующая на единичную площадку, ориентация которой задается нормалью \mathbf{n} , определяется соотношением

$$\boldsymbol{\sigma}_n = -(p_m + \mu_0 H^2 / 2) \mathbf{n} + \mathbf{H} \mathbf{B}_n, \quad p_m = \mu_0 \int \mathbf{M}(\mathbf{H}) d\mathbf{H} \quad (3.1)$$

где p_m – давление, связанное с действием магнитодипольных сил в объеме жидкости (по терминологии [1], магнитоидкостное давление). Приведенная магнитная сила $\boldsymbol{\sigma}$ равна сумме средних значений нормальных магнитных напряжений в жидкости вблизи поверхностей b и b' . При этом $\langle \sigma_{nb} \rangle = \langle \sigma_{zb} \rangle$, $\langle \sigma_{nb'} \rangle = -\langle \sigma_{zb} \rangle$, поскольку нормаль к поверхности b ориентирована противоположно оси z . Таким образом, для приведенной силы имеем

$$\boldsymbol{\sigma} = \langle \sigma_{zb'} \rangle - \langle \sigma_{zb} \rangle \quad (3.2)$$

Дальнейшая конкретизация формулы (3.1) требует использования закона намагничивания.

В случае линейного закона намагничивания $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ имеем

$$p_m = \mu_0 \chi H^2 / 2, \quad \boldsymbol{\sigma}_n = \mu_0 \mu (-H^2 / 2 \mathbf{n} + \mathbf{H} \mathbf{H}_n), \quad \mu = 1 + \chi$$

$$\sigma_z = \mu_0 \mu (H_z^2 - H_x^2) / 2, \quad \sigma_x = \mu_0 \mu H_x H_z$$

где σ_z, σ_x – декартовы составляющие магнитных напряжений.

С учетом (2.5) для z -составляющей напряжения и ее среднего значения на промежутке периодичности имеем

$$\sigma_z = \mu_0 \mu (LR + 2(L^2 + R^2) \cos 2x) \quad (3.3)$$

$$\langle \sigma_z \rangle = \mu_0 \mu LR \quad (3.4)$$

Из общих формул (2.7) следует

$$R_b = L_b s_b, \quad R_{b'} = L_{b'} e^{-2l_1} r_{c'} \quad (3.5)$$

Здесь $L_b, L_{b'}$ – L -проекция поля вблизи поверхностей b, b' ; s_b – коэффициент отражения поля от полупространства за поверхностью b . Таким образом, для приведенной силы имеем выражение

$$\alpha = \mu_0 (\mu_{b'} L_{b'}^2 e^{-2l_1} r_{c'} - \mu_b L_b^2 s_b) \quad (3.6)$$

С целью рассмотренного в разд. 4 обобщения в настоящем параграфе используются различные обозначения для магнитной проницаемости, которая здесь является постоянной величиной: $\mu = \mu_c = \mu_b = \mu_{b'} = \mu_{c'}$.

Проекции $L_{b'}, L_b$ выражаются через L_* и коэффициенты прохождения поля через соответствующие границы:

$$L_{b'} = L_b e^{-l_b} q_b q_{b'}, \quad L_b = q_c L_* e^{-(l_d + l)} \quad (3.7)$$

Коэффициенты прохождения поля через границы b, b' и c соответственно равны:

$$q_b = \frac{1 - r_b}{1 + r_b s_b e^{-2l_b}}, \quad q_{b'} = \frac{1 - r_{b'}}{1 - r_{b'}^2 e^{-2l_1}}, \quad q_c = \frac{1 - r_c}{1 + r_c s_b e^{-2l}} \quad (3.8)$$

коэффициенты отражения поля от полупространств, связанных с этими границами

$$s_b = \frac{r_b + s_b e^{-2l_b}}{1 + r_b s_b e^{-2l_b}}, \quad s_{b'} = \frac{r_{b'}(1 - e^{-2l_1})}{1 - r_{b'}^2 e^{-2l_1}}, \quad s_c = \frac{r_c + s_b e^{-2l}}{1 + r_c s_b e^{-2l}} \quad (3.9)$$

коэффициенты отражения от уединенных границ

$$r_c = \frac{\mu_c - 1}{\mu_c + 1}, \quad r_{c'} = \frac{1 - \mu_{c'}}{1 + \mu_{c'}}, \quad r_b = \frac{1 - \mu_b}{1 + \mu_b}, \quad r_{b'} = \frac{\mu_{b'} - 1}{\mu_{b'} + 1} \quad (3.10)$$

Знак силы в выражении (3.6) определяется знаком большего по абсолютной величине второго слагаемого, а следовательно, знаком величины s_b , знак которой в свою очередь определяется знаком $-r_b$. Как и следовало ожидать из физических соображений, при $\mu > 1$ сила положительна, т.е. направлена вдоль оси z .

Рассмотрим магнитную силу для нелинейно намагничивающейся жидкости. С учетом скачка максвелловских напряжений на поверхности немагнитного тела [1–4] для нормальных составляющих магнитных напряжений из (3.1) следует

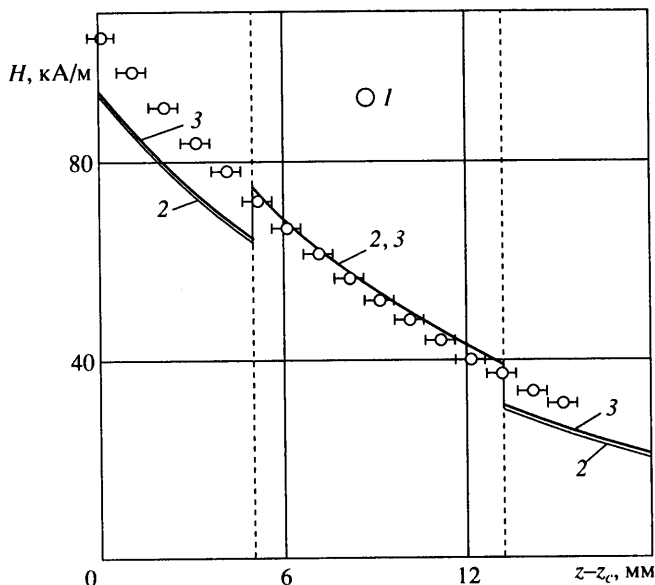
$$\sigma_n = -(p_m + \mu_0 M_n^2 / 2), \quad p_m = \mu_0 M_s \left(H - H_c \ln \left(\frac{H}{H_c} + 1 \right) \right) \quad (3.11)$$

Здесь второе слагаемое связано с действием магнитодипольных сил в поверхностном слое магнетика. Выражение для p_m получено с учетом закона намагничивания (1.2).

Записав разность z -составляющих магнитных напряжений (3.11) на границах b и b' и усреднив ее по пространственному периоду распределения поля, приходим к формуле (3.2) для приведенной силы, где

$$\langle \sigma_{zi} \rangle = \langle p_{mi}(x) \rangle + \mu_0 \frac{M_s^2}{2} \left\langle \frac{H_{zi}^2}{(H_c + H_i(x))^2} \right\rangle \quad (i = b, b') \quad (3.12)$$

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx$$



Фиг. 3. Распределение средней по координате x напряженности поля вдоль оси z : результаты измерений в пустом резервуаре (1); расчет по квазилинейному распределению в заполненном резервуаре (2 – первое приближение, 3 – завершённый расчет)

Рассмотрим приближенные подходы для определения магнитной силы через геометрические и магнитные параметры. В простейшем случае в (3.12) можно использовать распределение поля (2.4) в пустом резервуаре (безындукционное приближение). Тогда $H_i = H_i^{(0)}$, $\langle H_{zi}^2 \rangle = H_i^2 / 2$ и (3.2) принимает вид

$$\frac{\sigma}{\mu_0 M_s H_c} = (\xi_b - \xi_{b'}) \left(1 + \frac{\chi_m}{4} \frac{\xi_b + \xi_{b'} + 2\xi_b \xi_{b'}}{(1 + \xi_b)^2 (1 + \xi_{b'})^2} \right) - \ln \frac{1 + \xi_b}{1 + \xi_{b'}} \quad (3.13)$$

$$\chi_m = M_s / H_c, \quad \xi_i = H_i^{(0)} / H_c$$

Вследствие размагничивающего влияния границ собственные поля жидкости в среднем уменьшают напряженность магнитного поля вблизи границ тела и, следовательно, безындукционное приближение должно давать верхнюю оценку силы. Рассмотрим распределение поля, частично учитывающее собственные поля жидкости, на основе которого можно получить менее завышенную оценку сил.

4. Квазилинейное распределение поля. Имеются два типа источников индуцированного жидкостью магнитного поля: поверхностные, связанные со скачком нормальной составляющей намагниченности на границах слоев и объемные, пропорциональные $(\mathbf{H} \text{ grad } \mu)$. В линейно намагничивающейся среде объемные источники отсутствуют, поскольку $\text{grad } \mu = 0$. В условиях эксперимента распределение магнитной восприимчивости по объему жидкости отличается от однородного. Оценку неоднородности проведем, используя экспериментальную зависимость напряженности внешнего поля от расстояния до дна кюветы, представленную на фиг. 3 для $z_c = 5$ мм. Подставив аппроксимацию (2.4) этой зависимости в (1.2), получим

$$\mu_i^{(1)} = 1 + \frac{\chi_m}{1 + \xi_i}, \quad r_i^{(1)} = \pm \frac{\chi_m}{2 + \chi_m + 2\xi_i} \quad (4.1)$$

где индекс i определяет значение величин вблизи соответствующих границ $i = c, b, b', c'$, знак "+" выбирается для границ c, b' , "-" – для b, c' .

Напряженность внешнего поля в нижнем слое при максимальной толщине изменяется от 49 до 108 кА/м, в верхнем слое – от 27 до 58 кА/м, соответствующие оценки магнитной проницаемости – от $\mu_b = 1,9$ до $\mu_c = 1,4$ и от $\mu_{c'} = 2,4$ до $\mu_{b'} = 1,8$. Относительный параметр неоднородности магнитной проницаемости в слоях принимает умеренные значения: $\Delta\mu/\mu_{\min} = 0,35$ и $0,3$.

При оценке сил самовоздействия будем учитывать действие только поверхностных источников собственного поля жидкости. Это позволит при расчете поля использовать схему линейной теории, в которой коэффициенты трансформации рассчитываются по значениям фактического неоднородного распределения магнитной проницаемости. Получаемое таким образом распределение поля можно охарактеризовать как квазилинейное: для нелинейно намагничивающейся среды сохраняется общий вид распределения поля линейной теории, а нелинейность учитывается только при нахождении его параметров. Точность расчета силы на основе такого подхода в работе не оценивается. Однако некоторые заключения можно сделать из общих соображений.

Поверхностные источники существенны для всего диапазона полей, в то время как объемные источники в слабых полях ($H \ll H_c$) отсутствуют. В сильных полях ($H > H_c$) вклад объемных источников может быть сравним с вкладом поверхностных источников, поэтому разность сил, рассчитанных на основе безындукционного и квазилинейного распределений, когда во всем объеме не выполняется условие слабых полей, следует рассматривать лишь как оценку порядка величины сил самовоздействия.

Возможны различные варианты расчета параметров квазилинейного распределения поля. В первом приближении их можно найти по (4.1). Более детализированные оценки вытекают из точной формулы, определяющей зависимость магнитной проницаемости от напряженности магнитного поля:

$$\mu_i = 1 + \chi_m (1 + H_i(x) / H_c)^{-1} \quad (4.2)$$

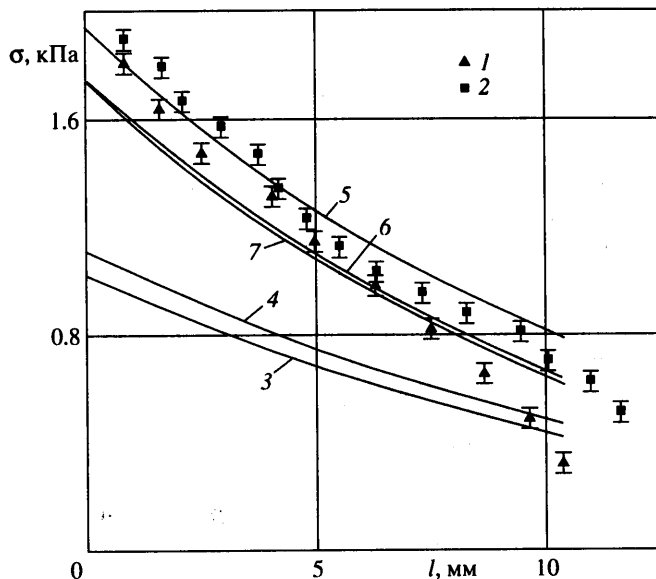
Напряженность поля $H_i(x)$ возле i -той границы при квазилинейном распределении рассчитывается по формуле

$$H_i(x) = \sqrt{H_x^2 + H_z^2} = \sqrt{L_i^2 + R_i^2 + 2L_i R_i \cos 2x} \quad (4.3)$$

Далее применяется следующий способ осреднения: в (4.2) вместо распределения $H_i(x)$ используется его среднее значение $\langle H_i(x) \rangle$.

Уравнения (3.5), (3.7) – (3.10), (4.2) – (4.4) представляют замкнутую систему для расчета характеристик поля у границ раздела многослойной системы. Ее решение удобно проводить методом последовательных приближений. В первом приближении μ_i , r_i определяются по (4.1), затем по (3.5), (3.7) с учетом (3.8), (3.9) находятся базисные параметры L_i и R_i , а по (4.3) рассчитывается H_i . Во втором и последующих приближениях μ_i определяется по (4.2), r_i – по (3.10). На фиг. 3 наряду с измеренным распределением средней напряженности в пустом резервуаре представлены также расчетные зависимости в резервуаре с магнитной жидкостью при $l = 5$ мм. Относительное расхождение значений напряженности, полученных в первом приближении и путем реализации сходящейся итерационной процедуры (завершенный расчет), не превышает двух процентов.

5. Результаты измерения и расчета магнитной силы. На фиг. 4 представлены результаты двух независимых серий экспериментов по измерению магнитной силы при одинаковых условиях с той лишь разницей, что в одном случае использовался скользящий подвес, в другом – упругий. Максимальный доверительный интервал, связанный с величинами, входящими в расчетные формулы (1.1), представлен вертикальным размером значков, изображающих экспериментальные данные. Однако реальный уровень погрешностей, определяется, по-видимому, такими трудно учитываемыми факторами, как порог реагирования, обусловленный силой трения (для скользящего подвеса), неточности позиционирования (упругий подвес), неоднород-



Фиг. 4. Зависимость приведенной магнитной силы от толщины слоя l под плавающим телом: экспериментальные зависимости для скользящего и упругого подвесов (1, 2); расчет по (3.6) с квазилинейным распределением поля (3 – первое приближение, 4 – заверченный расчет); расчет по (3.2), (3.12) (5 – в безындукционном приближении, 6, 7 – с квазилинейным распределением поля: 6 – первое приближение, 7 – заверченный расчет)

ность распределения феррофазы по объему жидкости в неоднородном поле. Уровень этих погрешностей характеризуют различия результатов серий и отклонения от гладких кривых, которыми можно было бы аппроксимировать каждую из серий. В частности, значения силы, полученные при использовании скользящего подвеса, оказались несколько меньше, чем при использовании упругого подвеса. Возможная причина – сила трения в скользящем подвесе. При уменьшении магнитной силы эти погрешности могут оказать существенное влияние, о чем свидетельствует заметное расхождение результатов измерений для двух серий при больших l .

Точная формула для описания экспериментальной зависимости может быть получена на основании интегрирования точных значений магнитных напряжений $\sigma_{z\Sigma} = \sigma_z + \Delta\sigma_z$ по поверхности тела. Здесь σ_z – напряжения, полученные в разд. 2 в рамках идеализированного представления о неограниченной слоистой среде, $\Delta\sigma_z$ – поправка, обусловленная конструктивными отличиями резервуара от идеальной модели. Наиболее существенные различия состоят в том, что измеряемая магнитная сила является результатом действия напряжений на тело и смоченную часть стержней 4 (фиг. 1), а также в наличии краевых эффектов, связанных с конечными размерами тела и кюветы. Краевые эффекты в дальнейшем не учитываются. Чтобы учесть силу, действующую на стержни, необходимо при определении $\langle \sigma_{b'} \rangle$ исключить площадь контакта тела со стержнями, поэтому в формуле (3.2) вместо напряжения $\langle \sigma_{zb'} \rangle$ при расчетах использовались эффективные напряжения:

$$\langle \sigma_{zb'} \rangle^e = \langle \sigma_{zb'} \rangle \left(1 - \frac{\pi d_c^2}{2 \Delta x_c \Delta y_c} \right) = 0,87 \langle \sigma_{zb'} \rangle$$

На фиг. 4 представлены результаты расчета силы на основе различных приближений, которые показывают вклад различных факторов. Как видно, экспериментальные данные в основном попадают в полосу, определяемую формулами (3.2), (3.12),

при использовании внешнего и квазилинейного распределений поля. При этом с перемещением тела в область более сильного поля лучшее описание достигается в безындукционном приближении, а с перемещением тела в область более слабого поля лучшее согласование дает зависимость, частично учитывающая эффект самовоздействия. Это объяснимо, поскольку с уменьшением напряженности возрастает магнитная восприимчивость жидкости, которая характеризует относительный вклад вносимых жидкостью возмущений. При приближении тела к магниту наблюдается некоторое превышение измеренной силы по отношению к максимально ожидаемому, что может быть связано со стратификацией феррофазы в неоднородном магнитном поле. Возможной причиной могут быть также неточности расчетной модели.

Расчет силы по формуле (3.6) дает существенно заниженные результаты, так как условием ее применимости является $H < H_c$. В экспериментах это условие не выполняется: $1 \leq \xi \leq 5$ (см. фиг. 3).

Таким образом, важнейший фактор описания магнитной силы – это учет нелинейности кривой намагничивания при аппроксимации зависимости магнитожидкостного давления от поля. Уравнение (3.12) хорошо решает эту задачу.

Заключение. Каждая из разработанных моделей для расчета сил, действующих на бесконечно протяженный немагнитный слой в плоском магнитожидкостном резервуаре, имеет свое значение и область применения. Модель линейно намагничивающейся жидкости (3.6) – (3.10) описывает силу в слабых полях без ограничений на величину магнитной проницаемости. Однако ее "квазилинейная" экстраполяция в области умеренных и сильных полей приводит к приблизительно двукратно заниженным результатам по сравнению с экспериментальными данными. Безындукционное приближение (3.13) удовлетворительно описывает результат эксперимента, но в области слабых полей его применимость ограничена малыми значениями магнитной восприимчивости. Комбинированная модель (3.2), (3.11), (3.12), (3.7) – (3.10), (4.2) – (4.3) объединяет лучшие качества двух предыдущих: в слабых полях она переходит в (3.6) – (3.10), в умеренных и сильных полях близка к безындукционному приближению и показывает тенденцию силы к уменьшению по сравнению с "внешней" силой.

Авторы выражают благодарность В.Г. Баштовому и М.С. Кракову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
2. Баштовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. М.: ИВТАН СССР, 1985. 188 с.
3. Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
4. Блум Э.Я., Майоров М.М., Цеберс А.О. Магнитные жидкости. Рига: Зинатне, 1989. 386 с.
5. Rosensweig R.E. Fluidmagnetic buoyancy // AIAA J. 1966. V. 4. № 10. P. 1751–1758.
6. Rosensweig R.E. Phenomena and relationships of magnetic fluid bearings // Thermomechanics of Magnetic Fluids. Washington; London: Hemisphere, 1978. P. 231–254.
7. Барков Ю.Д., Фертман В.Е. Экспериментальное исследование плавления магнитных тел в намагничивающейся жидкости // Магнитн. гидродинамика. 1978. № 1. С. 23–26.
8. Дроздова В.И., Скроботова Т.В., Чеканов В.В. О выталкивающей силе, действующей в неоднородном магнитном поле на немагнитные тела, погруженные в феррожидкость // Магнитн. гидродинамика. 1979. № 3. С. 128–130.
9. Кашевский Б.Э. О моменте сил, действующем на тело в намагничивающейся жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 132–136.
10. Стругов В.Г., Чеканов В.В. О взаимодействии немагнитных тел в магнитной жидкости // Одиннадцатое Рижское совещ. по магнитной гидродинамике. Рига, 1984. Т. 3. С. 103–106.
11. Curtis R.A. Second order effects in fluidmagnetic buoyancy // Appl. Sci. Res. 1974. № 5. С. 342–350.

12. *Цеберс А.О.* Левитация постоянного цилиндрического магнита в ФЖ // Девятое Рижское совещ. по магнитной гидродинамике. Саласпис, 1978. Т. 1. С. 129–130.
13. *Берковский Б.М., Вислович А.Н., Ларин А.С.* Некоторые вопросы статического и динамического взаимодействия феррожидкости с твердыми телами // Проблемы механики магнитных жидкостей. ИТМО АН БССР. Минск. 1981. С. 14–36.
14. *Берковский Б.М., Вислович А.Н.* Цилиндрический магнитожидкостный подвес // Десятое Рижское совещ. по магнитной гидродинамике. Саласпис, 1981. С. 97–98.
15. *Вислович А.Н., Краков М.С.* К расчету сил, действующих на магнит, взвешенный в магнитной жидкости // Одиннадцатое Рижское совещ. по магнитной гидродинамике. Саласпис, 1984. Т. 3. С. 187–190.
16. *Гогосов В.В., Смолкин Р.Д., Гарин Ю.М. и др.* Особенности расчета магнитожидкостных сепараторов с магнитной системой без экрана // Одиннадцатое Рижское совещ. по магнитной гидродинамике. Саласпис, 1984. Т. 3. С. 191–194.
17. *Вислович А.Н., Лобко С.И., Лобко Г.С.* Взаимодействие твердых тел, взвешенных в магнитной жидкости в однородном магнитном поле // Магнитн. гидродинамика. 1986. № 4. С. 43–51.
18. *Medvedev V.F., Vislovich A.N., Bakatenko V.I., Olekhnovich A.M.* Magnetic fluid in the field of a plane magnet with periodically distributed magnetization // J. Magnetism and Magnetic Mat. 1987. V. 65. № 2–3. P. 227–230.
19. *Бакаленко В.И., Вислович А.Н., Медведев В.Ф.* Движение капель магнитной жидкости в неоднородном магнитном поле // Весці АН БССР. Сер. фіз.-энерг. навукі. 1990. № 3. С. 86–90.
20. *Вислович А.Н.* Феноменологическое уравнение статического намагничивания магнитных жидкостей // Магнитн. гидродинамика. 1990. № 2. С. 54–60.
21. *Вислович А.Н., Тихонов М.М.* Взаимодействие токов и магнитов в магнитной жидкости // Тр. БГТУ. Физ.-мат. науки. Минск, 1998. Вып. 6. С. 56–64.
22. *Вислович А.Н., Сухоцкий А.Б.* Отражение пространственной гармоника магнитостатического поля от намагничивающегося слоя // Тр. БГТУ. Физ.-мат. науки. Минск. 1999. Вып. 7. С. 78–91.
23. *Вислович А.Н., Сухоцкий А.Б.* Взаимодействие плоских источников, погруженных в магнитную жидкость // Девятая Междунар. Плесская конф. по магнитным жидкостям. Плес, Россия. 2000. Т. 1. С. 70–75.

Минск

Поступила в редакцию
26.IX.2000